Доклады Академии наук
1992. Том 325, № 4

УДК 517.95 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

© Академик А.А. ВОРОНОВ

СИНТЕЗ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ПО ИЗМЕРИМЫМ ВЫХОДУ И ВХОДУ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

Задача синтеза модальных регуляторов, обеспечивающих передаточной функции системы заданное значение ее мод (полюсов и нулей), детально решена для регуляторов, действующих по переменным состояния системы. Такие регуляторы могут смещать полюсы, оставляя неизменными нули, хотя последние существенно влияют на переходные процессы. Если часть переменных состояния недоступна для измерения, считается, что модальное управление невозможно без введения в схему наблюдателей или оценивателей состояния, а это значительно усложняет схему.

В данной работе показано, что при соблюдении определенных условий всегда можно синтезировать модальный двухблочный регулятор, сдвигающий в заданное положение все полюсы и нули и действующий только по измеримым выходу и входу системы, доступным для измерения. Предложена методика синтеза таких регуляторов.

Из нескольких возможных схем двухблочных модальных регуляторов для объектов с одним входом и одним выходом рассмотрим схему последовательно-параллельной коррекции, представленную на рис. 1. На ней изображены: объект с передаточной

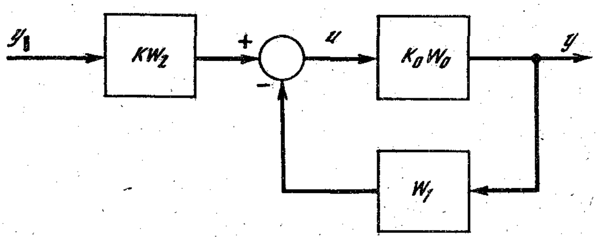

Рис. 1

функцией $K_o W_o$, его вход u и выход y, блок отрицательной обратной связи и блок последовательной коррекции с передаточными функциями W_1 и $K W_2$ соответственно и внешнее задающее воздействие $y_в$, которое должно воспроизводиться выходом объекта y [1–4].

Задана передаточная функция объекта

$$K_o W_o = \frac{K_o M_o}{D_o} = \frac{p^{m_o} + b_{o1} p^{m_o - 1} + \ldots + b_{o m_o}}{p^{n_o} + a_{o1} p^{n_o - 1} + \ldots + a_{o n_o}}, \tag{1}$$

где $K_o > 0$ – высокочастотный коэффициент усиления, M_o и D_o – полиномы комплексного p.

Передаточные функции блоков регулятора ищем в виде

$$(2)\quad \begin{aligned} W_1 &= \frac{M_1}{D_p} = \frac{\beta_{10}p^l + \beta_{11}p^{l-1} + \ldots + \beta_{1l}}{p^l + \alpha_1 p^{l-1} + \ldots + \alpha_l}, \\ KW_2 &= \frac{KM_2}{D_p} = \frac{K(p^l + \beta_{21}p^{l-1} + \ldots + \beta_{2l})}{p^l + \alpha_1 p^{l-1} + \ldots + \alpha_l}. \end{aligned}$$

Передаточная функция $K_з W_з$ изображенной на рис. 1 замкнутой системы

$$(3)\quad K_з W_з = \frac{KK_o W_o W_2}{1 + K_o W_o W_1} = \frac{KK_o M_o M_2}{D_o D_p + K_o M_o M_1}.$$

Для обеспечения качества процесса заданы все полюсы и нули передаточной функции системы и по ним с помощью формул Виета вычислена требуемая передаточная функция $K_т W_т$:

$$(4)\quad K_т W_т = \frac{K_т M_т}{D_т} = K_т \frac{p^{m_т} + b_{т1}p^{m_т - 1} + \ldots + b_{тm_т}}{p^{n_т} + a_{т1}p^{n_т - 1} + \ldots + a_{тn_т}}.$$

По условиям физической реализуемости передаточные функции объекта и системы должны удовлетворять условиям

$$m_o < n_o, \quad m_т < n_т,$$
$$0 < r_o \leqslant n_o, \quad 0 < r_т \leqslant n_т,$$
$$r_o = n_o - m_o, \quad r_т = n_т - m_т,$$

где r_i – относительные степени i-х передаточных функций.

