Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2007. Том 15. № 2. С. 69–77

УДК 512.554.32

ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SL_{n+1}(K)$ НА ПОДГРУППЫ $SL_{r+1}(K)$, ГДЕ $r < n$

А. А. Осиновская

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: anna@im.bas-net.by
Поступила 06.04.2007

Введение. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p \geq 0$, G — простая алгебраическая группа ранга n, а $H(r)$ — ее полупростая подгруппа ранга r. В теории представлений часто возникает задача ограничения неприводимых представлений группы G на подгруппу $H(r)$ (например, при проведении индукции по рангу группы).

Если $p = 0$, то данная задача для естественно вложенной подгруппы $H(n-1)$ того же типа, что и G, решена в работах Г. Вейля [1] (специальная линейная группа) и Д.П. Желобенко [2] (остальные классические группы). Полученные формулы называются классическими правилами ветвления. Напомним, что подгруппа $H(r)$ называется естественно вложенной в группу G, если $H(r)$ порождается корневыми подгруппами группы G, ассоциированными с некоторыми положительными и противоположными к ним корнями. Но если $H(r)$ не является естественно вложенной или простой подгруппой, то даже для $p = 0$ задача далека от разрешения. В [3] описаны ограничения неприводимых представлений алгебраических групп типа A_n $(n > 2)$ на естественно вложенные подгруппы типа $A_1 \times A_1$. Важный класс подгрупп — подгруппы типа A_1, содержащие регулярные унипотентные элементы группы G. В работе [4] найдены ограничения на такие подгруппы для $G = A_2(K)$, $C_2(K)$ и $A_3(K)$.

Ограничения модулярных представлений изучены гораздо меньше, поскольку данная задача тесно связана с нерешенными фундаментальными проблемами нахождения композиционных факторов модулей Вейля и размерностей неприводимых представлений. Тем не менее, в этой области получен ряд важных результатов. Теорема Смита–Янцена [5, 6] позволяет определить одно прямое слагаемое ограничения представления, если $H(r)$ порождается корневыми подгруппами для простых корней. В [7, лемма 2.9] И.Д. Супруненко найден способ построения серий композиционных факторов для таких ограничений. В [8] получен комбинаторный критерий полной приводимости ограничений неприводимых GL_n-модулей на естественно вложенные подгруппы типа GL_{n-1} и описаны композиционные факторы таких ограничений при наличии полной приводимости. Трудность получения модулярных правил ветвления делает целесообразным поиск их асимптотических аналогов, т.е. стоит рассматривать ограничения представлений, когда $r \ll n$. Автором в работах [9–11] найдены композиционные факторы ограничений модулярных p-ограниченных представлений простых групп $G \neq G_2(K)$ на естественно вложенные подгруппы типа A_1. В работах [12, 13] изучались ограничения модулярных представлений групп типа A_n, B_n и D_n на подгруппу типа A_2, однако ответ в этом случае найден только для специального класса представлений.

Всюду далее $G = SL_{n+1}(K)$, где $n > 2$. Обозначим через ω_i, $1 \leq i \leq n$, фундаментальные веса группы G, занумерованные, как и в [14]. Далее V_ω — простой рациональный G-модуль со старшим весом $\omega = \sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i$. Если $p > 0$, то предположим также, что вес ω

является p-ограниченным, т.е. все $m_i < p$. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, а $\mathbb{N}$ — множество неотрицательных целых чисел. Для алгебраической группы Γ и ее подгруппы $\Pi \subset \Gamma$ обозначим через $V|\Pi$ ограничение Γ-модуля V на Π, а через $\operatorname{Irr} V$ — множество весов композиционных факторов Γ-модуля V (без учета кратностей). Если S — подгруппа группы G, положим $\operatorname{Irr}_S\omega = \operatorname{Irr}(V_\omega|S)$.

Пусть $H(r)$ — естественно вложенная подгруппа группы G типа A_r ($r < n$, все такие подгруппы для фиксированного r сопряжены). Мы предполагаем, что $r > 1$, поскольку ограничения представлений на группу $A_1(K)$ найдены в работах [9–11]. Когда число r фиксировано, мы пишем просто H. Для доминантного веса $\lambda = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n$ группы G положим

$$S_r(\lambda) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i\omega_i |\ x_i \in \mathbb{N},\ x_i + \ldots + x_j \leq a_i + \ldots + a_{j+n-r},\ 1 \leq i \leq j \leq r \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $p = 0$. *Тогда* $\operatorname{Irr}_{H(r)}\omega \subset S_r(\omega)$ *и* $\operatorname{Irr}_{H(r)}\omega = S_r(\omega)$ *при* $n \geq 2r$.

