А. Г. Кусраев, О строении векторных мер и полных булевых алгебр, *Докл. АН СССР*, 1991, том 318, номер 6, 1312–1315

УДК 517.98 МАТЕМАТИКА

© А.Г. КУСРАЕВ

О СТРОЕНИИ ВЕКТОРНЫХ МЕР И ПОЛНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

(Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 21 I 1991)

В серии статей [1–3] Д. Магарам разработала оригинальный подход к изучению векторных мер и положительных операторов (см. также обзор [4]). Для этого исследования характерно использование весьма нетривиальной и нетрадиционной для теории операторов техники из теории булевых алгебр. Быть может, именно поэтому идеи Д. Магарам все еще не в полной мере восприняты в функциональном анализе. Лишь недавно некоторые ее результаты получили дальнейшее развитие (см. [5–7]).

Примечательно, что в указанных публикациях Д. Магарам предвосхищены отдельные идеи и конструкции из теории булевозначных моделей, возникшей во второй половине 60-х годов в связи с решением континуум-проблемы. Цель настоящей заметки – показать, что теория, развитая Д. Магарам, естественно вписывается в булевозначный анализ. При этом обнаруживаются новые неожиданные взаимосвязи и достигается значительное упрощение, ибо все сводится к работе с обычными пространствами с мерой внутри подходящей булевозначной модели. Ограничимся фрагментом теории, связанной с векторными мерами. Используемые общие сведения о булевых алгебрах и булевозначных моделях имеются в [8] и [9, 10] соответственно. Фиксированные обозначения **R** – поле действительных чисел, $\omega :=$ $:= \{0, 1, 2, \ldots\}$ – наименьший бесконечный кардинал, **B** – полная булева алгебра, $V^{(\mathbf{B})}$ – булевозначный универсум, построенный над **B**.

1°. Основной объект исследования в [1] – полная булева алгебра $\mathcal{B}$ с отношением эквивалентности $\sim$ на ней. Мы отказываемся от предположения с ч е т н о с т и т и п а, но в то же время ради простоты ограничиваемся к о н е ч н о й меры. Поэтому подчиним $(\mathcal{B}, \sim)$ несколько иным требованиям, нежели в [1]:

(I) Если $x = \bigvee_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha$ и $y = \bigvee_{\alpha \in \mathrm{A}} y_\alpha$, где $x_\alpha \wedge x_\beta = 0 = y_\alpha \wedge y_\beta$, $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$; $\alpha \neq \beta$, и для каждого $\alpha \in \mathrm{A}$ верно $x_\alpha \sim y_\alpha$, то $x \sim y$.

(II) Если $x \sim x'$ и $y \leqslant x$, то найдется такой элемент $y' \leqslant x'$, что $y \sim y'$.

(III) Если $x \sim \mathbf{1}$, то $x = \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ – единица алгебры $\mathcal{B}$).

Элемент $b \in \mathcal{B}$ называют и н в а р и а н т н ы м, если для каждого $x \in \mathcal{B}$ из $x \sim b$ следует $x = b$. Множество $\mathrm{inv}(\mathcal{B}, \sim)$ всех инвариантных элементов – правильная подалгебра в $\mathcal{B}$. Р а з л о ж и м о с т ь элемента x означает существование ненулевых дизъюнктных $y, z \in \mathcal{B}$ таких, что $y \leqslant x$, $z \leqslant x$ и $y \sim z$. Говорят, что $(\mathcal{B}, \sim)$ и $(\mathcal{B}', \approx)$ и з о м о р ф н ы, и пишут $\mathcal{B} \simeq \mathcal{B}'$, если существует булев изоморфизм h из $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}'$, для которого равносильны соотношения $x \sim y$ и $h(x) \approx h(y)$. Если $x \sim y$ означает, что $\lambda x = \lambda y$, где λ – отображение, определенное на $\mathcal{B}$, то говорят, что λ п о р о ж д а е т отношение $\sim$.

