А. И. Кожанов, О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа, *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, 2008, том 8, выпуск 3, 81–99

УДК 517.946

А. И. Кожанов

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УРАВНЕНИЯХ СОСТАВНОГО ТИПА*

Для уравнений составного типа, называемых также псевдогиперболическими уравнениями, исследуется разрешимость некоторых задач нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента, зависящего от временной переменной. Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования регулярных решений.

Введение

Задачи определения вместе с решением того или иного уравнения с частными производными также неизвестного коэффициента (коэффициентов) самого уравнения называются обратными. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического и гиперболического типов; в исследования разрешимости таких задач существенный вклад внесли М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, Ю. Е. Аниконов, А. И. Прилепко, Ю. Я. Белов, А. М. Денисов, А. Лоренци, М. И. Иванчов, С. И. Кабанихин, Г. Н. Ерохин, Б. А. Бубнов, Н. Я. Безнощенко, Д. Г. Орловский, Дж. Кэннон, М. Клибанов, М. Ямамото (достаточно полную библиографию работ последнего времени, связанных с обратными задачами для уравнений с частными производными, можно найти в монографиях [1–14]). Значительно менее изученными представляются обратные задачи для неклассических уравнений — в частности, для уравнений составного типа. Для уравнений, называемых иногда псевдопараболическими, некоторые обратные задачи изучались в работах [15–19], для уравнений же составного типа второго порядка по времени (именно о таких уравнениях ниже будет идти речь) коэффициентные обратные задачи ранее не изучались.

Используемая в настоящей работе техника основана на переходе от исследуемой обратной задачи к новой краевой задаче для так называемого «нагруженного» [20–21] уравнения с частными производными, доказательстве ее разрешимости и доказательстве далее того, что решение нагруженного уравнения порождает решение рассматриваемой обратной задачи (примеры использования данной техники можно найти в работах [22–24]).

Отметим также следующее. Интерес к обратным задачам с неизвестным коэффициентом, зависящим лишь от временной переменной, можно объяснить не только интересом к решению новых математических задач, но и тем, что они возникают в приложениях — в задачах управления [25], в задачах со свободной границей [26–27].

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00439) и Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 48).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 81–99

§ 1. Постановка задач

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ, T есть положительное число, Q есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i,j=1,\ldots,n$, $b(x,t)$, $K(x,t)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $\mu(t)$ — заданные при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$ функции. Далее, пусть B есть дифференциальный оператор

$$Bu=b^{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+b^i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n), $\nu=\nu(x)=(\nu_1(x),\ldots,\nu_n(x))$ — вектор внутренней нормали к границе Γ области Ω в точке x.

Обратная задача I. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_{tt}-\Delta u_t-Bu+q(t)u_t=f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)}=0, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega}K(x,t)u(x,t)\,dx=\mu(t),\quad t\in(0,T). \tag{4}$$

Обратная задача II. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_{tt}-\Delta u_t-Bu+q(t)u=f(x,t), \tag{5}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2)–(4).

Обратная задача III. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением* (1), *при выполнении для функции $u(x,t)$ условий* (2) *и* (4), *а также условия*

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma\times(0,T)}=0. \tag{6}$$

Обратная задача IV. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением* (5), *при выполнении для функции $u(x,t)$ условий* (2), (4) *и* (6).

В рассматриваемых обратных задачах I–IV условия (2) и (3) или же (2) и (6) есть условия первой либо второй начально-краевых задач, условие же (4) есть интегральное условие переопределения.

§ 2. Разрешимость обратных задач I и II

Обозначим через $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$ следующие пространства:

$$\overset{\circ}{V}_1=\{v(x,t):\ v(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$
$$v_t(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),\quad v_{tt}(x,t)\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))\},$$

$$\overset{\circ}{V}_2 = \{v(x,t): \ v(x,t) \in \overset{\circ}{V}_1, \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))\}$$

с нормами, определенными естественным образом:

$$\|v\|_{\overset{\circ}{V}_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))},$$
$$\|v\|_{\overset{\circ}{V}_2} = \|v\|_{\overset{\circ}{V}_1} + \sum_{i,j=1}^{n} \|v_{x_ix_jtt}\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}.$$

Для функций $v(x,t)$ из пространств $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$ для почти всех t из отрезка $[0,T]$ выполняются неравенства

$$\|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_0 \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_1 \|\Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{7}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|v_{x_ix_j}(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_2 \|\Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + c_3 \|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{8}$$

$$\int_0^t \|v(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\, d\tau \le 2T^2 \int_0^t \|v_\tau(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\, d\tau + 2T\|v(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{9}$$

с некоторыми положительными постоянными $c_0, \dots, c_3$ — см. [28]. Далее, определим дифференциальный оператор B_1:

$$B_1 v = b_t^{ij}(x,t) v_{x_ix_j} + b_t^i(x,t) v_{x_i} + b_t(x,t) v.$$

Предполагая, что коэффициенты операторов B и B_1 ограничены, нетрудно показать, что для функций $v(x,t)$ из пространств $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$ для почти всех t из отрезка $[0,T]$ выполняются неравенства

$$\|Bv(x,t) - \Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le b_1 \sum_{i,j=1}^{n} \|v_{x_ix_j}(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + b_2 \|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{10}$$

$$\|Bv(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le b_3 \sum_{i,j=1}^{n} \|v_{x_ix_j}(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + b_4 \|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{11}$$

$$\|B_1 v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le b_5 \sum_{i,j=1}^{n} \|v_{x_ix_j}(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + b_6 \|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{12}$$

с некоторыми постоянными $b_1, \dots, b_6$, определяющимися лишь функциями $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$ и $b(x,t)$, областью Ω и числом T.

