



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Нерсесян, Лагранжева модель безмассовой частицы на пространственно-подобных кривых, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 2, 179–195

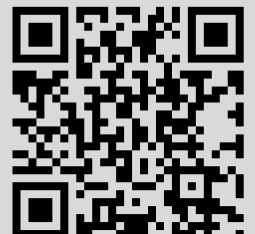
DOI: 10.4213/tmf423

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

5 декабря 2024 г., 03:24:58



## ЛАГРАНЖЕВА МОДЕЛЬ БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ НА ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНЫХ КРИВЫХ

Рассмотрена модель  $D$ -мерной безмассовой частицы, описываемая лагранжианом, пропорциональным  $N$ -й внешней кривизне мировой линии. Дана гамильтонова формулировка системы, показано, что ее траекториями являются пространственноподобные кривые, удовлетворяющие условиям  $k_{N+a} = k_{N-a}$ ,  $k_{2N} = 0$ ,  $a = 1, \dots, N-1$ , где  $N \leq [(D-2)/2]$ . Первые  $N$  кривизн принимают произвольные значения, так что система имеет  $N+1$  калибровочных степеней свободы; соответствующая калибровочная симметрия образует алгебру  $W$ -типа. Такая модель описывает  $D$ -мерные безмассовые частицы с  $N$  совпадающими значениями характеристических чисел матрицы спиральности и  $[(D-2)/2] - N$  нулевыми значениями остальных спиральностей. Показано, что рассмотренная модель допускает формулировку на пространствах постоянной ненулевой кривизны. Она является единственной системой с лагранжианом, зависящим от внешних кривизн мировой линии, которая порождает неприводимые представления группы Пуанкаре.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, лагранжево описание спиновых частиц требует введения дополнительных степеней свободы. Как правило, это достигается расширением исходного пространства грассмановыми переменными, что составляет основу “псевдоклассического” подхода Березина–Маринова [1] и генетически связанного с ним подхода, основанного на введении суперсимметрий [2], [3] (ссылки на более поздние работы можно найти в [4], [5]). Можно также расширить пространство коммутирующими переменными, что, по существу, является лагранжевой формулировкой подхода Сурье к гамильтонову описанию спиновых частиц и связано с так называемым методом орбит Кириллова–Костанта–Сурье [6]. Фактически он приводит к замене исходного пространства-времени  $M^{1,D-1}$  прямым произведением  $M^{1,D-1} \times K$ , где  $K$  есть коорбита группы Пуанкаре (наиболее полно этот подход описан в работах [7]). Заметим, что отмеченные выше подходы не являются удовлетворительными с точки зрения интуитивного восприятия спиновых

---

\*Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Дубна, Московская обл., Россия; Ереванский государственный университет, Ереван, Армения. E-mail: nerses@thsun1.jinr.ru

частиц: в обоих описаниях спин выступает как величина, не зависящая от исходного пространства-времени.

Альтернативой указанным подходам может быть введение дополнительных степеней свободы посредством высших производных исходных пространственно-временных координат. В этом случае для соблюдения репараметризационной и пуанкаре-инвариантности действие должно иметь вид

$$S = \int \mathcal{L}(k_1, \dots, k_N) ds, \quad (1.1)$$

где  $k_I$  обозначают репараметризационные инварианты (внешние кривизны) мировой линии системы ( $0 < I \leq D - 1$ ), а  $ds$  – ее натуральный параметр:

$$ds = \begin{cases} |d\mathbf{x}| & \text{для неизотропных кривых,} \\ |d^2\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}} & \text{для изотропных кривых.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Интерес к системам на неизотропных кривых возник в конце восьмидесятых годов благодаря работам Полякова [8] по жестким струнам и  $(2 + 1)$ -мерным теориям поля с членом Черна–Саймонса. Особый интерес представляют системы массивных частиц, в которых члены с высшими производными могут рассматриваться как квантовые поправки к исходному действию свободной частицы. Наиболее полно системы на неизотропных кривых, зависящие от первой и второй кривизн мировой линии, были исследованы в работах Плющая (см. работы [9], [10] и ссылки в них). Прежде всего, следует отметить его работы по массивным  $(2 + 1)$ -мерным частицам с лагранжианом, линейно зависящим от второй кривизны: эта система, полученная первоначально в работе Полякова, явилась первой и наиболее удачной лагранжевой моделью релятивистского аниона, причем ее спектр удовлетворял условию Майораны [9].

Наиболее красивой системой такого рода является модель четырехмерной безмассовой частицы (называемая далее моделью Плющая), описываемая действием

$$S = c \int k_1 ds, \quad (ds)^2 = (d\mathbf{x})^2 \neq 0, \quad k_1^2 = \left( \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right)^2. \quad (1.3)$$

Эта система, как оказалось, описывает безмассовые частицы спиральности  $c$ , принимающей после квантования произвольное целое значение. Ее ковариантное квантование, основанное на твисторной технике, позволило получить также состояния произвольной полупелой спиральности [11]. Несмотря на то что модель Плющая не допускает формулировки в произвольном гравитационном фоне [12], ее можно непротиворечиво сформулировать на пространстве анти-де Ситтера [13]. Более того, она обладает калибровочной  $W_3$ -симметрией [14], а ее классическими траекториями являются пространственно-подобные плоские кривые с произвольной первой кривизной.

Вопрос о том, как обобщить модель Плющая на пространства высших размерностей, не столь тривиален, как может показаться на первый взгляд. Дело в том, что аналогом спиральности при  $D > 5$  являются веса малой группы Лоренца  $SO(D - 2)$  и частицы имеют не одну, а  $N_0 = [(D - 2)/2]$  спиральностей. Поэтому квантово-механически

безмассовые частицы описываются неприводимыми представлениями группы Пуанкаре, соответствующими диаграммам Юнга с  $N_0$  строками длиной  $m_i$ , где  $m_i$  являются весами  $SO(D-2)$ . Максимальная размерность фазового пространства безмассовой частицы с фиксированными спиральностями определяется выражением [15]

$$\mathcal{D}_{\text{massless}}^{\max} = 2(D-1) + D_{\text{helic}}^{\max}, \quad D_{\text{helic}}^{\max} = \begin{cases} \frac{(D-2)(D-4)}{2} & \text{для четных } D, \\ \frac{(D-3)^2}{2} & \text{для нечетных } D. \end{cases} \quad (1.4)$$

Таким образом, при  $D = 4$  модель Плющая описывает все неприводимые безмассовые представления группы Пуанкаре, причем эти представления конформно-инвариантны. Для получения аналогичных представлений из суперсимметричной модели требуется введение  $\mathcal{N} = 2s$  локальных суперсимметрий [3]. При  $D \geq 6$  модель Плющая порождает лишь неприводимые представления, отвечающие однострочным диаграммам Юнга длиной  $s$ , в то время как суперсимметричная модель порождает представления, описываемые прямоугольными диаграммами Юнга с  $N_0$  строками длины  $s$ , где  $s$  обозначает спиральность частицы [16].