Предложение 1. *Пусть* $p > 0$. *Тогда*

$$\operatorname{Irr}_{H(r)}\omega \subset \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i\omega_i |\ x_i \in \mathbb{N},\ x_i + \ldots + x_j \leq a_i + \ldots + a_{j+n-r},\ 1 \leq i \leq j \leq r,\ j - i \geq r - 2 \right\}.$$

Определим множества $T_1(r, k, \omega)$ и $T_2(r, k, \omega)$ следующим образом:

$$T_1(r, k, \omega) = \{x_1\omega_1 + m_{k+1}\omega_2 + \ldots + m_{k+r-2}\omega_{r-1} + x_r\omega_r|$$

$$x_i \in \mathbb{N},\ m_k \leq x_1 \leq m_1 + \ldots + m_k,\ m_{k+r-1} \leq x_r \leq m_{k+r-1} + \ldots + m_n\},$$

$$T_2(r, k, \omega) = \{x_1\omega_1 + m_{k+1}\omega_2 + \ldots + x_{r-1}\omega_{r-1} + x_r\omega_r|$$

$$x_i \in \mathbb{N},\ m_k \leq x_1 \leq m_1 + \ldots + m_k,\ m_{k+r-2} \leq x_{r-1} \leq m_{k+r-2} + m_{k+r-1},$$

$$m_{k+r-1} + m_{k+r} \leq x_r \leq m_{k+r-1} + \ldots + m_n,$$

$$m_{k+r-2} + m_{k+r-1} + m_{k+r} \leq x_{r-1} + x_r \leq m_{k+r-2} + \ldots + m_n\}.$$

Предложение 2. *Пусть* $p > 0$. *Тогда* $T_1(r, k, \omega)$ *и* $T_2(r, k, \omega) \subset \operatorname{Irr}_{H(r)}\omega$.

Теорема 2. *Пусть* $p > 0$, $r = 2$, $n > 3$ *и* $m_i + m_{i+1} + m_{i+2} + 2 < p$ *для всех* $i < n - 1$. *Тогда* $\operatorname{Irr}_H\omega = S_2(\omega)$.

Предложение 2, теорема 2 и результаты работы [4], в которой найдены все блоки Жордана любых унипотентных элементов в представлениях групп типа A_2 и A_3 в характеристике 0, могут быть использованы при изучении поведения унипотентных элементов из подгрупп типа A_2 и A_3 в представлениях группы G.

1. Предварительные результаты. К введенным обозначениям добавим следующие: $\mathfrak{X}(G)$, $\mathfrak{X}^+(G)$ и $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — система весов, множество всех доминантных весов и базис системы корней группы G соответственно; $v^+ \in V_\omega$ — ненулевой вектор старшего веса модуля V_ω. Подгруппа группы G, порожденная подгруппами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i$ обозначается как $\langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_i \rangle$. Для корня α группы G, $t \in K$, $k \in \mathbb{N}$, обозначим символами X_α, $\mathcal{X}_\alpha$ и $X_{\alpha,k}$ корневой элемент алгебры Ли группы G и корневую подгруппу группы G, ассоциированные с α, и элемент гипералгебры алгебры Ли группы G, ассоциированный с парой (α, k), соответственно. Для $k < p$ имеем $X_{\alpha,k} = (X_\alpha)^k/k!$. Если $\alpha = \alpha_{\pm i}$, то мы пишем $X_{\pm i}$, $\mathcal{X}_{\pm i}$ и $X_{\pm i,k}$. Положим $G(\beta_1, \ldots, \beta_j) = \langle \mathcal{X}_{\beta_1}, \ldots, \mathcal{X}_{\beta_j}, \mathcal{X}_{-\beta_1}, \ldots, \mathcal{X}_{-\beta_j} \rangle$. Во всех случаях, когда рассматриваются подгруппы этой формы, корни $\beta_1, \ldots, \beta_j$ выбираются таким образом, чтобы они составляли базис системы корней подгруппы $G(\beta_1,\dots,\beta_j)$. В этой ситуации фундаментальные веса подгруппы $G(\beta_1,\dots,\beta_j)$ определяются относительно этого базиса. Положим $G(i_1,\dots,i_j)=G(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_j})$ и $U^+(S)=\langle\mathcal{X}_\alpha|\ \alpha$ — положительные корни $S\rangle$.

Предполагается, что все рассматриваемые модули и представления являются рациональными и конечномерными. Для Γ-модуля V символы $\mathrm{ch}(V)$, $\mathfrak{X}(V)$ и V^μ обозначают формальный характер модуля V, множество всех его весов и весовое подпространство веса μ в модуле V соответственно. Для весового вектора $v\in V$ обозначим его вес относительно подгруппы S символом $\omega_S(v)$. Пусть W_μ — модуль Вейля группы G со старшим весом μ. При $1\le i\le r$ символы ω_i^r обозначают фундаментальные веса подгруппы $H(r)$. Когда из контекста ясно, что речь идет о весах $H(r)$, а не группы G, пишем просто ω_i. Для веса $\mu\in\mathfrak{X}(G)$ символ μ_S обозначает его ограничение на подгруппу $S\subset G$.

Далее $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Если $p>0$ и S — естественно вложенная подгруппа группы G, обозначим через $G_\mathbb{C}$ и $S_\mathbb{C}$ простую односвязную алгебраическую группу над $\mathbb{C}$ того же типа, что и G, и подгруппу в $G_\mathbb{C}$, порожденную корневыми подгруппами для тех же корней, что и S. Отождествим весовые системы групп G и $G_\mathbb{C}$ стандартным образом. Для неприводимого G-модуля V обозначим через $V^\mathbb{C}$ неприводимый $G_\mathbb{C}$-модуль с таким же старшим весом.