В практике регуляторостроения для маломощных цепей регуляторов допускается равенство степеней числителя и знаменателя передаточной функции, т.е. допускается равенство $r_p = 0$.

Требуется выбрать порядок l регулятора и коэффициенты полиномов D_p, M_1 и M_2 так, чтобы обеспечивалось равенство

$$K_з W_з = \frac{KK_o M_o M_2}{D_o D_p + K_o M_o M_1} = \frac{K_т M_т}{D_т}.$$

Коэффициент K сразу выбирается из условия

$$K_з = KK_o = K_т.$$

Тогда из (2) следует

$$(5)\quad W_з = \frac{M_o M_2}{D_o D_p + K_o M_o M_1} = \frac{M_т}{D_т}.$$

Из (5) получается полиномиальное уравнение для нахождения искомых коэффициентов:

$$(6)\quad M_т D_o D_p - M_o M_2 D_т + K_o M_o M_1 = R = 0.$$

Уравнение (6) содержит три неизвестных полинома, и для существования его решения необходимо выполнить условия следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть $r_p = 0$, $r_o > 0$, $r_т > 0$. Тогда для существования решения полиномиального уравнения (6) необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) *относительные степени передаточных функций объекта и требуемой должны быть одинаковыми:*

(7) $r_о = r_т$;

2) *степень знаменателя $D_р$ передаточных функций блоков регулятора (степень l полинома $D_р$) удовлетворяет неравенствам:*

а) *если $n_о \neq n_т$ и неизвестными считаются коэффициенты всех полиномов $D_р, M_1$ и M_2, то*

$$l \geqslant \frac{n_о + n_т - r_о - 1}{2},$$

б) *если $n_о = n_т$, то при тех же неизвестных*

(8) $$l \geqslant n_о - \frac{r_о + 1}{2},$$

в) *если $n_о = n_т$ и коэффициенты M_2 заданы, то*

(9) $l = n_о - 1$;

3) *определитель системы алгебраических уравнений, получаемых от приравнивания нулю всех коэффициентов R, отличен от нуля.*

После выбора l и $r_т$ составляются выражения для всех полиномов и подставляются в (6). Перед решением полиномиального уравнения целесообразно, используя свойства $W_о$, максимально упростить уравнение, снизив степень R. Рассмотрим случаи различных $r_о$.

1) $r_о = 1$. Тогда из (8) следует $l = n_о - 1$, и, так как такую же степень имеют полиномы $M_о$ и $M_т$, полагаем

(10) $M_2 = M_т$, $D_р = M_о$.

Сократив в (5) множители $M_о$ и $M_т$, получаем уравнение

$$D_о - D_т + K_о M_1 = 0,$$

из которого находим

(11) $K_о M_1 = D_т - D_о$.

Соотношения (9), (10) и (11) представляют решения уравнения, из которых коэффициенты α_i β_{2i} находятся элементарно.

2) $1 < r_о < n_о$, $n_о = n_т$. В этом случае наименьшая возможная степень l больше степени $M_о$. Обозначив $\xi = l - m_о$, полагаем

(12) $M_2 = M_т \Lambda$, $D_р = M_о \mathrm{M}$,

где Λ и M – полиномы вида

(13) $\Lambda = p^{\xi} + \lambda_1 p^{\xi - 1} + \ldots + \lambda_{\xi}$, $\mathrm{M} = p^{\xi} + \mu_1 p^{\xi - 1} + \ldots + \mu_{\xi}$.

После подстановки их в (5) и сокращения множителей $M_т$ и $M_о$, получаем уравнение

(14) $D_о \mathrm{M} - D_т \Lambda + K_о M_1 = 0$.

Решение этого уравнения выполняется по лемме 2.

Лемма 2. *Число алгебраических уравнений, получаемых из* (14),

$N_R = l + r_о$.

Первые $r_o - 1$ из этих уравнений содержат только неизвестные μ_i и λ_i, которые полностью из них определяются. После их нахождения остальные $l + 1$ уравнений представляют рекуррентные соотношения, из которых коэффициенты полинома M_1 определяются в последовательности $\beta_{10}, \beta_{11}, \ldots$

3) $r_o = n_o = n_т$. В этом случае числители функций W_o и $W_т$ не содержат p и $M_o = M_т = 1$. Уравнение (6) принимает вид

$$D_o D_p - M_2 D_т + K_o M_1 = 0.$$

При этом из (8) имеем $l = n_o - 1$.