Заметим, что неприводимые безмассовые представления группы Пуанкаре конформно-инвариантны только при  $m_1 = m_2 = \dots = m_{N_0} \equiv m$ , где  $m = 0, 1/2$  при нечетном  $D$  и любое (полу)целое число, если  $D$  четно [17]. Таким образом, при  $D \geq 6$  модель Плющая, в отличие от суперсимметричной модели, не обладает конформной инвариантностью. В поисках подходящего кандидата для описания безмассовых частиц мы должны провести общий анализ систем с действием (1.1) с целью нахождения лагранжианов, порождающих неприводимые представления. В работе [18] была разработана удобная для исследования систем типа (1.1) гамильтонова формулировка, позволяющая записывать их в терминах гамильтоновой системы с  $(2D - N)(N + 1)$ -мерным фазовым пространством и  $\text{rank}(\partial^2 \mathcal{L} / \partial k_i \partial k_j)$  первичными связями. Причем, как оказалось, все системы такого вида с нелинейными по кривизнам лагранжианами, а также с лагранжианами, отвечающими частицам с ненулевой массой, порождают приводимые представления. Таким образом, для поиска  $D$ -мерных обобщений модели Плющая, сформулированных на неизотропных кривых, достаточно исследовать действия вида

$$\mathcal{S} = \sum_{I=1}^N c_I \int k_I ds, \quad (ds)^2 = (d\mathbf{x})^2 \neq 0, \quad (1.5)$$

где  $k_I$  являются внешними кривизнами мировой линии (результаты предварительного классического анализа таких систем можно найти в [19]).

Конечно, остаются еще экзотические модели, сформулированные на изотропных кривых. Однако, проведя анализ, аналогичный проделанному в работе [18], можно увидеть, что, во-первых, и в этом случае максимальным числом первичных связей обладают линейные лагранжианы, а во-вторых, системы с линейными лагранжианами отвечают массивным частицам, описываемым приводимыми представлениями [20].

Итак, с целью нахождения обобщений модели Плющая для пространств высших размерностей мы провели анализ систем с действием (1.5), а также рассмотрели возможность их формулировки на нетривиальном гравитационном фоне.

В разделе 2 построена первичная гамильтонова система, отвечающая модели (1.5), и проведен анализ процедуры построения вторичных связей и уравнений движения системы. В частности, показано, что:

1. Системы с действием (1.5) имеют нетривиальные решения лишь при  $N \leq N_0 = [(D-2)/2]$  и описывают безмассовые частицы с  $N$  ненулевыми и  $N_0 - N$  нулевыми спиральностями.

2. Классические решения системы (1.5) описываются пространственноподобными кривыми с нулевой  $2N$ -й кривизной. Первые  $2N$  элементов ее подвижного репера пространственноподобны, а  $(2N+1)$ -й элемент является изотропным вектором, отвечающим импульсу системы.

3. Единственная система типа (1.5), порождающая только неприводимые представления, описывается действием

$$\mathcal{S} = c \int k_N ds, \quad (ds)^2 = (dx)^2 \neq 0. \quad (1.6)$$

В разделе 3 исследованы классические и квантовые свойства модели (1.6) и возможность ее формулировки на нетривиальном гравитационном фоне. Показано, что:

1. Модель (1.6) описывает безмассовые частицы со спиральностями  $m_1 = m_2 = \dots = m_N = c$ ,  $m_{N_0-N} = m_{N_0-N+1} = \dots = m_{N_0} = 0$ , так что квантово-механически они соответствуют неприводимым представлениям группы Пуанкаре с прямоугольными диаграммами Юнга размерности  $N \times c$ , где  $c$  принимает произвольное целое значение. Таким образом, при четном  $D$  и  $N = N_0$  решения конформно-инвариантны.

2. Классическими траекториями модели являются пространственноподобные кривые, удовлетворяющие условиям  $k_{N+i} = k_{N-i}$ , где  $i = 1, \dots, N$ ,  $k_0 \equiv 0$ . В то же время значения первых  $N$  кривизн произвольны, что является геометрической иллюстрацией наличия в системе  $N+1$  калибровочных симметрий. Приведены косвенные аргументы в пользу того, что они образуют калибровочную  $W_{N+2}$ -алгебру.

3. Системы с действием (1.5) непротиворечиво формулируются на пространствах постоянной ненулевой кривизны, так что модель (1.6) допускает формулировку на пространствах анти-де Ситтера.

В разделе 4 обсуждаются полученные результаты и нерешенные проблемы.

Мы пользуемся обозначениями

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}: \quad \mathbf{a} \equiv a^A, \quad \mathbf{b} \equiv b^A, \quad \mathbf{ab} = \sum_{A=1}^D a^A b_A, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a},$$

а также полагаем, что индексы  $i, j$  принимают значения  $1, \dots, N$ .

## 2. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ И ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Репараметризационные инварианты (внешние кривизны)  $k_1, \dots, k_{D-1}$  кривых в евклидовом пространстве естественным образом определяются в терминах формул Френе для подвижного репера  $\{\mathbf{e}_I\}$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{s}\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_I = \tilde{s}k_I\mathbf{e}_{I+1} - \tilde{s}k_{I-1}\mathbf{e}_{I-1}, \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{e}_I\mathbf{e}_J = \delta_{IJ}, \quad I, J = 1, \dots, D; \quad \tilde{s} = |\dot{\mathbf{x}}|, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{D+1} \equiv 0.$$