Когда поле K зафиксировано, пишем GL_l и SL_l вместо $GL_l(K)$ и $SL_l(K)$. Всюду далее ε_i, $1\le i\le l$, — веса стандартных GL_l и SL_l-модулей. Веса групп GL_l и SL_l иногда записываются в терминах сигнатур. Тогда символ $(a_1,\dots,a_n)$ означает $\sum_{i=1}^l a_i\varepsilon_i$. В этих случаях веса обозначаются латинскими буквами. Если $a=(a_1,\dots,a_{l+1})\in\mathfrak{X}^+(GL_{l+1})$ и $b=(b_1,\dots,b_l)\in\mathfrak{X}^+(GL_l)$, то $b<a$ означает, что $a_1\ge b_1\ge a_2\ge\ldots\ge b_l\ge a_{l+1}$. Заметим, что $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_l=0$ для группы SL_l. Известно, что $\omega_i=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_i$, $i=1,\dots,l$.

Пусть сначала $p=0$. Тогда

$$\mathfrak{X}^+(GL_l)=\{(a_1,\dots,a_l)|\ a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_l,\ a_i\in\mathbb{Z}\}.$$

Хорошо известна следующая теорема (правила ветвления, [2, теорема 9]).

Теорема 3. *Для неприводимого GL_{l+1}-модуля V_a со старшим весом a имеем*

$$V_a|\ GL_l\cong\bigoplus_{b<a}V_b,$$

где суммирование производится по всем $b\in\mathfrak{X}^+(GL_l)$.

Доказательство теоремы 1. При $k\le 0$ и $s>r$ положим $\omega_k^r=0$ и $\omega_s^r=0$. Согласно [15, следствие 2.2.2] для $1\le i\le n$ имеем

$$\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega_i=\{\omega^r_{i-(n-r)},\dots,\omega_i^r\}.$$

Отметим, что $0\in\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega_i^n$ для любого $1\le i\le r$ тогда и только тогда, когда $n\ge 2r$. Из следствия 2.2.1 [15] получаем

$$\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega=m_1\,\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega_1+m_2\,\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega_2+\ldots+m_n\,\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega_n.$$

Значит, для любого $\lambda\in\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega$ справедливо равенство

$$\lambda=\sum_{i=1}^n k^i_{i-(n-r)}\omega^r_{i-(n-r)}+\ldots+k_i^i\omega_i^r=\sum_{t=1}^r(k_t^t+\ldots+k_t^{t+(n-r)})\omega_t^r,$$

где все $k_s^i\in\mathbb{N}$ и $k^i_{i-(n-r)}+\ldots+k_i^i=m_i$ при $1\le i\le n$. Следовательно, для всех $\lambda=\sum_{i=1}^r x_i\omega_i^r\in\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega$ и для всех $1\le i\le j\le r$ имеем

$$x_i+\ldots+x_j=\sum_{t=i}^j k_t^t+\ldots+k_t^{t+(n-r)}. \tag{1}$$

Отсюда получаем $x_i+\ldots+x_j \le m_i+\ldots+m_{j+n-r}$. При $n \ge 2r$ из формулы (1) также следует, что можно подобрать коэффициенты $k_s^i \in \mathbb{N}$ и $k_{i-(n-r)}^i + \ldots + k_i^i = m_i$ таким образом, что любой вес $\lambda = \sum_{i=1}^r x_i\omega_i^r \in \mathfrak{X}^+(H(r))$, для которого $x_i + \ldots + x_j \le m_i + \ldots + m_{j+n-r}$, $1 \le i \le j \le r$, принадлежит $\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $p = 0$, $n \ge 2r$, $\lambda = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r \in \mathrm{Irr}_{H(r)}\omega$ и целые числа b_i выбраны таким образом, что $0 \le b_i \le a_i$ для всех $1 \le i \le r$. Тогда вес*

$$\mu = b_1\omega_1 + \ldots + b_r\omega_r \in \mathrm{Irr}_{H(r)}\omega.$$

Всюду в дальнейшем $p > 0$ и вес $\omega = m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n$ является p-ограниченным.

Доказательство предложения 1. Для $r = 2$ предложение доказано в [12, предложение 1.2]. Пусть $r > 2$ и $\lambda = x_1\omega_1^r + \ldots + x_r\omega_r^r \in \mathrm{Irr}_{H(r)}\omega$. Можем считать, что $H(r) = G(1,\ldots,r)$. Положим $S = G(1,2) \subset H(r) \subset G$. Ограничивая V_λ на S, получаем, что $\mu = (x_1 + \ldots + x_{r-1})\omega_1^2 + x_r\omega_2^2$ и $\nu = x_1\omega_1^2 + (x_2 + \ldots + x_r)\omega_2^2 \in \mathrm{Irr}_S\omega$. Из [12, предложение 1.2] следует, что $x_1 + \ldots + x_{r-1} \le m_1 + \ldots + m_{n-1}$, $x_2 + \ldots + x_r \le m_2 + \ldots + m_n$ и $x_1 + \ldots + x_r \le m_1 + \ldots + m_n$. Предложение доказано.