Неравенства (7)–(12), а также собственно числа $c_0, \dots, c_3$, $b_1, \dots b_6$ нам понадобятся ниже. Определим другие величины, которые понадобятся далее.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ есть фиксированное число. Положим

$$F(t) = \int_\Omega K(x,t) f(x,t)\, dx, \quad \beta_1 = 2\max\Big(b_1c_2,\, 2(b_1c_3 + b_2)c_0T^2\Big),$$

$$\beta_2 = \varepsilon_0 \int_\Omega [\Delta u_1(x)]^2\, dx + \int_\Omega [\Delta u_0(x)]^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u^2_{1x_i}(x)\, dx +$$

$$+ 4T(b_1c_3+b_2)\int\limits_\Omega u_0^2(x)\,dx + 2\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f^2\,dx\,dt,$$

$$N_1 = \beta_2\exp(\beta_1 T), \quad N_2 = \beta_1 N_1 T + \beta_2,$$

$$N_3 = \Big(c_1 N_1 \max_{0\le t\le T}\int\limits_\Omega K_t^2(x,t)\,dx\Big)^{\frac12},$$

$$N_4 = (6+2b_3c_2)N_2 + 2(b_3c_3c_0+b_4c_0+b_5c_2+b_5c_3c_1+b_6c_1)N_1T +$$
$$+ 8(b_3c_2+b_3c_3c_1+b_4c_1)N_1 + 4N_1T\Big\{\frac{1}{\mu_1-N_3}\max_{0\le t\le T}[F(t)-\mu''(t)]+$$
$$+\frac{1}{\mu_1-N_3}[2(c_0N_1\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K_t^2(x,t)\,dx])^{\frac12} + (c_1N_1\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K_{tt}^2(x,t)\,dx])^{\frac12} +$$
$$+((b_3c_2+b_3c_3c_1+b_4c_1)N_1)^{\frac12}]\Big\}^2 + 4N_1N_2\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K^2(x,t)\,dx] +$$
$$+\Big|2\int\limits_Q f_t^2\,dx\,dt + 8\,\underset{0\le t\le T}{vrai\max}[\int\limits_\Omega f^2(x,t)\,dx] + 2\int\limits_\Omega[\Delta u_1(x)]^2\,dx -$$
$$-4\int\limits_\Omega Bu_0(x)\Delta u_1(x)\,dx - 4\int\limits_\Omega f(x,0)\Delta u_1(x)\,dx\Big|,$$

$$N_5 = 2\Big(c_0N_1\max_{0\le t\le T}\Big[\int\limits_\Omega K_t^2(x,t)\,dx\Big]\Big)^{\frac12} + \Big(c_1N_1\max_{0\le t\le T}\Big[\int\limits_\Omega K_{tt}^2(x,t)\,dx\Big]\Big)^{\frac12} +$$
$$+\Big(N_4\max_{0\le t\le T}\Big[\int\limits_\Omega K^2(x,t)\,dx\Big]\Big)^{\frac12} + \Big[(b_3c_2+b_3c_3c_1+b_4c_1)N_1\max_{0\le t\le T}\Big[\int\limits_\Omega K^2(x,t)\,dx\Big]\Big]^{\frac12}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$b^{ij}(x,t)\in C^1(\overline{Q}),\quad b^i(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad i,j=1,\dots,n,$$
$$b(x,t)\in C(\overline{Q}),\quad K(x,t)\in C^2(\overline{Q}); \tag{13}$$
$$f(x,t)\in L_2(Q),\quad f_t(x,t)\in L_2(Q),\quad u_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega);$$
$$u_1(x)\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\quad \mu(t)\in C^2([0,T]); \tag{14}$$
$$\mu'(t)\ge\mu_1>0,\quad F(t)-\mu''(t)\ge\mu_2>0\quad \text{при}\quad t\in[0,T]; \tag{15}$$
$$\int\limits_\Omega K(x,0)u_0(x)\,dx=\mu(0),\quad \int\limits_\Omega K(x,0)u_1(x)\,dx + \int\limits_\Omega K_t(x,0)u_0(x)\,dx = \mu'(0); \tag{16}$$
$$N_3<\mu_1,\quad N_5\le\mu_2. \tag{17}$$

Тогда обратная задача I *имеет решение* $\{u(x,t),q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in \overset{\circ}{V}_1$, $q(t)\in L_\infty([0,T])$, *причем коэффициент* $q(t)$ *неотрицателен и выражается через функцию* $u(x,t)$ *явным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся комбинацией метода срезок, метода неподвижной точки и метода регуляризации.

Пусть N есть заданное положительное число. Определим функцию $G_N(\xi)$ (срезку):

$$G_N(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если} \quad |\xi| \leq N, \\ N, & \text{если} \quad \xi > N, \\ -N, & \text{если} \quad \xi < -N. \end{cases}$$

Далее, для заданной функции $v(x,t)$ определим функции $\varphi(t,v)$, $\psi(t,v)$ и $\widetilde{q}(t,v)$:

$$\varphi(t,v) = \int\limits_\Omega K_t(x,t)v(x,t)\,dx,$$

$$\psi(t,v) = 2\int\limits_\Omega K_t(x,t)v_t(x,t)\,dx + \int\limits_\Omega K_{tt}(x,t)v(x,t)\,dx - \int\limits_\Omega K_{x_i}(x,t)v_{x_it}(x,t)\,dx +$$
$$+\int\limits_\Omega \left[K(x,t)b^i(x,t) - (K(x,t)b^{ij}(x,t))_{x_j}\right] v_{x_i}(x,t)\,dx + \int\limits_\Omega K(x,t)b(x,t)v(x,t)\,dx -$$
$$-\int\limits_\Gamma K(x,t)\frac{\partial v_t(x,t)}{\partial \nu}\,ds - \int\limits_\Gamma K(x,t)b^{ij}(x,t)v_{x_i}(x,t)\nu_j\,ds,$$

$$\widetilde{q}(t,v) = \frac{F(t) - \mu''(t) + G_{\mu_2}(\psi(t,v))}{\mu'(t) - G_{N_3}(\varphi(t,v))}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - \Delta u_t - Bu + \widetilde{q}(t,u)u_t = f(x,t) \tag{$1'$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3).

Уравнение ($1'$) представляет собой нелинейное нагруженное уравнение составного типа. Разрешимость поставленной краевой задачи для этого уравнения докажем с помощью метода регуляризации и метода неподвижной точки.