Нетрудно проверить, что элементы базиса Френе можно выразить через пространственные координаты следующим образом:

$$\mathbf{e}_I = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{g}_{I-1} \det \hat{g}_I}} \begin{vmatrix} g_{1.1} & \dots & g_{1.I} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{I-1.1} & \dots & g_{I-1.I} \\ \dot{\mathbf{x}} & \dots & \mathbf{x}_{(I)} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $\det \hat{g}_I = \det \hat{g}_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, \dots, I$ ,  $\hat{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{(\alpha)}\mathbf{x}_{(\beta)}$ ,  $\mathbf{x}_{(\alpha)} \equiv d^\alpha \mathbf{x} / d\tau^\alpha$ . Отсюда легко получить явные выражения для внешних кривизн:

$$k_I = \frac{\sqrt{\det \hat{g}_{I+1} \det \hat{g}_{I-1}}}{\tilde{s} \det \hat{g}_I}. \quad (2.3)$$

В то время как значения  $k_I$  при  $I \neq D-1$  положительны, высшая кривизна  $k_{D-1}$  (“кручение”) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если некоторая кривизна  $k_I \neq 0$ , то  $k_\mu \neq 0$  при  $\mu = 1, 2, \dots, I-1$ . Обратно, если  $k_I = 0$ , то  $k_\mu = 0$  при  $\mu = I+1, \dots, D-1$  [21].

Формулы Френе для неизотропных кривых в пространстве Минковского имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{s}\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_I = \tilde{s}K_I^J\mathbf{e}_J, \quad \mathbf{e}_I\mathbf{e}_J = \eta_{IJ}, \quad (2.4)$$

$$K_{IJ} + K_{JI} = 0, \quad K_{IJ} = \begin{cases} \pm k_I & \text{при } J = I \pm 1, \\ 0 & \text{при } J \neq I \pm 1, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $\eta_{IJ}$  является диагональной метрикой псевдоевклидова пространства.

Легко видеть, что для того чтобы перевести формулы Френе для неизотропных кривых в пространстве Минковского в формулы Френе для кривых в евклидовом пространстве, нужно провести для некоторого индекса  $\underline{I}$  преобразование

$$(\mathbf{e}_{\underline{I}}, \tilde{s}k_{\underline{I}}, \tilde{s}k_{\underline{I}-1}, \tilde{s}) \rightarrow (i\mathbf{e}_{\underline{I}}, i\tilde{s}k_{\underline{I}}, i\tilde{s}k_{\underline{I}-1}, (-i)^{\delta_{1\underline{I}}}\tilde{s}), \quad (2.6)$$

в результате которого вектор  $\mathbf{e}_{\underline{I}}$  становится времениподобным. При  $\underline{I} = 1$  полученная кривая времениподобна, тогда как при  $\underline{I} \neq 1$  — пространственноподобна.

Как видно из выражения (2.3), лагранжиан действия (1.5) зависит от производных  $(N + 1)$ -го порядка. Однако, принимая во внимание формулы Френе (2.1), мы можем заменить его эквивалентным лагранжианом, не зависящим от высших производных [18]:

$$\begin{aligned} \tilde{s} \sum_{i=1}^N c_i k_i(\mathbf{x}_\alpha) \rightarrow \tilde{s} \sum_{i=1}^N c_{i-1} k_{i-1} + c_N \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_N^2 - \tilde{s}^2 k_{N-1}^2} - \tilde{s} \sum_{i \leq j=1}^N d_{ij}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}) + \\ + \mathbf{p}(\dot{\mathbf{x}} - \tilde{s} \mathbf{e}_1) + \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{i-1}(\dot{\mathbf{e}}_{i-1} - \tilde{s} k_{i-1} \mathbf{e}_i + \tilde{s} k_{i-2} \mathbf{e}_{i-2}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\tilde{s}$ ,  $k_{i-1}$ ,  $d_{ij}$ ,  $\mathbf{p}_{i-1}$ ,  $\mathbf{e}_i$  являются независимыми переменными,  $k_0 = 0$ ,  $\mathbf{p}_0 = 0$ ,  $\mathbf{e}_0 = 0$ . Для нового лагранжиана можно легко совершить преобразование Лежандра, в результате чего получим гамильтонову систему [18]

$$\begin{aligned} \omega_N = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{e}_i, \\ \mathcal{H} = \tilde{s} \left[ \mathbf{p} \mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^N k_{i-1}(\phi_{i-1.i} - c_{i-1}) + \right. \\ \left. + \frac{k_N}{2c_N}(\Phi_{N.N} - c_N^2) + \sum_{i,j=1}^N d_{ij}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

со следующими первичными связями:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij} \approx 0, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{p}_N \mathbf{e}_N \approx 0, \quad \mathbf{p}_N \mathbf{e}_{i-2} \approx 0, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{p} \mathbf{e}_1 \approx 0, \quad (2.11)$$

$$\phi_{i-1.i} \equiv \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{e}_i - \mathbf{p}_i \mathbf{e}_{i-1} \approx c_{i-1}, \quad \Phi_{N.N} \equiv \mathbf{p}_N^2 - \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_N \mathbf{e}_i)^2 \approx c_N^2. \quad (2.12)$$

Заметим, что в такой формулировке лагранжиана множители  $\tilde{s}$  и  $k_i$  имеют ясный геометрический смысл, так что возможные соотношения между ними, возникающие при стабилизации первичных связей, получают интерпретацию как соотношения на первые  $N$  кривизн. Соответственно выбор вторичных связей должен быть согласован с требованием  $k_i \neq 0$ .

Удобно ввести вместо  $\mathbf{p}_i$  новые переменные

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^\perp \equiv \mathbf{p}_i - \sum_{j=1}^N (\mathbf{p}_i \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{p}_i^\perp \mathbf{e}_j = 0, \quad \mathbf{p}_i^\perp \mathbf{p}_j^\perp \equiv \Phi_{ij}, \\ \phi_{i.j} \equiv \mathbf{p}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{p}_j \mathbf{e}_i, \quad \chi_{ij} = \mathbf{p}_i \mathbf{e}_j, \quad i \geq j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

так что первичные связи (2.9) окажутся сопряженными  $\chi_{ij}$  и коммутирующими с  $\mathbf{p}_i^\perp$  и  $\phi_{ij}$ .

Именно по этой причине мы опустили в первичном гамильтониане (2.8) члены, пропорциональные связям (2.10). По этой же причине без ограничения общности можно ввести калибровочные условия (включающие в себя первичные связи (2.10))

$$\chi_{ij} \approx 0, \quad (2.14)$$

фиксирующие значения лагранжевых множителей  $d_{ij}$ :

$$2d_{i,j} = \delta_{ij}(k_i c_i - k_{i-1} c_{i-1}). \quad (2.15)$$

Теперь перейдем к процедуре построения вторичных связей, порождаемых первичными связями (2.11) и (2.12).