Пусть $(\cdot,\cdot)$ — инвариантная относительно действия группы Вейля группы Γ невырожденная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{X}(\Gamma)$, $\langle\mu,\alpha\rangle = 2(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ для $\mu \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ и корня α группы Γ. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ положим $\sigma_{\alpha,kp}.\mu = \mu - (\langle\mu+\rho,\alpha\rangle - kp)\alpha$.

Предложение 3 [16, часть II, предложение 8.19]. *Пусть Γ — простая алгебраическая группа над полем характеристики $p > 0$. Для любого веса $\lambda \in \mathfrak{X}^+(\Gamma)$ существует фильтрация Γ-модулей $W_\lambda = W_\lambda^0 \supset W_\lambda^1 \supset W_\lambda^2 \supset \ldots$, такая, что*

$$\sum_{i>0} \mathrm{ch}(W_\lambda^i) = \sum_{\alpha>0} \sum_{0<kp<\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle} \nu_p(kp)\chi(\sigma_{\alpha,kp}.\lambda)$$

и $W_\lambda/W_\lambda^1 \cong V_\lambda$. Здесь $\nu_p(kp)$ — максимальная степень p, которая делит kp.

Теорема 4 [5, 6]. *Пусть $S = G(i_1,\ldots,i_j) \subset G$. Тогда $KSv^+ \subset V_\omega$ является неприводимым S-модулем со старшим весом $\omega_S(v^+)$ и прямым слагаемым S-модуля V_ω.*

Лемма 1 [17, п. 1.5]. *Пусть V — это G-модуль, вектор $v \in V \setminus \{0\}$ и $\lambda = \omega_G(v)$. Предположим, что $\langle\lambda,\alpha\rangle = k < p$ для корня α группы G и что $\mathcal{X}_\alpha$ оставляет v на месте. Тогда $X_{-\alpha,i}v \ne 0$ для $0 \le i \le k$.*

Теорема 5 [8, теорема 6.2]. *Пусть $\Gamma = A_r(K)$ и*

$$\lambda = a_1\omega_{i_1} + \ldots + a_k\omega_{i_k} \in \mathfrak{X}^+(\Gamma), \quad 1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le r,$$

является p-ограниченным весом. Предположим, что $a_1a_k \ne 0$. Ограничение модуля V_λ на каждую подгруппу Леви вполне приводимо тогда и только тогда, когда

$$i_k - i_1 + \sum_{j=1}^k a_j \le p.$$

Определение. Пусть S — естественно вложенная подгруппа группы G. Вектор $v \in V$ называется примитивным относительно S, если v — ненулевой весовой вектор и $U^+(S)$ оставляет v на месте.

Лемма 2 [12]. *Пусть S — естественно вложенная подгруппа группы G, ненулевой вектор $v \in V_\omega$ примитивен относительно S и $\lambda = \omega_S(v)$. Тогда $V_\lambda \in \mathrm{Irr}_S\omega$.*

Предложение 4. *Пусть $n > k > r$, $j_1 = 1$, $2 = j_2 < j_3 < \ldots < j_k = n$, $j_{k+1} = n+1$ и $a_i = m_{j_i} + m_{j_i+1} + \ldots + m_{j_{i+1}-1}$ для $1 \le i \le k$. Предположим, что вес*

$$\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_k\omega_k \in \mathfrak{X}(A_k(K))$$

является p-ограниченным и $\mathrm{Irr}_{H(r)}\lambda = S_r(\lambda)$. Тогда $\mathrm{Irr}_{H(r)}\omega = S_r(\omega)$.

Доказательство. При $1 \le i \le k$ положим

$$\beta_i = \alpha_{j_i} + \alpha_{j_i+1} + \ldots + \alpha_{j_{i+1}-1}, \quad S = G(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k).$$

По лемме 2 $\lambda \in \mathrm{Irr}_S \omega$. Принимая во внимание предложение 1, получаем

$$S_r(\lambda) = \mathrm{Irr}_{H(r)}\lambda \subset \mathrm{Irr}_{H(r)}\omega \subset S_r(\omega).$$

С другой стороны, по построению $S_r(\omega) \subset S_r(\lambda)$. Предложение доказано.

2. Большие факторы.

Доказательство предложения 2.