Пусть ε есть число из полуинтервала $(0,\varepsilon_0]$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - \varepsilon\Delta u_{tt} - \Delta u_t - Bu + \widetilde{q}(t,u)u_t = f(x,t) \tag{$1'_\varepsilon$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3). Наконец, пусть $v(x,t)$ есть функция из пространства $\overset{\circ}{V}_2$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - \varepsilon\Delta u_{tt} - \Delta u_t - Bu + \widetilde{q}(t,v)u_t = f(x,t) \tag{$1'_{\varepsilon,v}$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3). Данная краевая задача является первой начально-краевой задачей для уравнений составного типа, разрешимость ее при выполнении для функции $f(x,t)$ лишь включения $f(x,t) \in L_2(Q)$, выполнении условий (13), (15) и (16), а также включений условия (14) для функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $\mu(t)$ в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$ установлена в [29] (некоторые комментарии см. в Дополнении). Следовательно, краевая задача ($1'_{\varepsilon,v}$), (2), (3) при выполнении указанных условий порождает оператор Φ, переводящий пространство $\overset{\circ}{V}_2$ в себя: $\Phi(v) = u$. Докажем, что этот оператор имеет в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$ неподвижные точки.

Покажем, что для решений краевой задачи $(1'_{\varepsilon,v})$, (2), (3) имеют место нужные априорные оценки.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_\Omega [u_{\tau\tau}-\varepsilon\Delta u_{\tau\tau}-\Delta u_\tau-\Delta u-Bu+\widetilde{q}(\tau,v)u_\tau]\Delta u_\tau\,dx\,d\tau=\int_0^t\int_\Omega (f-\Delta u)\Delta u_\tau\,dx\,d\tau,$$

являющееся следствием уравнения $(1'_{\varepsilon,v})$. Интегрируя по частям, используя условия (2) и (3), неравенства (7)–(10), применяя неравенство Юнга, а также учитывая неотрицательность функции $\widetilde{q}(t,v)$, нетрудно от данного равенства перейти к неравенству

$$\varepsilon\int_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2\,dx+\int_0^t\int_\Omega (\Delta u_\tau)^2\,dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega u^2_{x_it}(x,t)\,dx+\int_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\,dx\le$$
$$\le\beta_1\left[\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega u^2_{x_i\tau}\,dx\,d\tau+\int_0^t\int_\Omega (\Delta u)^2\,dx\,d\tau\right]+\beta_2.$$

Лемма Гронуолла и полученное неравенство дают априорные оценки

$$\sum_{i=1}^n\int_\Omega u^2_{x_it}(x,t)\,dx+\int_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\,dx\le N_1, \tag{18}$$

$$\varepsilon\int_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2\,dx+\int_0^t\int_\Omega (\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau\le N_2, \tag{19}$$

$$\int_\Omega u^2(x,t)\,dx\le c_1N_1, \tag{20}$$

$$\int_\Omega u_t^2(x,t)\,dx\le c_0N_1. \tag{21}$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_\Omega [u_{\tau\tau}-\varepsilon\Delta u_{\tau\tau}-\Delta u_\tau-\Delta u-Bu+\widetilde{q}(\tau,v)u_\tau]\Delta u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau=$$
$$=-\int_0^t\int_\Omega f\Delta u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau, \tag{22}$$

также являющееся следствием уравнения $(1'_{\varepsilon,v})$. Интегрируя в левой части равенства и используя условия (2) и (3), нетрудно получить равенство

$$\varepsilon\int_0^t\int_\Omega (\Delta u_{\tau\tau})^2\,dx\,d\tau+\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega u^2_{x_i\tau\tau}\,dx\,d\tau+\frac{1}{2}\int_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2\,dx=$$
$$=-\int_0^t\int_\Omega f\Delta u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau-\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega \widetilde{q}(\tau,v)u_{x_i\tau}u_{x_i\tau\tau}\,dx\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_\Omega Bu_\tau\Delta u_\tau\,dx\,d\tau+\int_0^t\int_\Omega B_1u\Delta u_\tau\,dx\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{\Omega} Bu(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega} Bu_0\Delta u_1\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\Delta u_1)^2\,dx.$$

Применяя далее неравенство Юнга, неравенства (7), (8), (11) и (12), используя оценки (18)–(22) и учитывая представление функции $\widetilde{q}(\tau,v)$, получаем, что для решений краевой задачи $(1'_{\varepsilon,v})$, (2), (3) будет выполняться априорная оценка

$$\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta u_{\tau\tau})^2\,dx\,d\tau + \sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u^2_{x_i\tau\tau}\,dx\,d\tau + \int\limits_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2\,dx \le$$
$$\le C_1\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta v_\tau)^2\,dx\,d\tau + C_2 + C_3\varepsilon^{-1}\int\limits_Q f^2\,dx\,dt \quad (23)$$

с некоторыми постоянными $C_1,\dots,C_3$, определяющимися лишь коэффициентами оператора B, функциями $u_0(x)$ и $u_1(x)$, областью Ω и числом T.

Пусть M_i, $i=1,2$ есть заданные положительные числа. Определим множество W:

$$W = \{v(x,t)\in \overset{\circ}{V}_2:\ \|\Delta v_t(x,t)\|^2_{L_2(Q)} + \|v_t(x,t)\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} +$$
$$+\|\Delta v(x,t)\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\le M_1,\quad \varepsilon\|\Delta v_{tt}(x,t)\|^2_{L_2(Q)} + \|v_{tt}(x,t)\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} +$$
$$+\|\Delta v_t(x,t)\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\le M_2\}.$$

Из оценок (18)–(21) следует, что можно выбрать число M_1 настолько большим, что для решений краевой задачи $(1'_{\varepsilon,v})$, (2), (3) будет выполняться первое неравенство, определяющее множество W. Далее, из оценки (23) следует, что при фиксированном значении числа M_1 можно выбрать число M_2 настолько большим, что для решений краевой задачи $(1'_{\varepsilon,v})$, (2), (3) будет выполняться и второе неравенство, определяющее множество W.

Из проведенных рассуждений вытекает, что множество W, определяющееся выбранными указанным образом числами M_1 и M_2, оператором Φ переводится в себя.

Очевидно, что множество W замкнуто, выпукло и ограничено в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$.

Покажем, что оператор Φ вполне непрерывен на пространстве $\overset{\circ}{V}_2$.

Пусть $\{v_m(x,t)\}$ есть последовательность функций из пространства $\overset{\circ}{V}_2$, сходящаяся в этом пространстве к функции $v(x,t)$, и пусть оператор Φ переводит функции $v_m(x,t)$ и $v(x,t)$ в функции $u_m(x,t)$ и $u(x,t)$ соответственно.