Первичная связь (2.11) порождает вторичные связи

$$\mathbf{p} \mathbf{e}_i \approx 0, \quad \mathbf{p} \mathbf{p}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad (2.16)$$

обеспечивающие безмассовость модели и трансверсальность матрицы спиральностей [15], [22].

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из (2.16), классическими решениями системы являются пространственноподобные кривые, причем лишь при условии

$$N \leq N_0 = \left[ \frac{D-2}{2} \right], \quad c_N \neq 0 \quad (2.17)$$

действие (1.5) допускает нетривиальные ( $\mathbf{p} \neq 0$ ) классические решения. Заметим, что  $N_0$  определяет число спиральностей системы (ранг малой группы Лоренца  $SO(D-2)$ ).

Эволюция функций  $\phi_{ij}$  и  $\Phi_{ij}$  задается выражениями (в калибровке собственного времени  $\tilde{s} = 1$ )

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{i,j} &= -k_{i-1} \phi_{i-1,j} + k_i \phi_{i+1,j} + (i \leftrightarrow j) - 2\lambda \delta_{N[i] \Phi_j}.N, \\ \dot{\Phi}_{i,j} &= -k_{i-1} \Phi_{i-1,j} + k_i \Phi_{i+1,j} + (i \leftrightarrow j) - 2\lambda \Phi_{N.\{i\} \phi_j}.N, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где мы полагаем  $k_i \neq k_N$ ,  $2c_N \lambda = k_N$ ,  $\phi_{0,i} = \Phi_{0,i} = \phi_{N+1,i} = \Phi_{N+1,i} = 0$ . Поэтому связи, порождаемые соотношениями (2.12), являются функциями  $\phi_{ij}$  и  $\Phi_{ij}$ , так что их число не превышает  $N^2$ .

Поскольку генераторы группы вращений имеют в координатах (2.13) вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{p} \times \mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^\perp \times \mathbf{e}_i - \sum_{i,j=1}^N \phi_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (2.19)$$



то собственные значения матрицы  $\mathbf{S}$  определяются соотношениями

$$\mathrm{tr} \mathbf{S}^{2k} = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{\Phi} & \hat{\phi} \end{pmatrix}^{2k}. \quad (2.20)$$

Следовательно, число ненулевых спиральностей системы равно  $N$  [15], [22].

Удобно представить функции  $\phi_{ij}$ ,  $\Phi_{ij}$  в виде градуированных матриц:

$$\hat{R}_{ij}^p = (\phi_{ij}^p, \Phi_{ij}^p), \quad p = 1, \dots, N, \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^p &\equiv \phi_{i,j}, & |i-j| &= p, \\ \Phi_{i,j}^p &\equiv \Phi_{i,j}, & i+j-1 &= 2N+1-p. \end{aligned}$$

Замечая, что  $\hat{R}^p \sim \hat{R}^{p\pm 1}$ , заключаем, что процедура стабилизации содержит не более  $N+1$  шагов, причем вторичные связи  $(p+1)$ -го этапа зависят от  $\hat{R}^{p\pm 1}$ . Как следствие вторичные связи нечетных этапов имеют вид  $\hat{R}^{2\kappa} \approx 0$ , а вторичные связи четных этапов определяются из системы линейных по  $k_i$  уравнений как требование совместимости этих уравнений с условиями  $k_i \neq 0$ . Потому значения спиральностей, определяемых выражениями (2.20), фиксируются лишь в случае, когда система имеет максимально допустимый набор связей. Безусловно, это имеет место при  $N=1$ , когда первичные связи (2.12) не порождают вторичных связей.

При  $N=2$ ,  $c_1 \neq 0$  имеем

$$\Phi_{1,2} \approx 0, \quad k_2 c_2 c_1 + k_1 (\Phi_{1,1} - c_2^2) = 0, \quad \Phi_{1,1} - c_2^2 \neq 0 = \mathrm{const}. \quad (2.22)$$

Так что уже в этом простом случае значения спиральностей определяются начальными условиями задачи.

При  $N > 2$  вторичные связи первого этапа имеют вид

$$\Phi_{N-1,N} \approx 0, \quad \phi_{i-2,i} \approx 0, \quad (2.23)$$

после чего мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} k_{i-4} \phi_{i-4,i-1} - k_{i-3} c_{i-2} + k_{i-2} c_{i-3} - k_{i-1} \phi_{i-3,i} &\approx 0, \\ -k_{N-3} c_N \phi_{N-3,N} + k_{N-2} c_N c_{N-1} - k_{N-1} c_N c_{N-2} + k_N \Phi_{N,N-2} &\approx 0, \\ k_{N-2} \Phi_{N-2,N} + k_{N-1} (\Phi_{N-1,N-1} - c_N^2) + k_N c_N c_{N-1} &\approx 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Итак, при  $N > 2$  дальнейшая процедура построения вторичных связей существенно зависит от значений констант  $c_i$ . Результирующие системы могут иметь решения с фазовыми пространствами различной размерности.

Лишь в случае зависимости лагранжиана от единственной кривизны,  $L = c_N k_N$ , мы получим максимально допустимый набор вторичных связей третьего этапа,  $\phi_{i,i+3} \approx 0$ ,  $\Phi_{N-1,N-1} \approx c_N^2$ . Продолжив процедуру построения связей, окончательно получим

$$\phi_{ij} \approx 0, \quad \Phi_{ij} - c^2 \delta_{ij} \approx 0. \quad (2.25)$$

Это единственный случай, когда связи полностью фиксируют спиральности системы и, как следствие, квантование приводит к неприводимым представлениям группы Пуанкаре. Более подробно мы рассмотрим эту систему в следующем разделе.

В остальных случаях при  $N > 2$  система может допускать решения с различными наборами вторичных связей, приводящими к физически неэквивалентным системам (с фазовыми пространствами различной размерности). Продемонстрируем это явление на следующих двух примерах.