1. Зафиксируем такое k, что $1 \le k \le n - r + 1$. Предположим, что

$$i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_{k+r}, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$$

и $i_s \le m_s$ для $1 \le s \le n$, $s \ne k,\ k+1,\ \ldots,\ k+r-1$. Положим

$$\lambda = \lambda(i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+r}, \ldots, i_n) =$$

$$= \omega - i_1\alpha_1 + (i_1 + i_2)\alpha_2 - \ldots - (i_1 + \ldots + i_{k-1})\alpha_{k-1} - (i_{k+r} + \ldots + i_n)\alpha_{k+r} - \ldots - i_n\alpha_n. \quad (2)$$

Докажем, что $V_\omega^\lambda \ne \{0\}$. Согласно [18], $\mathfrak{X}(V_\omega) = \mathfrak{X}(V_\omega^{\mathbb{C}})$ для $G = A_n(K)$ и p-ограниченного веса ω. Значит, достаточно доказать, что $(V_\omega^{\mathbb{C}})^\lambda \ne \{0\}$. Согласно [19, гл. VIII, § 7, предложение 10]

$$\mathfrak{X}(V_\omega^{\mathbb{C}}) = m_1\mathfrak{X}(V_{\omega_1}^{\mathbb{C}}) + \ldots + m_n\mathfrak{X}(V_{\omega_n}^{\mathbb{C}}). \quad (3)$$

Поэтому будем анализировать системы весов фундаментальных представлений, принимая во внимание замкнутость множества весов модуля относительно действия группы Вейля группы G.

Из рассуждений [9, пункт (a) следствия III.2] следует, что $\omega_l \in \mathfrak{X}(V_{\omega_l}^{\mathbb{C}})$ для любого $1 \le l \le n$, $\omega_l - \alpha_{k+r} - \ldots - \alpha_l \in \mathfrak{X}(V_{\omega_l}^{\mathbb{C}})$ для $k+r \le l \le n$ и $\omega_l - \alpha_l - \ldots - \alpha_{k-1} \in \mathfrak{X}(V_{\omega_l}^{\mathbb{C}})$ для $1 \le l \le k-1$. Принимая во внимание формулу (3), приходим к выводу, что $(V_\omega^{\mathbb{C}})^\lambda \ne \{0\}$. Значит, $V_\omega^\lambda \ne \{0\}$. Очевидно, что группы $\mathcal{X}_l$, $k \le l \le k+r-1$, оставляют на месте все векторы из V_ω^λ. Положим $H(r) = G(k, k+1, \ldots, k+r-1)$. Ненулевой вектор $v_\lambda \in V_\omega^\lambda$ порождает неразложимый $H(r)$-модуль со старшим весом $\omega_{H(r)}(v_\lambda)$. Положим $i = i_1 + \ldots + i_{k-1}$, $j = i_{k+r} + \ldots + i_n$ и

$$\mu(i,j) = (m_k + i)\omega_1 + m_{k+1}\omega_2 + \ldots + m_{k+r-2}\omega_{r-1} + (m_{k+r-1} + j)\omega_r \in \mathfrak{X}(H(r)).$$

Очевидно, что $\omega_{H(r)}(v_\lambda) = \mu(i,j)$. По лемме 2 $\mu(i,j) \in \mathrm{Irr}_{H(r)}\omega$. Значит $T_1(r,k,\omega) \subset \mathrm{Irr}_{H(r)}\omega$.

2. Предположим, что $k \le n - r$. Пусть вес λ такой, как в формуле (2) при $i_{k+r} = m_{k+r}$. Зафиксируем ненулевой вектор $u \in V_\omega^\lambda$. Положим $\alpha = \alpha_{k+r-1} + \alpha_{k+r}$, $A = G(\alpha)$. Очевидно, что подгруппа $\mathcal{X}_\alpha$ оставляет вектор u на месте. Имеем

$$\omega_A(u) = \langle \lambda, \alpha \rangle = m_{k+r-1} + i_{k+r} + \ldots + i_n + m_{k+r} - 2(i_{k+r} + \ldots + i_n) + i_{k+r+1} + \ldots + i_n =$$

$$= m_{k+r-1} + m_{k+r} - i_{k+r} = m_{k+r-1}.$$

Поскольку $\langle \lambda - \alpha_{k+r}, \alpha_{k+r} \rangle = -(m_{k+r} + i_{k+r+1} + \ldots + i_n + 2)$, вес $\lambda - \alpha_{k+r} \notin \mathfrak{X}(V_\omega)$. Следовательно, $X_{-(k+r)}u = 0$. Положим $w = X_{-\alpha,s}u$ для $1 \le s \le m_{k+r-1}$. Тогда $w \ne 0$ по лемме 1, поскольку $s \le m_{k+r-1} < p$. Очевидно, что группы $\mathcal{X}_k, \ldots, \mathcal{X}_{k+r-2}$ оставляют w на месте. Справедливо равенство

$$X_{k+r-1}w = X_{k+r-1}X_{-\alpha,s}u = c_1X_{-\alpha}X_{k+r-1}X_{-\alpha,s-1}u + c_2X_{-(k+r)}X_{-\alpha,s-1}u,$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы. Так как $X_{-(k+r)}$ и $X_{-\alpha}$ коммутируют, то второе слагаемое равно 0. Используя индукцию по s, получаем $X_{k+r-1}w = cX_{-\alpha,r}X_{k+r-1}u = 0$ (c — константа). Очевидно, что $X_{k+1,t}w = 0$ для $t > m_{k+r-1}$ и, следовательно, для $t \geq p$. Поэтому группа $\mathcal{X}_{k+r-1}$ оставляет w на месте. Определим i и j, как в п. 1. Положим $H(r) = G(k, \dots, k+r-1)$ и

$$\nu(i,j,s) = (m_k + i)\omega_1 + \ldots + m_{k+r-3}\omega_{r-2} + (m_{k+r-2} + s)\omega_{r-1} + (m_{k+r-1} - s + j)\omega_r \in \mathfrak{X}(H(r)),$$