Положим $w_m(x,t)=u_m(x,t)-u(x,t)$. Для функций $w_m(x,t)$ выполняются соотношения

$$w_{mtt} - \varepsilon\Delta w_{mtt} - \Delta w_{mt} - Bw_m + \widetilde{q}(t,v)w_{mt} = [\widetilde{q}(t,v) - \widetilde{q}(t,v_m)]u_{mt},$$
$$w_m(x,0) = w_{mt}(x,0) = 0,$$
$$w_m(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0.$$

Повторяя доказательство оценок (18)–(21), (23), нетрудно установить, что для семейства функций $\{w_m(x,t)\}$ будет выполняться оценка

$$\|w_m(x,t)\|^2_{\overset{\circ}{V}_2} \le N_0\int\limits_Q[\widetilde{q}(t,v) - \widetilde{q}(t,v_m)]^2u^2_{mt}\,dx\,dt \quad (24)$$

с некоторой постоянной N_0, определяющейся лишь коэффициентами оператора B, областью Ω, числами T и ε. Заметим, что для семейства функций $\{u_m(x,t)\}$ оценки (18)–(21), (23) имеют место. Следовательно, от оценки (24) мы можем перейти к оценке

$$\|w_m(x,t)\|^2_{\overset{\circ}{V}_2} \le c_0 N_1 N_0 \int\limits_0^T [\widetilde{q}(t,v) - \widetilde{q}(t,v_m)]^2\,dt. \tag{25}$$

Имеет место равенство

$$\widetilde{q}(t,v) - \widetilde{q}(t,v_m) = \frac{1}{[\mu'(t) - G_{N_3}(\varphi(t,v))][\mu'(t) - G_{N_3}(\varphi(t,v_m))]} \times$$
$$\times\{\mu'(t)[G_{\mu_2}(\psi(t,v)) - G_{\mu_2}(\psi(t,v_m))] +$$
$$+[F(t) - \mu''(t)][G_{N_3}(\varphi(t,v)) - G_{N_3}(\varphi(t,v_m))] +$$
$$+G_{N_3}(\varphi(t,v))[G_{\mu_2}(\psi(t,v_m)) - G_{\mu_2}(\psi(t,v))] +$$
$$+G_{\mu_2}(\psi(t,v))[G_{N_3}(\varphi(t,v)) - G_{N_3}(\varphi(t,v_m))]\}.$$

Учитывая неравенства $\mu'(t) - G_{N_3}(\varphi(t,v)) \ge \mu_1 - N_3 > 0$, $\mu'(t) - G_{N_3}(\varphi(t,v_m)) \ge$ $\ge \mu_1 - N_3 > 0$, используя липшицевость и ограниченность функций $G_{\mu_2}(\xi)$ и $G_{N_3}(\xi)$, нетрудно показать, что следствием данного равенства является оценка

$$|\widetilde{q}(t,v) - \widetilde{q}(t,v_m)| \le \widetilde{N}_0 \Big\{ \int\limits_\Omega [v_m(x,t) - v(x,t)]^2\,dx +$$
$$+ \int\limits_\Omega [v_{mt}(x,t) - v(x,t)]^2\,dx + \int\limits_\Omega [\Delta v_m(x,t) - \Delta v(x,t)]^2\,dx +$$
$$+ \int\limits_\Omega [\Delta v_{mt}(x,t) - \Delta v_t(x,t)]^2\,dx \Big\}^{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

постоянная $\widetilde{N}_0$ в котором определяется лишь функциями $K(x,t)$, $\mu(t)$, $f(x,t)$, коэффициентами оператора B и областью Ω.

Из оценок (25) и (26) вытекает очевидная оценка

$$\|w_m(x,t)\|^2_{\overset{\circ}{V}_2} \le \widetilde{\widetilde{N}}_0 \|v_m(x,t) - v(x,t)\|_{\overset{\circ}{V}_2},$$

из которой и следует непрерывность оператора Φ.

Докажем теперь, что оператор Φ компактен.

Пусть $\{v_m(x,t)\}$ есть ограниченная последовательность функций из пространства $\overset{\circ}{V}_2$, $\{u_m(x,t)\}$ есть последовательность образов функций $v_m(x,t)$ при действии оператора Φ. Оценки (18)–(21), (23) означают, что последовательность $\{u_m(x,t)\}$ также будет ограниченной в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$ последовательностью. Ограниченность в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$ последовательностей $\{v_m(x,t)\}$ и $\{u_m(x,t)\}$, теоремы о компактности вложений $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$, $W_2^1(Q) \subset L_2(\Gamma)$ [30–31], о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду [31], и о слабой компактности ограниченного в L_2 множества [32] дают существование функций $v(x,t)$ и $u(x,t)$, а также подпоследовательностей $\{v_{m_k}(x,t)\}$ и $\{u_{m_k}(x,t)\}$ таких, что при $k \to \infty$

$v_{m_k}(x,t) \to v(x,t)$ *сильно в* $L_2(Q)$ *и почти всюду в* Q,

$v_{m_k t}(x,t) \to v_t(x,t)$ *сильно в* $L_2(Q)$ *и почти всюду в* Q,
$v_{m_k x_i}(x,t) \to v_{x_i}(x,t)$ *сильно в* $L_2(\Gamma \times (0,T))$ *и почти всюду на* $\Gamma \times (0,T)$,
$v_{m_k x_i t}(x,t) \to v_{x_i t}(x,t)$ *сильно в* $L_2(\Gamma \times (0,T))$ *и почти всюду на* $\Gamma \times (0,T)$,
$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t)$, $u_{m_k x_i}(x,t) \to u_{x_i}(x,t)$, $u_{m_k x_i x_j}(x,t) \to u_{x_i x_j}(x,t)$,
$u_{m_k x_i x_j t}(x,t) \to u_{x_i x_j t}(x,t)$, $u_{m_k tt}(x,t) \to u_{tt}(x,t)$, $u_{m_k x_i tt}(x,t) \to u_{x_i tt}(x,t)$,
$u_{m_k x_i x_j tt}(x,t) \to u_{x_i x_j tt}(x,t)$ *слабо в* $L_2(Q)$
(здесь $i,\, j = 1, \ldots, n$). (27)