**ПРИМЕР 1.** При  $N = 3$ ,  $|c_1| + |c_2| \neq 0$  система уравнений (2.24) принимает вид

$$\hat{A}\hat{k} \equiv \begin{pmatrix} c_3 c_2 & -c_3 c_1 & \Phi_{1.3} \\ \Phi_{1.3} & \Phi_{2.2} - c_3^2 & c_3 c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.26)$$

При  $\text{rank } \hat{A} = 2$  процедура построения вторичных связей заканчивается на этом этапе и остается единственный нефиксированный лагранжев множитель. Если  $c_2 \neq 0$ , возможен альтернативный случай  $\text{rank } \hat{A} = 1$ , который имеет место на поверхности, фиксированной условиями

$$\Phi_{1.3} = \pm c_2 c_3, \quad \Phi_{2.2} = c_3^2 \mp c_1 c_3. \quad (2.27)$$

В этом случае из (2.26) следует единственное условие на лагранжевы множители:

$$c_2 (k_1 \pm k_3) \pm c_1 k_2 = 0. \quad (2.28)$$

Рассматривая выражения (2.27) как связи второго этапа, мы получаем вторичные связи третьего этапа:

$$\Phi_{1.2} \approx 0, \quad \left( \frac{\Phi_{1.1}}{c_3} - c_3 \pm c_1 \right) k_1 \pm c_2 k_2 = 0, \quad \Phi_{1.1} = \text{const}. \quad (2.29)$$

Как видно, рассмотренная система имеет решения двух типов, с фазовыми пространствами различной размерности. Оба решения имеют две калибровочные степени свободы.

При  $c_1 = 0$ ,  $N > 2$  система может иметь решения с большим числом калибровочных степеней свободы.

ПРИМЕР 2. При  $L = c_1 k_{N-1} + c_2 k_N$ ,  $N > 2$ , система уравнений (2.24) принимает вид

$$\phi_{i-3,i} \approx 0, \quad \hat{A}\hat{k} \equiv \begin{pmatrix} c_1 c_2 & 0 & \Phi_{N-2,N} \\ \Phi_{N-2,N} & \Phi_{N-1,N-1} - c_2^2 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{N-2} \\ k_{N-1} \\ k_N \end{pmatrix} = 0.$$

Матрица  $\hat{A}$  имеет меньший ранг на поверхности

$$\Phi_{N-1,N-1} \approx c_2^2, \quad \Phi_{N,N-2} \approx -c_1 c_2, \quad k_{N-2} = k_N.$$

Продолжив эту процедуру, получим, что фазовое пространство наименьшей размерности задается связями

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha,\beta} &\approx c_1 \epsilon_{N-\alpha,N-\beta}, & \phi_{\alpha,b} &\approx 0, & \phi_{a,b} &\approx 0, \\ \Phi_{\alpha,\beta} &\approx c_2^2 \delta_{\alpha\beta}, & \Phi_{\alpha,b} &\approx -c_2 c_1 \delta_{\alpha,b+2}, & \Phi_{a,b} &\approx (c_2^2 - c_1^2) \delta_{ab} - c_1 c_2 \delta_{a,b\pm 2}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $a, b = 1, \dots, N-2$  и  $\alpha, \beta = N-1, N$ .

Лагранжевы множители ограничены условиями

$$k_i = k_{i-2}, \quad (2.31)$$

так что построенная гамильтонова система имеет три калибровочные степени свободы.

Рассмотрим уравнения движения гамильтоновой системы общего положения. В координатах (2.13) они имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \tilde{s} \mathbf{e}_1, & \dot{\mathbf{e}}_{i-1} &= \tilde{s} k_{i-1} \mathbf{e}_i - \tilde{s} k_{i-2} \mathbf{e}_{i-2}, & \dot{\mathbf{e}}_N &= \frac{\tilde{s} k_N \mathbf{p}_N^\perp}{c_N} - \tilde{s} k_{N-1} \mathbf{e}_{N-1}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i^\perp &= -\delta_{1,i} \tilde{s} \mathbf{p} - \tilde{s} k_{i-1} \mathbf{p}_{i-1}^\perp + \tilde{s} k_i \mathbf{p}_{i+1}^\perp - \frac{\tilde{s} k_N (\Phi_{i,N} \mathbf{e}_N - \phi_{i,N} \mathbf{p}_N^\perp)}{c_N}, & \dot{\mathbf{p}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ортонормализуем векторы  $\mathbf{p}_i^\perp$  с помощью следующего анзаца, являющегося модификацией предложенного в работе [23]:

$$\mathbf{v}_N \equiv \frac{\mathbf{p}_N^\perp}{c_N}, \quad \mathbf{v}_{i-1} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta_{i-1} \Delta_i}} \begin{vmatrix} \Phi_{N,N} & \dots & \Phi_{N,i-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{i,N} & \dots & \Phi_{i,i-1} \\ \mathbf{p}_N^\perp & \dots & \mathbf{p}_{i-1}^\perp \end{vmatrix}, \quad (2.33)$$

где  $\Delta_N = c_N$ ,  $\Delta_i = \det \Phi_{\alpha,\beta} \neq 0$ ,  $\alpha, \beta = i, \dots, N$ . Ортогональность этих векторов немедленно следует из очевидного разложения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \sum_{\alpha=i}^N A_{i,\alpha} \sqrt{\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}} \mathbf{p}_\alpha^\perp, & A_{i,i} &= 1, & \Delta_{N+1} &\equiv 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{v}_i \mathbf{p}_\alpha^\perp &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}}, & \alpha = i, \\ 0, & \alpha > i. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Как видно из уравнений движения, векторы  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{2N+1-i} \equiv \mathbf{v}_i^\perp)$  образуют первые  $2N$  элементов исходного конфигурационного пространства, тогда как вектор  $\mathbf{p}$  задает его  $(2N + 1)$ -й изотропный элемент.

Сравнив уравнения движения с формулами Френе (2.1), мы получим следующие выражения для внешних кривизн:

$$k_{2N} = 0, \quad \frac{k_{N+a}}{k_{N-a}} = \sqrt{\frac{\Delta_{a-1}\Delta_{a+1}}{\Delta_a^2}}, \quad a = 1, \dots, N-1. \quad (2.35)$$

*СЛЕДСТВИЕ.* Трактории, отвечающие безмассовым спиновым частицам, есть пространственноподобные кривые с постоянным отношением равноудаленных от  $N$  кривизн:  $k_{N+a}/k_{N-a} = \text{const}$ . Первые  $2N$  элементов подвижного репера  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2N}$  являются пространственноподобными векторами, а  $(2N + 1)$ -й элемент является изотропным вектором, отвечающим импульсу системы.