Всюду ниже **B** рассматривается с тривиальным отношением $\sim$, т.е. $x \sim y \leftrightarrow$ $\leftrightarrow x = y$; $\mathbf{B}(\mathbf{R})$ – расширенное K-пространство с базой **B**. Под н о р м и р о в а н н о й б у л е в о й а л г е б р о й понимаем пару $(\mathcal{A}, \mu)$, где $\mathcal{A}$ – полная булева алгебра, μ: $\mathcal{A} \to \mathbf{R}$ – просто положительная o-непрерывная мера. Опишем $(\mathcal{B}, \sim)$, соответствующие безатомным нормированным алгебрам.

Т е о р е м а 1. *Пусть* **B** *и* $\mathcal{B}$ *– полные булевы алгебры и* $\sim$ *есть отношение эквивалентности на* $\mathcal{B}$. *Равносильны утверждения:*

1) *выполняются условия* (I)–(III), *все ненулевые элементы в* $\mathcal{B}$ *разложимы и* $\mathrm{inv}(\mathcal{B}, \sim) \simeq \mathbf{B}$;

2) *в модели* $V^{(\mathbf{B})}$ *существуют безатомная полная булева алгебра* $\mathfrak{B}$ *и отношение эквивалентности* $\approx$ *на ней, такие, что выполнены условия* (I)–(III), $\operatorname{inv}(\mathfrak{B},\approx)\simeq\simeq\{0,1\}$ *и, кроме того* $(\mathfrak{B},\approx)\downarrow\simeq(\mathscr{B}^{\sim})$;

3) *в модели* $V^{(\mathbf{B})}$ *существует безатомная нормированная булева алгебра* $(\mathfrak{B},l)$ *такая, что* $(\mathfrak{B},l)\downarrow\simeq(\mathscr{B},\sim)$;

4) *отношение* $\sim$ *порождается строго положительной о-непрерывной мерой* λ, $\lambda(\mathscr{B})^{\perp\perp}=\mathbf{B}(\mathbf{R})$, *удовлетворяющей условию Магарам: для любых* $x\in\mathscr{B}$ *и* $u\in\mathbf{B}(\mathbf{R})$ *при* $0\leqslant u\leqslant\lambda x$ *найдется такой элемент* $y\in\mathscr{B}$, *что* $y\leqslant x$ *и* $\lambda y=u$.

В дальнейшем сосредоточим внимание на булевых алгебрах $\mathscr{B}$, удовлетворяющих одному из равносильных условий 1)–4). При этом всегда фиксируем векторную меру λ: $\mathscr{B}\to\mathbf{B}(\mathbf{R})$ со свойствами, описанными в 4), и пару $(\mathscr{B},\lambda)$ называем **B**-нормированной булевой алгеброй. Все основные факты о строении и классификации таких булевых алгебр можно вывести из теории нормированных булевых алгебр с помощью теоремы 1.

2°. Рассмотрим важный пример. Пусть Q – стоуновский компакт булевой алгебры B. Возьмем безатомную нормированную булеву алгебру $(\mathscr{A},\mu)$, снабдив ее метрикой, ассоциированной с μ. Обозначим через $C_\infty(Q,\mathscr{A})$ множество (классов) непрерывных функций вида u: $\operatorname{dom}(u)\to\mathscr{A}$, где $\operatorname{dom}(u)$ – котощее множество в Q. Функции u и v отождествляются, если они совпадают на $\operatorname{dom}(u)\cap\operatorname{dom}(v)$. В $C_\infty(Q,\mathscr{A})$ естественно вводится структура булевой алгебры. Числовая функция $q\mapsto\mu(u(q))$, $q\in\operatorname{dom}(u)$, непрерывна и допускает единственное распространение по непрерывности до функции $\bar\mu(u)$: $Q\to\overline{\mathbf{R}}$. Тем самым возникает векторная мера $\bar\mu$: $C_\infty(Q,\mathscr{A})\to C_\infty(Q,\mathbf{R})$. Нетрудно показать, что $(C_\infty(Q,\mathscr{A}),\bar\mu)$ – это **B**-нормированная булева алгебра.