Из указанных сходимостей следует, что предельные функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ связаны в цилиндре Q уравнением $(1'_{\varepsilon,v})$. Положим $w_k(x,t) = u_{m_k}(x,t) - u(x,t)$. Для функций $w_k(x,t)$ выполняется неравенство (25). Используя представление функции $\widetilde{q}(t,v) - \widetilde{q}(t,v_{m_k})$, нетрудно получить неравенство

$$\|w_k(x,t)\|_{\overset{\circ}{V}_2} \le N'_0 \Big\{ \int\limits_Q [(v - v_{m_k})^2 + (v_t - v_{m_k t})^2]\, dx\, dt + \\ + \int\limits_0^T \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial v_t}{\partial \nu} - \frac{\partial v_{m_k t}}{\partial \nu} \right)^2 ds\, dt + \int\limits_0^\pi \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial v_{m_k}}{\partial \nu} \right)^2 ds\, dt \Big\},$$

постоянная N'_0 в котором определяется лишь функциями $K(x,t)$, $\mu(t)$, $f(x,t)$, коэффициентами оператора B, областью Ω и числами T и ε. Из этого неравенства и из указанных выше сходимостей следует, что у ограниченной в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$ последовательности $\{v_m(x,t)\}$ имеется подпоследовательность $\{v_{m_k}(x,t)\}$ такая, что последовательность $\{\Phi v_{m_k}(x,t)\}$ сходится в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$. А это и означает компактность оператора Φ.

Итак, оператор Φ переводит определенное выше замкнутое выпуклое ограниченное множество W в себя и является вполне непрерывным в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$ оператором. Согласно теореме Шаудера, оператор Φ имеет в множестве W по крайней мере одну неподвижную точку — функцию $u^\varepsilon(x,t)$. Эта функция, очевидно, является решением краевой задачи $(1'_\varepsilon)$, (2), (3) с фиксированным параметром ε. Покажем, что при наличии дополнительного условия $f_t(x,t) \in L_2(Q)$ с помощью решений $u^\varepsilon(x,t)$, априорных оценок и предельного перехода можно доказать разрешимость краевой задачи $(1')$, (2), (3).

Для семейства функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ выполняются оценки (18)–(21). Далее, интегрируя по частям по переменной τ в правой части равенства (23), соответствующего уравнению $(1'_\varepsilon)$, в остальном же повторяя все выкладки, которые привели к оценке (24), получаем, что будет выполняться оценка

$$\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u^\varepsilon_{\tau\tau})^2\, dx\, d\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (u^\varepsilon_{x_i \tau\tau})^2\, dx\, d\tau + \int\limits_\Omega (\Delta u^\varepsilon_t(x,t))^2\, dx \le N_4. \tag{28}$$

Из доказанных равномерных по ε оценок (18)–(21), (28), теорем вложения [30–31], теоремы о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду [31], и теоремы о слабой компактности ограниченного в L_2 множества [32] следует существование функции $u(x,t)$, последовательности $\{\varepsilon_m\}$ положительных чисел и функциональной последовательности $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ таких, что $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$, для последовательности $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ при $m \to \infty$ имеют место все сходимости (27), за исключением последней, которая меняется на сходимость $\varepsilon_m u^{\varepsilon_m}_{x_i x_j tt}(x,t) \to 0$ при $m \to \infty$, $i,\, j = 1, \ldots, n$.

Из указанных сходимостей следует, что предельная функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству $\overset{\circ}{V}_1$ и будет представлять собой решение краевой задачи ($1'$), (2), (3).

Оценки (18)–(21), (28) означают, что для функции $u(x,t)$ будут выполняться неравенства

$$|\varphi(t,u)| \le N_3, \quad |\psi(t,u)| \le N_5.$$

Из этих неравенств и из условия (17) следует, что выполняются равенства

$$G_{\mu_2}(\psi(t,u)) = \psi(t,u), \quad G_{N_3}(\varphi(t,u)) = \varphi(t,u).$$

Положим

$$q(t) = \frac{F(t) - \mu''(t) + \psi(t,u)}{\mu'(t) - \varphi(t,u)}.$$

Очевидно, что решение $u(x,t)$ уравнения ($1'$) и функция $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1). Умножим уравнение (1) с указанной выше функцией $q(t)$ на функцию $K(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω. Полученное равенство и представление функции $q(t)$ дают следующую систему:

$$q(t)\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx - \varphi(t,u)\right] = F(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx + \psi(t,u),$$

$$q(t)\left[\mu'(t) - \varphi(t,u)\right] = F(t) - \mu''(t) + \psi(t,u).$$

Вычитая из первого равенства второе и обозначая

$$\alpha(t) = \int\limits_\Omega K(x,t)u(x,t)\,dx - \mu(t),$$

получим равенство

$$q(t)\alpha'(t) + \alpha''(t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{29}$$

Поскольку функция $q(t)$ неотрицательна и поскольку $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$ (эти равенства следуют из условий согласования (16)), то из (29) очевидным образом вытекает тождество $\alpha(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Это тождество означает, что для построенного решения $u(x,t)$ будет выполняться условие переопределения (4).

Построенные функции $u(x,t)$ и $q(t)$ и дадут требуемое решение обратной задачи I.

Теорема доказана.

Пример задачи, для которой выполняются все условия теоремы 1, будет приведен в дополнении.

Перейдем к исследованию разрешимости обратной задачи II.