### 3. СИСТЕМА С ФИКСИРОВАННЫМИ СПИРАЛЬНОСТЯМИ: $\mathcal{L} = ck_N$

Как было показано в предыдущем разделе, имеется единственная система с действием вида (1.5), имеющая фиксированные значения спиральностей. Она определяется следующим набором характеристических констант:

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{N-1} = 0, \quad c_N \equiv c \neq 0, \quad (3.1)$$

т.е. зависит от единственной кривизны:  $\mathcal{L} = ck_N$ . Полный набор связей такой системы можно представить в виде

$$\mathbf{p}\mathbf{e}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}\mathbf{p}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad \mathbf{p}_i\mathbf{e}_j - \mathbf{p}_j\mathbf{e}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}_i\mathbf{p}_j - c^2\delta_{ij} \approx 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i - \delta_{ij} \approx 0, \quad \mathbf{p}_j\mathbf{e}_i \approx 0, \quad j \geq i. \quad (3.3)$$

Все связи (3.2) являются связями первого рода, связи (3.3) – второго рода, так что размерность фазового пространства системы равна

$$\mathcal{D}^{\min} = 2(D-1) + N(2D-3N-5).$$

Заметим, что при  $N = N_0$  имеем

$$N_0(2D-3N_0-5) = \begin{cases} \frac{(D-2)(D-4)}{4} & \text{при четных } D, \\ \frac{(D-1)(D-5)}{4} & \text{при нечетных } D. \end{cases} \quad (3.4)$$

Собственные числа матрицы спиральности имеют совпадающие значения  $m_i = c$ .

Итак, рассмотренная система задает универсальную классическую модель безмассовой частицы при  $N = 1$ ,  $D = 4, 5$  [10]. При  $D \geq 6$  система описывает безмассовую

частицу с  $N$  спиральностями, равными  $c$ , и нулевыми значениями остальных  $N_0 - N$  спиральностей.

Как видно из (2.35), классические траектории системы обладают свойством

$$k_{N+a} = k_{N-a}, \quad k_{2N} = 0, \quad a = 1, \dots, N-1, \quad (3.5)$$

в то время как первые  $N$  кривизн  $k_i$  остаются произвольными. Таким образом, эта система имеет  $N+1$  калибровочных степеней свободы, образующих, по-видимому,  $W_{N+2}$ -алгебру. Заметим, что это было проверено прямыми вычислениями для  $N=1$  [14] и косвенными для  $N=2$  [24] (во второй работе и было сделано приведенное предположение).

Введем комплексные координаты

$$\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{p}_i + i|c|\mathbf{e}_i}{\sqrt{2|c|}}, \quad \omega_2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + i \sum_i d\mathbf{z}_i \wedge d\bar{\mathbf{z}}_i. \quad (3.6)$$

В этих координатах гамильтониан системы задается выражением

$$\mathcal{H} = \frac{\tilde{s}}{2|c|} \left[ i\sqrt{2}\mathbf{p}(\bar{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{z}_1) + i \sum_{i=1}^{N-1} k_i(\mathbf{z}_i\bar{\mathbf{z}}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}\bar{\mathbf{z}}_i) + k_N(\mathbf{z}_N\bar{\mathbf{z}}_N - |c|) \right]. \quad (3.7)$$

Связи (3.2), (3.3) принимают вид

$$\mathbf{z}_i\bar{\mathbf{z}}_j - |c|\delta_{ij} \approx 0, \quad \mathbf{p}\mathbf{z}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}\bar{\mathbf{z}}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad \mathbf{z}_i\mathbf{z}_j \approx 0, \quad \bar{\mathbf{z}}_i\bar{\mathbf{z}}_j \approx 0. \quad (3.8)$$

Отметим, что в координатах (3.6) уравнения движения голоморфны (мы полагаем  $\tilde{s} = 1$ ):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= i(\mathbf{z}_1 - \bar{\mathbf{z}}_1), & \dot{\mathbf{z}}_{i-1} &= -i\delta_{1..i-1}\mathbf{p} + k_{i-1}\mathbf{z}_i - k_{i-2}\mathbf{z}_{i-2}, \\ \dot{\mathbf{z}}_N &= -i\delta_{1..N}\mathbf{p} + ik_N\mathbf{z}_N - k_{N-1}\mathbf{z}_{N-1}, & \dot{\mathbf{p}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

что является косвенным подтверждением предположения о  $W$ -алгебраической природе калибровочных симметрий системы (см., например, [23]). Кроме того, уравнения движения для  $\mathbf{z}_i$  можно свести к уравнению вида

$$\hat{L} = \sum_{i=0}^N \lambda_i(k_{i(\alpha)}) \frac{d^i \mathbf{z}_1}{d\tau^i} = 0,$$

что является другим указанием на  $W$ -алгебраическую природу калибровочных симметрий системы [25].

Далее найдем, какие значения принимают спиральности рассматриваемой системы после квантования. В частности, выясним, включает ли рассматриваемая система конформно-инвариантные представления группы Пуанкаре.

Чтобы провести квантование системы, положим

$$\hat{\mathbf{z}}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_i}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \quad \hat{\mathbf{z}}_i = \mathbf{z}_i, \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}. \quad (3.10)$$

В выбранной поляризации волновые функции имеют голоморфный вид  $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i)$ . Подействовав на волновую функцию операторами, отвечающими связям (3.8), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i \frac{\partial \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j} &= |c| \delta_{ij} \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}), & \mathbf{p} \frac{\partial \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j} &= 0, \\ \mathbf{p}^2 \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}) &= 0, & \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j \partial \mathbf{z}_i} &= 0, & \mathbf{p} \frac{\partial \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из требования однозначности волновой функции мы получаем условие квантования спиральностей

$$|c| = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.12)$$

с учетом которого получаем, что волновые функции имеют вид

$$\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i) = \psi(\mathbf{p})_{A(1)A(2)\dots A(N)} z_1^{A(1)} z_2^{A(2)} \dots z_N^{A(N)}, \quad (3.13)$$

где введены обозначения  $A(i) \equiv A_1^{(i)} \dots A_c^{(i)}$ ,  $z_i^{A(i)} \equiv z_i^{A_1^{(i)}} \dots z_i^{A_c^{(i)}}$ . Здесь  $\psi(\mathbf{p}) \dots$  является тензором  $cN$ -го ранга, симметричным относительно перестановок индексов одного типа и антисимметричным по перестановкам индексов разных типов, симметрии задаются прямоугольной диаграммой Юнга с  $N$  строками и  $c$  столбцами:

$A_1^1$	.....	$A_c^1$
$A_1^2$	.....	$A_c^2$
$\vdots$	.....	$\vdots$
$A_1^N$	.....	$A_c^N$

Кроме того, тензор  $\psi(\mathbf{p}) \dots$  должен удовлетворять условиям трансверсальности и безмассовости:

$$\mathbf{p}^2 \psi(\mathbf{p})_{A(1)B(2)\dots C(N)} = 0, \quad p^A \psi(\mathbf{p}) \dots A \dots = 0. \quad (3.14)$$

Таким образом, рассмотренная нами модель описывает безмассовые частицы целочисленной спиральности.