Пусть теперь $\mathscr{A}^\wedge\in V^{(\mathbf{B})}$ – образ $\mathscr{A}$ при каноническом погружении универсума фон Неймана в $V^{(\mathbf{B})}$. Тогда $\mathscr{A}^\wedge$ – метрическое пространство, а $\mu^\wedge$ – равномерно непрерывная функция внутри $V^{(\mathbf{B})}$. Пусть $\tilde{\mathscr{A}}\in V^{(\mathbf{B})}$ – пополнение $\mathscr{A}^\wedge$ и $\tilde\mu$ – продолжение по непрерывности $\mu^\wedge$ на $\tilde{\mathscr{A}}$. Легко видеть, что $(\tilde{\mathscr{A}},\tilde\mu)$ – нормированная булева алгебра в модели $V^{(\mathbf{B})}$. Согласно теореме 1 $(\tilde{\mathscr{A}},\tilde\mu)\downarrow$ – также **B**-нормированная булева алгебра. Алгебры $\tilde{\mathscr{A}}$ и $C_\infty(Q,\mathscr{A})$ изучались также в [11].

Если λ: $\mathscr{B}\to F$, λ': $\mathscr{B}'\to F'$ и существуют изоморфизмы θ: $\mathscr{B}\to\mathscr{B}'$ и ψ: $F\to F'$ такие, что $\psi\lambda x=\lambda'\theta x$, $x\in\mathscr{B}$, то $(\mathscr{B},\lambda)$ и $(\mathscr{B},\lambda')$ называют изометричными. Если при этом $\psi(\mathbf{1})=\mathbf{1}$, то говорят о строгой изометричности алгебр.

Теорема 2. *Существует единственная с точностью до строгой изометричности* **B**-*нормированная булева алгебра* $(\mathscr{B},\lambda)$, *удовлетворяющая условиям*:

1) *существуют полные мономорфизмы* ι: $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ *и* χ: $\mathbf{B}\to\mathscr{B}$ *такие, что* $\mathscr{B}$ *есть произведение подалгебр* $\iota(A)$ *и* $\chi(\mathbf{B})$;

2) $\lambda(\iota a\wedge\chi b)=\mu(a)b$, $a\in\mathscr{A}$, $b\in\mathbf{B}$.

3) *для любых* $c\in\mathscr{B}$ *и числа* $\epsilon>0$ *найдутся разбиение единицы* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}\subset\mathbf{B}$ *и семейство* $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}\subset\mathscr{A}$ *такие, что*

$$\lambda\Big(c\,\Delta\Big(\bigvee_{\xi\in\Xi}\iota a_\xi\wedge\chi b_\xi\Big)\Big)\leqslant\epsilon\mathbf{1}.$$

Алгебра $(\mathscr{B},\lambda)$ *строго изометричная каждой из алгебр* $(\tilde{\mathscr{A}}\tilde\mu)\downarrow$ *и* $(C_\infty(Q,\mathscr{A}),\bar\mu)$.

Для алгебр счетного типа **B** теорема 2 установлена в [1] путем построения реализации $\mathscr{B}$, отличной от $\tilde{\mathscr{A}}\downarrow$ и $C_\infty(Q,\mathscr{A})$.

3°. Сформулируем теперь основную теорему о представлении **B**-нормированных булевых алгебр, которую можно получить путем интерпретации в булевозначной модели классического результата Д. Магарам о строении пространств с мерой (см. [12]). Булеву алгебру **B** назовем γ-стабильной, где γ – бесконечный кардинал, если $V^{(\mathbf{B})}\models$ “$\gamma^\wedge$ – кардинал”. Если этим свойством обладает компонента

$[0, b]$, $b \in \mathbf{B}$, то элемент b также называют γ-с т а б и л ь н ы м. Алгебра счетного типа γ-стабильна для любого кардинала γ. Обозначим через J^{γ} произведение γ экземпляров алгебры измеримых по Лебегу множеств интеграла $(0, 1)$ по модулю множеств нулевой меры.

Т е о р е м а 3. *Пусть $(\mathfrak{B}, \lambda)$ – это* **B**-*нормированная булева алгебра. Тогда для каждого натурального числа $n < k$, где $k \leqslant \omega$, найдутся множество Γ_n и семейство $(b_{n,\gamma})_{\gamma \in \Gamma_n} \subset \mathbf{B}$ такие, что выполнены условия:*