Положим

$$\mu_0 = \min_{0\le t\le T}\mu(t), \quad \mu_3 = vrai\max_{0\le t\le T}\frac{F(t)-\mu''(t)}{\mu(t)}, \quad \beta_3 = \beta_1 + \max(2\mu_3 c_1, 2\mu_3),$$

$$\beta_4 = \frac{2c_1}{\mu_0}\Bigg\{2\Big[c_0\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K_t^2(x,t)\,dx]\Big]^{\frac12} + \Big[c_1\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K_{tt}^2(x,t)\,dx]\Big]^{\frac12} +$$

$$+ \Big[(b_3c_2 + b_4c_1)\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K^2(x,t)\,dx]\Big]^{\frac12}\Bigg\}, \quad \beta_5 = \frac{2c_1^2}{\mu_0^2}\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K^2(x,t)\,dx],$$

$$\alpha_0 = \beta_2 + \frac{\beta_3 T}{2} + 4\beta_4 T, \quad \beta_0 = \frac{\beta_3}{2} + \frac{3\beta_4}{4} + \beta_5, \quad T^* = \frac{1}{\alpha_0\beta_0}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (13)–(14), (16) *теоремы* 1, *а также условия* $\mu_0 > 0$, $T < T^*$. *Тогда обратная задача* II *имеет решение* $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in \overset{\circ}{V}_1$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$, *причем коэффициент* $q(t)$ *выражается через функцию* $u(x,t)$ *явным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N есть фиксированное положительное число, $v(x,t)$ есть заданная функция, $\widetilde{q}(t,v)$ есть функция

$$\widetilde{q}(t,v) = \frac{F(t) - \mu''(t)}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} G_N(\psi(t,v)).$$

Повторяя рассуждения, с помощью которых была установлена разрешимость краевой задачи $(1'_\varepsilon)$, (2), (3), нетрудно показать, что существует функция $u^\varepsilon(x,t)$, принадлежащая пространству $\overset{\circ}{V}_2$, являющаяся решением уравнения

$$u^\varepsilon_{tt} - \varepsilon\Delta u^\varepsilon_{tt} - \Delta u^\varepsilon_t - Bu^\varepsilon + \widetilde{q}(t,u^\varepsilon)u^\varepsilon = f(x,t) \tag{$5'_\varepsilon$}$$

и такая, что для нее выполняются условия (2) и (3).

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega [u^\varepsilon_{\tau\tau} - \varepsilon\Delta u^\varepsilon_{\tau\tau} - \Delta u^\varepsilon_\tau - \Delta u^\varepsilon - Bu^\varepsilon + \widetilde{q}(\tau,u^\varepsilon)u^\varepsilon]\Delta u^\varepsilon_\tau\,dx\,d\tau = \\ = \int_0^t \int_\Omega (f - \Delta u^\varepsilon)\Delta u^\varepsilon_\tau\,dx\,d\tau.$$

Следствием этого равенства является неравенство

$$\varepsilon\int_\Omega [\Delta u^\varepsilon_t(x,t)]^2\,dx + \int_0^t\int_\Omega (\Delta u^\varepsilon_\tau)^2\,dx\,d\tau + \sum_{i=1}^n \int_\Omega [u^\varepsilon_{x_i t}(x,t)]^2\,dx + \\ + \int_\Omega [\Delta u^\varepsilon(x,t)]^2\,dx \le \beta_1\left[\sum_{i=1}^n \int_0^t\int_\Omega [u^\varepsilon_{x_i\tau}]^2\,dx\,d\tau + \int_0^t\int_\Omega (\Delta u^\varepsilon)^2\,dx\,d\tau\right] + \beta_2 + \\ + 2\sum_{i=1}^n \int_0^t\int_\Omega |\widetilde{q}(\tau,u^\varepsilon)||u^\varepsilon_{x_i}||u^\varepsilon_{x_i\tau}|\,dx\,d\tau. \tag{30}$$

Положим

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega [u^\varepsilon_{x_i t}(x,t)]^2\,dx + \int_\Omega [\Delta u^\varepsilon(x,t)]^2\,dx.$$

Используя неравенства (8) и (11), учитывая представление функции $\widetilde{q}(t,u)$ и применяя неравенство Юнга, нетрудно получить неравенства

$$\varepsilon\int_\Omega [\Delta u^\varepsilon_t(x,t)]^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega (\Delta u^\varepsilon_\tau)^2\,dx\,d\tau + z(t) \le \\ \le \beta_2 + \beta_3\int_0^t z(\tau)\,d\tau + \beta_4\int_0^t z^{\frac{3}{2}}(\tau)\,d\tau + \beta_5\int_0^t\int_\Omega z^2(\tau)\,d\tau \le \\ \le \beta_2 + \frac{\beta_3 T}{2} + 4\beta_4 T + \left(\frac{\beta_3}{2} + \frac{3\beta_4}{4} + \beta_5\right)\int_0^t z^2(\tau)\,d\tau = \alpha_0 + \beta_0\int_0^t z(\tau)\,d\tau. \tag{31}$$

Оценки решений интегральных неравенств [33] дают как следствие неравенства (31) априорную оценку решений краевой задачи ($5'_\varepsilon$), (2), (3)

$$z(t) \leq \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0 \beta_0 T}. \tag{32}$$

Все следующие оценки решений краевой задачи ($5'_\varepsilon$), (2), (3) выводятся с помощью оценки (32) очевидным образом — из неравенства (30) и из равенства

$$\int_0^t \int_\Omega [u^\varepsilon_{\tau\tau} - \varepsilon \Delta u^\varepsilon_{\tau\tau} - \Delta u^\varepsilon_\tau - Bu^\varepsilon + \widetilde{q}(\tau, u^\varepsilon) u^\varepsilon] \Delta u^\varepsilon_{\tau\tau} \, dx \, d\tau = \int_0^t \int_\Omega f \Delta u^\varepsilon_{\tau\tau} \, dx \, d\tau;$$

окончательная же оценка имеет вид

$$\varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta u^\varepsilon_{\tau\tau})^2 \, dx \, d\tau + \|u^\varepsilon\|^2_{\overset{\circ}{V}_1} \leq N_6, \tag{33}$$

постоянная N_6 в этой оценке определяется лишь коэффициентами оператора B, функциями $f(x,t)$, $K(x,t)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, областью Ω и числом T. Оценка (33), вновь теоремы вложения [30–31], теорема о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду [31] и теорема о слабой компактности ограниченного в L_2 множества там же позволяют выбрать нужную подпоследовательность и показать, что предельная функция $u(x,t)$ будет являться решением задачи

$$u_{tt} - \Delta u_t - Bu + \widetilde{q}(t, u) u = f(x, t) \tag{5'}$$

и для нее будут выполняться условия (2) и (3).