С учетом результата Зигеля [17] заключаем, что рассматриваемая модель приводит к конформно-инвариантным представлениям группы Пуанкаре лишь при

$$D = 2p, \quad N = \left[ \frac{D-2}{2} \right],$$

поскольку спиральности системы принимают целые значения.

Итак, рассматриваемая нами система оказалась замечательной во многих отношениях: она является единственной в классе систем вида (1.5), которая порождает неприводимые представления группы Пуанкаре, включая конформно-инвариантные представления, и, наконец, имеет расширенную калибровочную симметрию  $W$ -алгебраического типа.

Возникает естественный вопрос: допускает ли наша модель формулировку на искривленном пространстве-времени? Очевидно, что в силу наличия вторичных связей модель не может быть переформулирована на произвольном пространстве-времени, что было показано на примере модели Плющая [12]. С другой стороны, модель Плющая допускает непротиворечивую формулировку на пространстве анти-де Ситтера (более полно, на пространствах постоянной кривизны), что представляется существенным с точки зрения теорий безмассовых полей высших спинов (см. обзор [26]).

Чтобы ответить на вопрос, наследует ли наша модель это важное свойство, сформулируем систему (1.5) на искривленном пространстве-времени. Модифицируем для этого формулы Френе:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{\tilde{s} d\tau} = \mathbf{e}_1, \quad \frac{D\mathbf{e}_I}{\tilde{s} d\tau} = k_I \mathbf{e}_{I+1} - k_{I-1} \mathbf{e}_{I-1}, \quad \frac{D}{d\tau} \equiv \frac{d}{d\tau} + \widehat{\Gamma}(\dot{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{e}_I \mathbf{e}_J = \delta_{IJ}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{D+1} \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $\widehat{\Gamma}_B^A \equiv \Gamma_{BC}^A \dot{x}^C$ , а  $\Gamma_{BC}^A$  – символы Кристоффеля метрики подстилающего пространства  $g_{AB}(x)$ . Затем, совершив преобразования, аналогичные приведенным в разделе 2, получим гамильтонову систему

$$\begin{aligned} \omega_N = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{e}_i, \\ \mathcal{H} = \tilde{s} \left[ \pi \mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^N k_{i-1} (\phi_{i-1,i} - c_{i-1}) + \right. \\ \left. + \frac{k_N}{2c_N} (\Phi_{N,N} - c_N^2) + \sum_{i,j=1}^N d_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}) \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

первичные связи которой заданы выражениями

$$\pi \mathbf{e}_1 \approx 0, \quad \pi \equiv \mathbf{p} - \Gamma, \quad \Gamma_A \equiv \sum_{i=1}^N \Gamma_{AB}^C p_{(i)C} e_i^B, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij} \approx 0, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{p}_N \mathbf{e}_N \approx 0, \quad \mathbf{p}_N \mathbf{e}_{i-2} \approx 0, \quad (3.19)$$

$$\phi_{i-1,i} \equiv \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{e}_i - \mathbf{p}_i \mathbf{e}_{i-1} \approx c_{i-1}, \quad \Phi_{N,N} \equiv \mathbf{p}_N^2 - \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_N \mathbf{e}_i)^2 \approx c_N^2. \quad (3.20)$$

Нетрудно заметить, что алгебра функций  $\phi_{ij}$ ,  $\Phi_{ij}$ , так же как и их скобки Пуассона с  $\pi e_i$ ,  $\pi \mathbf{p}_i$ ,  $\pi^2$ , не зависят от метрики подстилающего пространства, в то время как скобки Пуассона функций  $\pi e_i$ ,  $\pi \mathbf{p}_i$ ,  $\pi^2$  имеют вид

$$\begin{aligned} \{\pi e_i, \pi e_j\} &= \mathcal{R}(\mathbf{e}_{[i}, \mathbf{e}_{j]}), & \{\pi \mathbf{p}_i, \pi \mathbf{p}_j\} &= \mathcal{R}(\mathbf{p}_{[i}, \mathbf{p}_{j]}), \\ \{\pi e_i, \pi \mathbf{p}_j\} &= \mathcal{R}(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}_j), & \{\pi e_i, \pi^2\} &= 2\mathcal{R}(\pi, \mathbf{e}_i), & \{\pi \mathbf{p}_i, \pi^2\} &= 2\mathcal{R}(\pi, \mathbf{p}_i), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \sum_{i=1}^N R(\mathbf{p}_i | \mathbf{e}_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Принимая во внимание выражение для тензора Римана пространств постоянной кривизны

$$R(\mathbf{a} | \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{R_0}{D(D-1)} ((\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc})) \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0,$$

закключаем, что алгебра связей системы (3.16) на пространстве постоянной кривизны изоморфна алгебре связей системы на плоском пространстве (2.8).

Итак, модель безмассовой частицы с действием (1.6) допускает переформулировку на пространствах анти-де Ситтера. При этом сохраняются все ее перечисленные выше свойства: свойства классических траекторий и калибровочные симметрии, неприводимость представлений и совпадающие значения спиральностей. Более того, поскольку на пространствах анти-де Ситтера отношение неприводимых представлений к конформным преобразованиям такое же, как и на плоских пространствах [27], то остаются корректными наши выводы о конформной инвариантности рассмотренной модели.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что релятивистская система с действием (1.6) является исключительной и универсальной во многих отношениях. Во-первых, она является единственной системой, сформулированной в терминах координат исходного пространства-времени (произвольной размерности), которая порождает неприводимые представления группы Пуанкаре с ненулевым спином. Во-вторых, она описывает безмассовые частицы произвольной целой спиральности, представленные прямоугольными диаграммами Юнга. Таким образом, она включает в себя конформно-инвариантные представления с целочисленными спиральностями. В-третьих, она допускает формулировку на пространствах постоянной ненулевой кривизны, в частности на пространствах анти-де Ситтера, на которых формулируются теории полей высших спинов. И наконец, в-четвертых, рассмотренная модель обладает расширенной калибровочной  $W$ -симметрией.