где $0 \leq i \leq m_1 + m_2 + \ldots + m_{k-1}$ и $m_{k+r} \leq j \leq m_{k+r} + \ldots + m_n$. Легко видеть, что $\omega_{H(r)}(w) = \nu(i,j,s)$. Следовательно, вектор w порождает неразложимый $H(r)$-модуль со старшим весом $\nu(i,j,s)$ и, по лемме 2, $\nu(i,j,s) \in \mathrm{Irr}_{H(r)}\omega$. Значит $T_2(r,k,\omega) \subset \mathrm{Irr}_{H(r)}\omega$, что завершает доказательство предложения.

3. Представления с локально малыми старшими весами.

Предложение 5. *Пусть $p > 0$, $r = 2$, $n > 3$ и $m_i + m_{i+1} + m_{i+2} + 2 < p$ для всех $i < n-1$. Тогда для любого $\lambda \in S_2(\omega)$ в модуле V_ω существует примитивный относительно $H = H(2)$ вектор веса λ.*

Доказательство. Проведем его с помощью индукции по n. Пусть $n = 4$. Положим

$$S_1 = G(1,2,3), \quad H = G(2,3), \quad M_1 = KS_1v^+, \quad \mu = \omega_{S_1}(v^+) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3,$$

$$S_2 = G(2,3,4), \quad M_2 = KS_2v^+$$

и

$$\nu = \omega_{S_2}(v^+) = m_2\omega_1 + m_3\omega_2 + m_4\omega_3.$$

Согласно теореме 4, $M_1 \cong V_\mu$ как S_1-модуль и $M_2 \cong V_\nu$ как S_2-модуль. Поскольку

$$m_1 + m_2 + m_3 + 2 < p,$$

ограничение $M_1|H$ вполне приводимо по теореме 5 и

$$\mathrm{Irr}_H\mu_1 = \{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 |\ x_i \in \mathbb{N},\ x_1 \leq m_1 + m_2,\ x_2 \leq m_2 + m_3,\ m_2 \leq x_1 + x_2 \leq m_1 + m_2 + m_3\}$$

согласно [12, теорема 1.3]. Значит для $0 \leq r \leq m_1$, $0 \leq s \leq m_2$ и весов

$$\lambda(r) = r\omega_1 + (m_2 + m_3)\omega_2,$$

$$\nu(s) = (m_1 + s)\omega_1 + (m_2 + m_3 - s)\omega_2 \in \mathrm{Irr}_H\mu_1$$

существуют примитивные относительно H векторы v_r, $w_s \in M_1$, порождающие неприводимые H-модули со старшими весами $\lambda(r)$ и $\nu(s)$ соответственно. Положим $v(r,a) = X_{-n,a}v_r$ и $w(s,a) = X_{-n,a}w_s$, где $0 \leq a \leq m_4$. Из [7, лемма 2.9] следует, что векторы $v(r,a)$ и $w(r,a)$ ненулевые и группа $U^+(H)$ оставляет их на месте. Рассматривая веса этих векторов относительно H, получаем, что для любого $\lambda \in T_1$ в модуле V_ω существует примитивный относительно H вектор веса λ, причем

$$T_1 = \{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 |\ x_i \in \mathbb{N},\ x_1 \leq m_1 + m_2,\ x_2 \leq m_2 + m_3 + m_4,\ m_2 \leq x_1 + x_2 \leq m_1 + \ldots + m_4\}.$$

Применяя аналогичные рассуждения к модулю M_2 и подгруппе H, получаем, что для любого $\lambda \in T_2$ существует примитивный относительно H вектор веса λ, где

$$T_2 = \{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 |\ x_i \in \mathbb{N},\ x_1 \leq m_1 + m_2 + m_3,\ x_2 \leq m_3 + m_4,\ m_3 \leq x_1 + x_2 \leq m_1 + \ldots + m_4\}.$$

Заметим, что

$$T_1 \cup T_2 = \{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 |\ x_i \in \mathbb{N},\ x_1 \leq m_1 + m_2 + m_3,\ x_2 \leq m_2 + m_3 + m_4,$$

$$\min(m_2, m_3) \leq x_1 + x_2 \leq m_1 + \ldots + m_4\}.$$

Остается найти примитивные векторы с малыми старшими весами. Без ограничения общности мы можем считать, что $m_2 \leq m_3$. Напомним, что $\nu = m_2\omega_1 + m_3\omega_2 + m_4\omega_3 \in \mathfrak{X}(S_2)$ и $KS_2v^+ \cong V_\nu$ (как S_2-модуль). Поскольку $m_2 + m_3 + m_4 + 2 < p$, из предложения 3 следует, что $W_\nu = V_\nu$. Продолжим модуль $V_\nu^{\mathbb{C}}$ до $GL_4(\mathbb{C})$-модуля M со старшим весом $(m_2 + m_3 + m_4, m_3 + m_4, m_4, 0)$. Отметим, что неприводимые компоненты из $V_\nu^{\mathbb{C}}|H^{\mathbb{C}}$ являются ограничениями на $H^{\mathbb{C}}$ таких компонент из $M|GL_3(\mathbb{C})$. Согласно теореме 3

$$M|GL_3(\mathbb{C}) \cong \bigoplus_b V_b,$$

где суммирование производится по всем тройкам $b = (b_1, b_2, b_3)$, для которых

$$m_2 + m_3 + m_4 \geq b_1 \geq m_3 + m_4 \geq b_2 \geq m_4 \geq b_3 \geq 0. \tag{4}$$

