K. Zh. Kudaibergenov, On the independence property,
Sibirsk. Mat. Zh., 2000, Volume 41, Number 1, 134–135

https://www.mathnet.ru/eng/smj1503

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 510.67

О СВОЙСТВЕ НЕЗАВИСИМОСТИ

К. Ж. Кудайбергенов

Аннотация: Дано простое прямое доказательство теоремы Шелаха о формулах, имеющих свойство независимости. Библиогр. 2.

В книге [1] Шелах доказал следующую теорему.

Теорема. *Если в теории T есть формула $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ со свойством независимости, то в T есть такая формула с $\bar{x}$ длины 1.*

Он использовал в доказательстве некоторые результаты о непротиворечивости в теории множеств. Ласковски [2] нашел чисто комбинаторное доказательство этой теоремы, которое все же довольно сложно.

В данной заметке будет дано простое прямое доказательство теоремы Шелаха.

Напомним, что формула $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ имеет *свойство независимости*, если для каждого $n < \omega$ существуют кортежи $\bar{a}_i$, $i < n$, такие, что для любого $s \subseteq n$ совместно множество

$$\{\varphi(\bar{x};\bar{a}_i) : i \in s\} \cup \{\neg\varphi(\bar{x};\bar{a}_i) : i \in s - n\}.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *формула $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ имеет свойство независимости;*

(2) *для любого бесконечного кардинала λ существуют неразличимая последовательность $\{\bar{a}_i : i < \lambda\}$ и кортеж $\bar{b}$ такие, что $\models \varphi(\bar{b};\bar{a}_{2i}) \wedge \neg\varphi(\bar{b};\bar{a}_{2i+1})$ для любого $i < \lambda$;*

(3) *то же самое, что (2), для некоторого бесконечного λ.*

Доказательство. (1)⇒(2). Стандартное применение теоремы компактности и теоремы Рамсея.

(2)⇒(3). Очевидно.

(3)⇒(1). Следует из определения неразличимой последовательности. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Индукция по длине кортежа $\bar{x}$. Пусть $\bar{x} = \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle$. Докажем, что свойство независимости имеет либо $\varphi(\bar{x}_0;\bar{x}_1,\bar{y})$, либо некоторая формула $\psi(\bar{x}_1;\bar{y}')$.

Так как $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ имеет свойство независимости, то по лемме для $\lambda = |T|^+$ существуют $\{\bar{a}_i : i < \lambda\}$ и $\bar{b}$, как в лемме. Пусть $\bar{b} = \langle \bar{b}_0, \bar{b}_1 \rangle$, где $\bar{b}_0$ имеет ту же длину, что и $\bar{x}_0$, и пусть $\{\alpha_i : i < \lambda\}$ — возрастающая последовательность предельных ординалов, меньших чем λ. Допустим, что $\varphi(\bar{x}_0;\bar{x}_1,\bar{y})$ не имеет свойства независимости. Тогда по лемме $\{\langle \bar{b}_1, \bar{a}_j \rangle : \alpha_i < j < \alpha_{i+1}\}$, $i < \lambda$, не является неразличимой последовательностью. Следовательно, для каждого

$i < \lambda$ существуют формула $\psi_i(\bar{x}_1, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{n_i})$ и ординалы $\alpha_i < j(i,0) < \cdots < j(i,n_i) < \alpha_{i+1}$ и $\alpha_i < k(i,0) < \cdots < k(i,n_i) < \alpha_{i+1}$ такие, что

$$\models \psi_i(\bar{b}_1, \bar{a}_{j(i,0)}, \ldots, \bar{a}_{j(i,n_i)}) \wedge \neg\psi_i(\bar{b}_1, \bar{a}_{k(i,0)}, \ldots, \bar{a}_{k(i,n_i)}).$$

Поскольку существует не более чем $|T|$ различных формул ψ_i, то существуют бесконечное $s \subseteq \lambda$ и формула $\psi(\bar{x}_1, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n)$ такие, что $n_i = n$ и $\psi_i = \psi$ для всех $i \in s$. Без ограничения общности можно считать, что $s = \omega$. Для $i < \omega$ пусть

$$\bar{c}_{2i} = \langle \bar{a}_{j(2i,0)}, \ldots, \bar{a}_{j(2i,n)} \rangle, \ \bar{c}_{2i+1} = \langle \bar{a}_{k(2i+1,0)}, \ldots, \bar{a}_{k(2i+1,n)} \rangle.$$

Таким образом, $\models \psi(\bar{b}_1; \bar{c}_{2i}) \wedge \neg\psi(\bar{b}_1; \bar{c}_{2i+1})$ для любого $i < \omega$. Так как $\{\bar{a}_i : i < \lambda\}$ — неразличимая последовательность, то и $\{\bar{c}_i : i < \omega\}$ — неразличимая последовательность. Тогда по лемме формула $\psi(\bar{x}_1; \bar{y}')$, где $\bar{y}' = \langle \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n \rangle$, имеет свойство независимости. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shelah S.* Classification Theory. Amsterdam: North-Holland, 1978.
2. *Laskowski C.* Vapnik — Chervonenkis classes of definable sets // J. London Math. Soc. 1992. V. 245. P. 377–384.

Статья поступила 2 февраля 1998 г.

г. Алматы