Остались открытыми ряд естественных вопросов. Прежде всего, мы не установили точного соответствия между калибровочными симметриями рассмотренной системы и  $W_{N+2}$ -алгебрами, при том что точный ответ на этот вопрос существенно повлиял бы как на статус модели, так и на понимание геометрической природы  $W$ -алгебр. Мы не



описали в рамках рассматриваемой модели безмассовые поля полупелой спиральности. Это можно было бы сделать, например, разрешением одной из связей второго рода путем спиноризации [7], аналогично процедуре, проведенной в работе [14] для безмассовой частицы при  $D = 4$ . Не рассмотрены способы суперсимметризации данной модели. Это было бы интересно не столько с точки зрения описания частиц полупелого спина, сколько с супергеометрической точки зрения, а именно: каким инвариантам супергеометрии будут отвечать построенные лагранжианы и будут ли ассоциированы их калибровочные преобразования суперсимметричным расширениям  $W$ -алгебр. Не изучено отношение модели к процедуре размерной редукции и ее поведение на “границе” пространства анти-де Ситтера. Ответы на эти вопросы помогли бы лучше определить место предложенной модели в ряду лагранжевых моделей спиновых частиц. А вопрос об описании взаимодействия предложенной модели с внешними полями (высших спинов), возможно, нужно адресовать автору работы [28], в которой представлена неожиданная точка зрения на проблему взаимодействия частиц с полями высших спинов.

**Благодарности.** Автор считает своим долгом выразить благодарность всем, кто своими замечаниями и интересом содействовал завершению этой работы: М. Васильеву, обратившему внимание автора на присутствие в решениях рассматриваемой модели конформно-инвариантных представлений и поставившему вопрос о возможности формулировки модели на пространствах анти-де Ситтера; С. Ляховичу за обсуждение структуры спиновых частиц в высших размерностях и проблемы построения вторичных связей; участникам семинара теоретического отдела ФИАН и особенно Б. Л. Воронову и И. В. Тютину за дотошные расспросы и доброжелательную критику; А. Сегалу за массу полезных разъяснений. Отдельная благодарность О. Худавердян, оказавшему автору неоценимую поддержку постоянным вниманием к работе и инициированием изучения аспектов, связанных с классической геометрией.

#### Список литературы

- [1] *Ф. А. Березин, М. С. Маринов.* Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 678; *F. A. Berezin, M. S. Marinov.* Ann. Phys. (N. Y.). 1977. V. 104. P. 336.
- [2] *R. Casabluoni.* Phys. Lett. B. 1976. V. 62. P. 49; *A. Barducci, R. Casabluoni, L. Lusanna.* Nucl. Phys. B. 1977. V. 124. P. 93; P. 521; *L. Brink, P. Di Vecchia, P. Howe.* Nucl. Phys. 1977. V. 118. P. 76.
- [3] *P. Howe, S. Penati, M. Pernici, P. Townsend.* Phys. Lett. B. 1988. V. 215. P. 555.
- [4] *D. M. Gitman.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 488. P. 490.
- [5] *D. Sorokin.* Phys. Rep. 2000. V. 329. P. 1; *I. Bando, J. Lukierski, D. Sorokin.* Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 045002.
- [6] *А. А. Купиллов.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972; *B. Kostant.* Quantization and unitary representations. Part I. Prequantization. In: Lect. Notes Math. V. 170. Lectures in Modern Analysis and Applications. III. Ed. C. T. Taam. Berlin: Springer, 1970. P. 87; *J. M. Souriau.* Structure des Systemes Dynamiques. Paris: Dunod, 1970.
- [7] *S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, K. M. Shekhter.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 537. P. 640; hep-th/0002247.
- [8] *A. M. Polyakov.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 406; Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 112.

- [9] *M. S. Plyushchay*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 362. P. 54; *Yu. A. Kuznetsov, M. S. Plyushchay*. Nucl. Phys. B. 1993. V. 389. P. 181.
- [10] *M. S. Plyushchay*. Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 837; P. 2747; Phys. Lett. B. 1990. V. 243. P. 383.
- [11] *E. Ramos, J. Roca*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 477. P. 606.
- [12] *D. Zoller*. Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 2236.
- [13] *V. V. Nesterenko, A. Feoli, G. Scarpetta*. Class. Q. Grav. 1996. V. 13. P. 1201.
- [14] *E. Ramos, J. Roca*. Nucl. Phys. B. 1995. V. 436. P. 529.
- [15] *B. S. Skagerstam, A. Stern*. Nucl. Phys. B. 1987. V. 294. P. 636.
- [16] *W. Siegel*. Int. J. Mod. Phys. A. 1988. V. 3. P. 2707.
- [17] *W. Siegel*. Int. J. Mod. Phys. A. 1989. V. 4. P. 2015.
- [18] *А. П. Нерсисян*. ТМФ. 1998. Т. 117. № 1. С. 130; hep-th/9805009.
- [19] *A. Nersessian*. Massless particles and the geometry of curves. Classical picture. hep-th/9912081.
- [20] *A. Nersessian, E. Ramos*. Phys. Lett. B. 1998. V. 455. P. 123; Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 2033; *A. Nersessian, R. Manvelyan, H. J. W. Mueller-Kirsten*. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl. ). 2000. V. 88. P. 381; hep-th/9912061.
- [21] *М. М. Постников*. Лекции по геометрии. Семестр III: Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
- [22] *M. V. Atre, A. P. Balachadran, T. R. Govindarajan*. Int. J. Mod. Phys. A. 1987. V. 2. P. 453.
- [23] *J.-L. Gervais, Y. Matsuo*. Commun. Math. Phys. 1993. V. 152. P. 317.
- [24] *E. Ramos, J. Roca*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 452. P. 705.
- [25] *А. О. Радул*. Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 50. С. 341; Функци. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 1. С. 33.
- [26] *M. Vasiliev*. Higher spin gauge theories: star-product and AdS spaces. hep-th/9910096.
- [27] *R. Metsaev*. Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. P. 1719.
- [28] *A. Segal*. Point particle in general background fields and generalized equivalence principle. hep-th/0008105.

Поступила в редакцию 28.VII.2000 г.