Положим

$$q(t) = \frac{F(t) - \mu''(t)}{\mu(t)} + \frac{\psi(t, u)}{\mu(t)}\,. \tag{34}$$

Заметим, что вследствие оценки (34) выполняется неравенство

$$|\psi(t, u)| \leq N_7$$

с постоянной N_7, определяющейся лишь коэффициентами оператора B, функциями $f(x,t)$, $K(x,t)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, областью Ω и числом T. Если теперь параметр N срезывающей функции $G_N(\xi)$ изначально выбрать таким, что выполняется $N \geq N_7$, то решение краевой задачи ($5'$), (2), (3) будет решением уравнения (5) с функцией $q(t)$, определенной равенством (34).

Выполнение для функции $u(x,t)$ условия переопределения (4) показывается точно так же, как это делалось при доказательстве теоремы 1.

Теорема полностью доказана.

Непустота множества задач, для которых выполняются все условия теоремы 2, очевидна.

§ 3. Разрешимость обратных задач III и IV

Исследование разрешимости обратных задач III и IV проводится в целом по той же схеме, по которой проводилось исследование разрешимости обратных задач I и II, различия проявятся лишь в том, что изменятся условия согласования и изменятся величины некоторых постоянных.

Обозначим через V_1 и V_2 пространства

$$\begin{aligned} V_1 = \{v(x,t):\ & v(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),\ v_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)), \\ & v_{tt}(x,t) \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\}, \\ V_2 = \{v(x,t):\ & v(x,t) \in V_1,\ v_{tt}(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\}; \end{aligned}$$

нормы в этих пространствах определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))},$$

$$\|v\|_{V_2} = \|v\|_{V_1} + \sum_{i,j=1}^n \|v_{x_i x_j}\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}.$$

Как и в § 2, нам понадобятся некоторые неравенства; приведем эти неравенства в более удобном (с точки зрения сокращения выкладок) виде.

Для функций $v(x,t)$ из пространств V_1 и V_2 выполняются неравенства

$$\|Bv(x,t) - \Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le d_1 \|\Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + d_2 \|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{10'}$$

$$\|Bv(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le d_3 \|\Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + d_4 \|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{11'}$$

$$\|B_1 v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le d_5 \|\Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} + d_6 \|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}; \tag{12'}$$

постоянные $d_1, \dots, d_6$ в этих неравенствах определяются лишь коэффициентами оператора B, областью Ω и числом T.

Далее, помимо некоторых из определенных выше величин, нам понадобятся и другие. Определим их — именно, положим

$$\gamma_1 = \int_0^T \int_\Omega f^2\,dx\,dt + \int_\Omega u_1^2\,dx + \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{1x_i}^2\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{0x_i}^2\,dx + 2d_2 T \int_\Omega u_0^2\,dx,$$

$$\gamma_2 = 2\int_0^T \int_\Omega f^2\,dx\,dt + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{1x_i}^2\,dx + \int_\Omega (\Delta u_0)^2\,dx + \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n \int_\Omega (\Delta u_1)^2\,dx + 2d_2 T \int_\Omega u_0^2\,dx,$$

$$\gamma_3 = \max(2(1+3d_2T^2), 3d_1), \quad \gamma_4 = \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$R_1 = \gamma_4 exp(\gamma_3 T), \quad R_2 = 2T^2 R_1 + 2\int_\Omega u_0^2(x)\,dx, \quad R_3 = 4d_2T^3R_1 + 2d_1 T R_1 + \gamma_2,$$

$$R_4 = R_2^{\frac12} \max_{0\le t\le T} \Big(\int_\Omega K_t^2(x,t)\,dx\Big)^{\frac12},$$

$$\begin{aligned} R_5 = {} & 8d_3R_1 + 8d_4R_2 + 6R_3 + 2d_3R_3 + 2d_4TR_2 + 2d_5R_1T + 2d_6R_2T + \\ & + \frac{R_1 T}{(\mu_1 - R_4)^2} \Big\{ \max_{0\le t\le T} [F(t) - \mu''(t)] + 2\Big(R_1 \max_{0\le t\le T} [\int_\Omega K_t^2(x,t)\,dx]\Big)^{\frac12} + \end{aligned}$$

$$+\Big(R_2\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K_{tt}^2(x,t)\,dx]\Big)^{\frac12}+\Big((d_3R_1+d_4R_2)\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K^2(x,t)\,dx]\Big)^{\frac12}\Big\}^2+$$

$$+\frac{R_1R_3T}{(\mu_1-R_4)^2}+\Big|2\int\limits_\Omega[\Delta u_1(x)]^2\,dx-4\int\limits_\Omega f(x,0)\Delta u_1(x)\,dx-4\int\limits_\Omega Bu_0(x)\Delta u_1(x)\,dx+$$

$$+8\,\underset{0\le t\le T}{vraimax}[\int\limits_\Omega f^2(x,t)\,dx]+4\int\limits_Q f_t^2\,dx\,dt\Big|,$$

$$R_6=2\Big(R_1\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K_t^2(x,t)\,dx]\Big)^{\frac12}+\Big(R_2\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K_{tt}^2(x,t)\,dx]\Big)^{\frac12}+$$

$$+\Big(R_5\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K^2(x,t)\,dx]\Big)^{\frac12}+\Big((d_3R_1+d_4R_2)\max_{0\le t\le T}[\int\limits_\Omega K^2(x,t)\,dx]\Big)^{\frac12}.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (13), (15) *и* (16), *а также условия*

$$f(x,t)\in L_2(Q),\quad f_t(x,t)\in L_2(Q),\quad u_0(x)\in W_2^2(\Omega),\quad u_1(x)\in W_2^2(\Omega),$$

$$\mu(t)\in C^2([0,T]),\quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial\nu}=\frac{\partial u_1(x)}{\partial\nu}=0\quad \textit{при}\quad x\in\Gamma; \tag{14$'$}$$

$$R_4<\mu_1,\quad R_6\le\mu_2. \tag{17$'$}$$

Тогда обратная задача III *имеет решение* $\{u(x,t),q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in V_1$, $q(t)\in L_\infty([0,T])$, *причем коэффициент* $q(t)$ *неотрицателен и выражается через функцию* $u(x,t)$ *явным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(x,t)$ есть заданная функция. Положим

$$\widetilde\psi(t,v)=2\int\limits_\Omega K_t(x,t)v_t(x,t)\,dx+\int\limits_\Omega K_{tt}(x,t)v(x,t)\,dx-\int\limits_\Omega K_{x_i}(x,t)v_{x_it}(x,t)\,dx+$$