Из рассуждений выше следует, что $\mathrm{ch}(V_\nu|H) = \mathrm{ch}(V_\nu^{\mathbb{C}}|H^{\mathbb{C}})$ и $V_\eta \in \mathrm{Irr}(V_\nu|H)$, если $V_\eta^{\mathbb{C}} \in \mathrm{Irr}(V_\nu^{\mathbb{C}}|H^{\mathbb{C}})$. Действительно, если $\eta = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \mathfrak{X}(H)$ и $V_\eta^{\mathbb{C}} \in \mathrm{Irr}(V_\nu^{\mathbb{C}}|H^{\mathbb{C}})$, то $a_1 + a_2 \leq m_2 + m_3 + m_4$. Теперь из предложения 3 вытекает, что $V_\eta \cong W_\eta$. Значит $\mathrm{ch}(V_\nu|H) = \mathrm{ch}(V_\nu^{\mathbb{C}}|H^{\mathbb{C}})$ и кратности композиционных факторов в ограничениях совпадают.

Зафиксируем в формуле (4) вес b, для которого $b_1 = m_3 + m_4$, $b_2 = m_3 + m_4$, $b_3 = m_4$. Мы хотим найти такой однозначно определенный вес $\tau \in \mathfrak{X}(M)$, что $(\tau)_{GL_3(\mathbb{C})} = b$. Поскольку $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ и $\xi = a - \sum_{i=2}^4 x_i\alpha_i$ для каждого веса $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, приходим к заключению, что

$$\xi = (c_1, c_2, c_3, c_4) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^4 c_i = m_2 + 2m_3 + 3m_4.$$

Вес $\tau = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, где $t_1 = m_3 + m_4$, $t_2 = m_3 + m_4$ и $t_3 = m_4$. Следовательно, $t_4 = m_2$ и $\tau = a - m_2(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$. По теореме 5 $V_\nu|H$ — вполне приводимый модуль. Из рассуждений выше следует, что если $(V_\nu^{\mathbb{C}})^\mu$ содержит ненулевой примитивный относительно $H^{\mathbb{C}}$ вектор, то V_ν^μ содержит такой вектор для H. Положим $\lambda = \tau_{S_2}$. Теперь можем сделать вывод, что KS_2v^+ содержит ненулевой примитивный относительно H вектор u веса λ. Очевидно, что группа $U^+(S_1)$ оставляет u на месте. Положим $\lambda^1 = \tau_{S_1}$. Ясно, что u порождает неразложимый S_1-модуль со старшим весом λ^1 и $\mathrm{Irr}_H\lambda^1 \subset \mathrm{Irr}_H\omega$. Поскольку $\lambda^1 = (m_1 + m_2)\omega_1 + m_3\omega_3$, то, используя теорему 5 и теорему 1.3 из [12], получаем примитивные векторы со старшими весами из множества

$$T_3 = \{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 |\ x_i \in \mathbb{N},\ x_1 \leq m_1 + m_2,\ x_2 \leq m_3,\ x_1 + x_2 \leq m_1 + m_2 + m_3\}.$$

Таким образом, предложение доказано для $n = 4$.

Пусть $n \geq 5$. В этом случае

$$S_1 = G(1, \ldots, n-1), \quad H = G(n-2, n-1), \quad M_1 = KS_1v^+,$$

$$\mu_1 = \omega_{S_1}(v^+) = m_1\omega_1 + \ldots + m_{n-1}\omega_{n-1},$$

$$S_2 = G(2, \ldots, n), \quad H_2 = G(2, 3), \quad M_2 = KS_2v^+, \quad \mu_2 = \omega_{S_2}(v^+) = m_2\omega_1 + \ldots + m_n\omega_{n-1}.$$

Согласно теореме 4, $M_i \cong V_{\mu_i}$ как S_i-модуль ($i=1$ или $i=2$). По предположению индукции для $0 \le r \le m_1$, $0 \le s \le m_2+\ldots+m_{n-2}$ и весов

$$\lambda(r) = r\omega_1 + (m_2+\ldots+m_{n-1})\omega_2, \quad \nu(s) = (m_1+s)\omega_1 + (m_2+\ldots+m_{n-1}-s)\omega_2 \in \mathrm{Irr}_H \mu_1$$