1) *Γ_n непусто, не более чем счетно и состоит из бесконечных кардиналов;*
2) *$\Gamma_{n-1} \prec \Gamma_n$, $0 < n < k$, т.е. если $\alpha \in \Gamma_{n-1}$ и $\beta \in \Gamma_n$, то $\alpha < \beta$;*
3) *$(b_{n,\gamma})_{\gamma \in \Gamma_n}$ – разбиение единицы в* **B**, *причем $b_{n,\gamma} \neq 0$ и $b_{n,\gamma}$ γ-стабилен при всех $\gamma \in \Gamma_n$;*
4) *если $Q_{n,\gamma}$ – открыто-замкнутое множество в Q, соответствующее элементу $b_{n,\gamma} \in \mathbf{B}$, то имеет место изоморфизм* **B**-*нормированных булевых алгебр*

$$\mathfrak{B} \simeq \sum_{n<k}{}^{\oplus} \sum_{\gamma \in \Gamma_n}{}^{\oplus} C_{\infty}(Q_{n,\gamma}, J^{\gamma}).$$

Представление $\mathfrak{B}$ в указанном виде единственно: если k', Γ'_n и $Q'_{n,\gamma}$ удовлетворяют перечисленным условиям, то $k = k'$, $\Gamma_n = \Gamma'_n$, а компакты $Q_{n,\gamma}$ и $Q'_{n,\gamma}$ гомеоморфны при всех $n < k$ и $\gamma \in \Gamma_n$.

Можно выбрать такую нормировку меры в алгебрах J^{γ}, входящих в представление (4), что изоморфизм станет изометрическим. Если $\mathcal{A}$ – прямая сумма всех J^{γ} из представления $\mathfrak{B}$, то все слагаемые $C_{\infty}(Q_{n,\gamma}, J^{\gamma})$ погружаются в $C_{\infty}(Q, \mathcal{A})$. Тем самым получаем следующее следствие из теоремы 3.

Т е о р е м а 4. *Пусть $(\mathfrak{B}, \lambda)$ –* **B**-*нормированная булева алгебра. Существует нормированная булева алгебра $(\mathcal{A}, \mu)$ и изоморфизм h алгебры $\mathfrak{B}$ на главный идеал в $C_{\infty}(Q, \mathcal{A})$ такие, что*

$\lambda x = \bar{\mu}(h(x))$, $x \in \mathfrak{B}$,

4°. Пусть $\mathfrak{B}_{n,\gamma}$ – компонента в $\mathfrak{B}$, соответствующая слагаемой $C_{\infty}(Q_{n,\gamma}, J^{\gamma})$ из теоремы 3, 4, а $e_{n,\gamma}$ – наибольший элемент этой компоненты. Тогда $\mathfrak{B}_{n,\gamma}$ будет **B**-однородной и степень ее ненасыщения равна γ. Тем самым булева алгебра $\mathfrak{B}$ представима в виде прямой суммы **B**-однородных компонент

$$\mathfrak{B} = \sum_{n<k}{}^{\oplus} \sum_{\gamma \in \Gamma_n}{}^{\oplus} \mathfrak{B}_{n,\gamma},$$

где k, Γ_n, $b_{n,\gamma} := \wedge\{b \in B : e_{n,\gamma} \leqslant b\}$ удовлетворяют условиям 1)–3). Такое разложение позволяет указать полную систему инвариантов **B**-нормированной булевой алгебры.

М е т р и ч е с к и м п а с п о р т о м алгебры $(\mathfrak{B}, \lambda)$ назовем последовательность троек $\mathrm{T} := (\Gamma_n, (b_{n,\gamma})_{\gamma \in \Gamma_n}, (\lambda e_{n,\gamma})_{\gamma \in \Gamma_n})_{n<k}$. Если в T убрать последние элементы троек, то полученная последовательность пар – п а с п о р т. Скажем, что метрические паспорта T и $\mathrm{T}' := (\Gamma'_n, (b'_{n,\gamma})_{\gamma \in \Gamma_n}, (\lambda' e'_{n,\gamma})_{\gamma \in \Gamma'_n})_{n<k'}$, к о н г р у э н т н ы, если $k = k'$, $\Gamma_n = \Gamma'_n$ и существует такой автоморфизм π булевой алгебры **B**, что $\pi b_{n,\gamma} = b'_{n,\gamma}$ и $\pi^{*}\lambda e_{n,\gamma} = \lambda' e'_{n,\gamma}$ для всех $n < k$ и $\gamma \in \Gamma_n$, где π^{*}-изоморфизм $\mathbf{B}(\mathbf{R})$, порожденный автоморфизмом π.