Преимущества описанной процедуры для случая, когда все коэффициенты полиномов D_o, M_1 и M_2 неизвестны, в том, что при ее использовании степень l получается минимально возможной. Ее недостаток в том, что найденные коэффициенты β_{2i} полинома M_2 могут не удовлетворять условиям Гурвица (так как замена функции $W_з$ желаемой функцией $W_т$ происходит за счет сокращения в (5) множителей M_o и M_2 и их замены полиномом $M_т$, то по условиям сохранения грубости и устойчивости системы полиномы M_o и M_2 должны быть гурвицевыми). Если для M_2 условия гурвицевости не выполняются, необходимо перейти к другому варианту синтеза: задать полином M_2 и считать неизвестными только коэффициенты полиномов D_p и M_1. При этом решение существует и выполняется проще, но степень l получается больше, чем при первом варианте. При этом используются условия леммы 3.

Лемма 3. *Пусть $n_o = n_т$ и полином M_2 задан. Тогда степень l полинома D_p определяется из условия $l = n_o - 1$.*

Методика решения аналогична описанной, но при $r_o > 1$ все неизвестные μ_i и β_{1i} в уравнении (14) находятся из рекуррентных соотношений, поскольку коэффициенты λ_i заданы.

Предельный минимальный модальный регулятор. Если регулятор состоит из мощных инерционных блоков, сделанное выше допущение $r_p = 0$ может оказаться неприемлемым. Тогда можно принять $r_p = 1$. При этом должно выполняться условие

$$r_т = r_o + 1,$$

т.е. функции W_o и $W_т$ уже не будут подобными. Наименьшая возможная степень l определяется из условий: если неизвестны все коэффициенты $\alpha_i, \beta_{2i}, \beta_{1i}$, то

$$l \geqslant n_o - \frac{r_o - 1}{2},$$

если же коэффициенты полинома M_2 заданы, то

$$l = 2n_o - r_o.$$

Порядок передаточной функции $W_т$ может и не быть равным порядку W_o, как рассматривалось выше. Регулятор можно построить и так, что порядок $W_т$ может стать и ниже порядка W_o. Его наименьшее возможное значение равно относительной степени передаточной функции объекта, т.е.

$$(n_т)_{\min} = \begin{cases} r_o, & \text{если } r_p = 0, \\ r_o + 1, & \text{если } r_p = 1. \end{cases}$$

При этом $m_т = 0$, $M_т = 1$. Регулятор, обеспечивающий наименьшее возможное значение $n_т$, назван **предельным минимальным модальным регулятором**. Для предельных регуляторов степень l определяется из условий:

$$l \begin{cases} \geqslant (n_o - 1)/2, & \text{если} \quad r_p = 0, \quad \text{неизвестны } M_1, M_2 \text{ и } D_p, \\ = n_o - 1, & \text{если} \quad r_p = 0, \quad M_2 \text{ задан}, \\ \geqslant (n_o + 1)/2, & \text{если} \quad r_p = 1, \quad \text{неизвестны } M_1, M_2 \text{ и } D_p, \\ = n_o, & \text{если} \quad r_p = 1, \quad M_2 \text{ задан}. \end{cases}$$

В остальном процедура синтеза аналогична рассмотренной выше.

Заметим, что в [5] исследована схема двухблочного регулятора с двумя отрицательными обратными связями для случаев $r_p = 0$ и $n_o = n_т = 2$; для более высоких порядков рекомендовано использовать метод пространства состояний. В данной работе надобности в этом нет, весь синтез проводится в терминах передаточных функций.

Институт системного анализа Российской Академии наук Москва

Поступило 8 V 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chon Chi-Tsong.* Introduction to linear system theory. N.Y., 1970. 428 p. 2. *Porter B., Grosseley T.R.* Modal control theory and applications. L., 1972. 233 p. 3. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с. 4. Справочник по теории автоматического регулирования/Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987, с. 435–466. 5. *Slotine J.-J., Weiping Li.* Applied nonlinear control. Englewood Cliffs; New Jersey: Prentice Hall, 1991. 459 p.