существуют примитивные относительно H векторы v_r, $w_s \in M_1$, порождающие неприводимые H-модули со старшими весами $\lambda(r)$ и $\nu(s)$ соответственно. Положим

$$v(r,a) = X_{-n,a}v_r \quad \text{и} \quad w(s,a) = X_{-n,a}w_s,$$

где $0 \le a \le m_n$. По [7, лемма 2.9] векторы $v(r,a)$ и $w(r,a)$ ненулевые и группа $U^+(H)$ оставляет их на месте. Рассматривая веса этих векторов относительно H и принимая во внимание, что для любого $\lambda \in S_2(\mu_1)$ в модуле V_ω существует примитивный относительно $H = H(2)$ вектор веса λ, получаем, что для любого $\lambda \in T_1$ существует примитивный относительно H вектор веса λ, где

$$T_1 = \{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 |\ x_i \in \mathbb{N},\ x_1 \le m_1+\ldots+m_{n-2},\ x_2 \le m_2+\ldots+m_n,\ x_1+x_2 \le m_1+\ldots+m_n\}.$$

Применяя аналогичные рассуждения к модулю M_2 и подгруппе $H_2 \cong H$, получаем, что что для любого $\lambda \in T_2$ существует примитивный относительно H вектор веса λ, где

$$T_2 = \{x_1\omega_1 + x_2\omega_2 |\ x_i \in \mathbb{N},\ x_1 \le m_1+\ldots+m_{n-1},\ x_2 \le m_3+\ldots+m_n,\ x_1+x_2 \le m_1+\ldots+m_n\}.$$

Остается заметить, что $S_2(\omega) = T_1 \cup T_2$. Предложение доказано.

Теорема 2 является следствием предложения 5.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф05М-011).

Литература

1. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
2. *Желобенко Д.П.* Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений // УМН. 1962. Т. 17. № 1. С. 27–120.
3. *Железная Т.М.* Об ограничениях неприводимых представлений алгебраических групп типа A_n в характеристике 0 на подгруппы типа $A_1 \times A_1$ // Труды Института математики. 2007. Т. 15. № 1. С. 56–67.
4. *Osinovskaya A.A.* Nilpotent elements in irreducible representations of simple Lie algebras of small rank. Minsk, 1999. (Preprint / Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus; № 5 (554)).
5. *Smith S.* Irreducible modules and parabolic subgroups // J. Algebra. 1982. V. 75. P. 286–289.
6. *Jantzen J.C.* Darstellungen halbeinfacher algebraicher Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen // Bonner math. Schr. 1973. V. 67.
7. *Suprunenko I.D.* On Jordan blocks of elements of order p in irreducible representations of classical groups with p-large highest weights // J. Algebra. 1997. V. 191. P. 589–627.
8. *Brundan J., Kleshchev A., Suprunenko I.* Semisimple restrictions from $GL(n)$ to $GL(n-1)$ // J. reine angew. Math. 1998. V. 500. P. 83–112.
9. *Osinovskaya A.A.* Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups // Communications in Algebra. 2003. V. 31. P. 2357–2379.
10. *Osinovskaya A.A.* Restrictions of representations of algebraic groups of types E_n and F_4 to naturally embedded A_1-subgroups and the behavior of root elements // Communications in Algebra. 2005. V. 33. P. 213–220.
11. *Осиновская А.А.* Ограничения представлений симплектической группы на подгруппы типа A_n // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49. №1. С. 24–26.

12. *Osinovskaya A.A.* On the restrictions of modular irreducible representations of algebraic groups of type A_n to naturally embedded A_2-subgroups // J. of Group Theory. 2005. V. 8. P. 43–92.
13. *Osinovskaya A.A.* The restrictions of representations of algebraic groups of types B_n and D_n to subgroups of type A_2 // J. of Algebra and its Applications. 2005. V. 4. P. 467–479.
14. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
15. *Жилинский А.Г.* Когерентные системы представлений индуктивных семейств простых комплексных алгебр Ли. Минск, 1990. (Препринт / Ин-т математики АН БССР, № 38 (438)).
16. *Jantzen J.C.* Representations of Algebraic Groups. Orlando: Academic Press, 1987.
17. *Seitz G.M.* The maximal subgroups of classical algebraic groups // Memoirs of the AMS. 1987. V. 365. P. 1–286.
18. *Супруненко И.Д.* Сохранение систем весов неприводимых представлений алгебраической группы и алгебры Ли типа A_l с ограниченными старшими весами при редукции по модулю p // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1983. № 2. С. 18–22.
19. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978.

A. A. Osinovskaya

On the restrictions of modular representations of the group $SL_{n+1}(K)$ to subgroups $SL_{r+1}(K)$ with $r < n$

Summary

Restrictions of irreducible p-restricted representations of the algebraic group $SL_{n+1}(K)$ to naturally embedded subgroups $SL_{r+1}(K)$ with $r < n$ are studied. Let $n > 2$ and $\omega = \sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i$ be the highest weight of a representation considered. The composition factors of such restrictions are determined in the case where $r = 2$ and $m_i + m_{i+1} + m_{i+2} + 2 < p$ for all $i < n - 1$. For restrictions of arbitrary representations some classes of big composition factors are found as well.