Конгруэнтность паспортов определяется аналогично.

Т е о р е м а 5. *Существует сохраняющий меру изоморфизм между* **B**-*нормированными булевыми алгебрами в том и только в том случае, если их метрические паспорта конгруэнтны.* **B**-*нормированные булевы алгебры изоморфны в том и только том случае, если они имеют конгруэнтные паспорта.*

5°. Возьмем теперь полную булеву алгебру $\mathscr{B}$ и произвольную строго положительную o-непрерывную меру $\lambda: \mathscr{B} \to F$, где F – некоторое K-пространство. Без ограничения общности можно считать $F = \mathcal{R}\downarrow$ для поля действительных чисел $\mathcal{R}$ в модели $V^{(\mathbf{B})}$. Модифицированный подъем (см. [10]) ν меры λ будет конечно-аддитивной числовой функцией на булевой алгебре $\mathscr{B}^{\wedge}$ внутри $V^{(\mathbf{B})}$. Фактор-алгебра $\mathscr{B}^{\wedge}/\nu^{-1}(0)$ имеет строго положительную конечно-аддитивную меру $\tilde{\nu}$. Пусть $\tilde{\mathscr{B}}$ – метрическое пополнение этой алгебры, а $\tilde{\lambda}$– продолжение по непрерывности меры $\tilde{\nu}$. Тогда $(\tilde{\mathscr{B}}, \tilde{\lambda})$ – нормированная булева алгебра. Если элементу $c \in \mathscr{B}$ сопоставить $\iota c \in \in V^{(\mathbf{B})}$ так, что $[\![\iota c$ – класс эквивалентности элемента $c^{\wedge} \in \mathscr{B}^{\wedge}]\!] = 1$, то получится булев гомоморфизм $\iota: \mathscr{B} \to \tilde{\mathscr{B}}\downarrow$, причем $[\![\lambda c = \tilde{\lambda}\iota c]\!] = 1$, $c \in \mathscr{B}$. Можно считать, что $[\![\tilde{\mathscr{B}}$ – безатомная$]\!] = 1$, ибо в противном случае можно заменить $\tilde{\mathscr{B}}$ на $\tilde{\mathscr{B}} \otimes J$. Положим $\mathscr{B}^* := \tilde{\mathscr{B}}\downarrow$ и $\lambda^* := \tilde{\lambda}\downarrow$. Привлекая теперь теоремы 1 и 4, приходим к таким результатам.

Теорема 6. *Существует* **B**-*нормированная булева алгебра* $(\mathscr{B}^*, \lambda^*)$ *такая, что* $(\mathscr{B}, \lambda)$ *строго изометрична правильной подалгебре в* $\mathscr{B}^*$.

Теорема 7. *Существует безатомная нормированная булева алгебра* $\mathcal{A}$ *такая, что* $(\mathscr{B}, \lambda)$ *строго изометрична правильной подалгебре некоторой компоненты в* **B**-*нормированной алгебре* $C_\infty(Q, \mathcal{A})$.

Автор сердечно благодарен проф. Д. Магарам Стоун, обратившей его внимание на публикации [1–4].

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
14 III 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maharam D.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1949, vol. 65, p. 279–330. 2. *Maharam D.* – Ibid., 1953, vol. 75, p. 154–184. 3. *Maharam D.* – Ibid., 1955, vol. 79, p. 229–255. 4. *Maharam D.* – Contemporary Math., 1984, vol. 26, p. 263–277. 5. *Luxemburg W.A.J., Schep A.R.* – Indag. Math., 1978, vol. 81, p. 357–375. 6. *Кусраев А.Г.* – Сиб. мат. журн., 1984, т. 25, № 1, с. 69–79. 7. *Акилов Г.П., Колесников Е.В., Кусраев А.Г.* – ДАН, 1988, т. 298, № 3, с. 521–524. 8. *Владимиров Д.А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 9. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973. 10. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990. 11. *Гордон Е.И.* – ДАН, 1981, т. 258, № 4, с. 777–780. 12. *Maharam D.* – Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1942, vol. 28, p. 108–111.