$$+\int\limits_\Omega[K(x,t)b^i(x,t)-(K(x,t)b^{ij}(x,t))_{x_j}]v_{x_i}(x,t)\,dx+\int\limits_\Omega K(x,t)b(x,t)u(x,t)\,dx-$$

$$-\int\limits_\Gamma K(x,t)b^{ij}(x,t)v_{x_i}(x,t)\nu_j\,ds,$$

$$\widetilde{\widetilde q}(t,v)=\frac{F(t)-\mu''(t)+G_{\mu_2}(\widetilde\psi(t,v))}{\mu'(t)-G_{R_4}(\varphi(t,v))}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_{tt}-\Delta u_t-Bu_t+\widetilde{\widetilde q}(t,u)u=f(x,t) \tag{1$''$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (6). Разрешимость данной задачи установим, используя метод регуляризации и метод неподвижной точки. Именно, вначале рассмотрим регуляризованную задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_{tt}-\varepsilon\Delta u_{tt}-\Delta u_t-Bu+\widetilde{\widetilde q}(t,u)u_t=f(x,t) \tag{1$''_\varepsilon$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (6) (здесь ε есть фиксированное положительное число из полуинтервала $(0, \varepsilon_0])$, далее рассмотрим линейную задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_{tt} - \varepsilon \Delta u_{tt} - \Delta u_t - Bu + \widetilde{\widetilde{q}}(t,v) u_t = f(x,t) \qquad (1''_{\varepsilon,v})$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (6) (здесь $v(x,t)$ — заданная функция из пространства V_2).

Разрешимость краевой задачи $(1''_{\varepsilon,v})$, (2), (6) в пространстве V_2 вытекает из результатов [29] (см. также Дополнение). Тем самым краевая задача $(1''_{\varepsilon,v})$, (2), (6) порождает оператор Φ, переводящий пространство V_2 в себя: $\Phi(v) = u$. Наличие у этого оператора неподвижных точек, далее возможность предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ показывается, как обычно, с помощью априорных оценок. Покажем, что эти оценки имеются.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega [u_{\tau\tau} - \varepsilon \Delta u_{\tau\tau} - \Delta u - Bu + \widetilde{\widetilde{q}}(\tau,v) u_\tau] u_\tau \, dx \, d\tau = \int_0^t \int_\Omega (f - \Delta u) u_\tau \, dx \, d\tau.$$

Интегрируя по частям, используя условия (2) и (6), неравенства (9) и (11′), применяя неравенство Юнга, а также учитывая неотрицательность функции $\widetilde{\widetilde{q}}(t,v)$, нетрудно от данного равенства перейти к неравенству

$$\int_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i t}^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i\tau}^2 \, dx\, d\tau + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx \le$$
$$\le 2(1 + d_2 T^2) \int_0^t \int_\Omega u_\tau^2 \, dx \, d\tau + d_1 \int_0^t \int_\Omega (\Delta u)^2 \, dx \, d\tau + \gamma_1. \qquad (35)$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega [u_{\tau\tau} - \varepsilon \Delta u_{\tau\tau} - \Delta u_\tau - \Delta u - Bu + \widetilde{\widetilde{q}}(\tau,v) u_\tau] \Delta u_\tau \, dx \, d\tau = \int_0^t \int_\Omega (f - \Delta u) \Delta u_\tau \, dx \, d\tau.$$

Вновь интегрируя по частям, используя условия (2) и (6), неравенства (9) и (10′), нетрудно получить неравенство

$$\varepsilon \int_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2 \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i t}^2(x,t)\,dx + \int_\Omega [\Delta u(x,t)]^2 \, dx +$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega (\Delta u_\tau)^2 \, dx \, \tau \le 4 d_2 T^2 \int_0^t \int_\Omega u_\tau^2 \, dx \, d\tau + 2 d_1 \int_0^t \int_\Omega (\Delta u)^2 \, dx \, d\tau + \gamma_2. \qquad (36)$$

Сложив неравенства (35) и (36), применив далее лемму Гронуолла, получим первую априорную оценку решений краевой задачи $(1''_{\varepsilon,v})$, (2), (6)

$$\int_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \int_\Omega [\Delta u(x,t)]^2 \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i t}^2(x,t)\,dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2\,dx \le R_1. \quad (37)$$

С помощью (37) легко выводятся следующие оценки:

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \le R_2, \quad (38)$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau \le R_3. \quad (39)$$

Рассмотрим теперь равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[u_{\tau\tau} - \varepsilon\Delta u_{\tau\tau} - \Delta u_\tau - Bu + \widetilde{\widetilde{q}}(\tau,v)u_\tau]\Delta u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau = \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} f\Delta u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau. \quad (40)$$

Интегрируя в этом равенстве по частям только в левой части, используя оценки (37)–(39) и учитывая ограниченность функции $\widetilde{q}(\tau,v)$, получаем, что для решений краевой задачи $(1''_{\varepsilon,v})$, (2), (6) будет выполняться априорная оценка вида (23). С помощью этой оценки, оценок (37)–(39) и теоремы Шаудера нетрудно показать, что оператор Φ имеет в пространстве V_2 неподвижные точки (техника доказательства полностью соответствует технике доказательства аналогичного факта в § 2).

Неподвижные точки оператора Φ дадут решение краевой задачи $(1''_\varepsilon)$, (2), (6). Чтобы осуществить предельный переход и далее получить решение задачи $(1'')$, (2), (6), установим наличие дополнительных априорных оценок.

Интегрируя в равенстве (40), взятом при $v = u$, по частям как в левой части, так и в правой, применяя неравенство Юнга и используя оценки (37)–(39), получим оценку

$$\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta u_{\tau\tau})^2\,dx\,d\tau + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{x_i\tau\tau}^2\,dx\,d\tau + \int\limits_{\Omega}[\Delta u_\tau(x,t)]^2\,dx \le R_5.$$

С помощью этой оценки, оценок (37)–(39), теорем вложения, теоремы о возможности выбора из последовательности, сходящейся по норме, подпоследовательности, сходящейся почти всюду, и теоремы о слабой компактности ограниченного в L_2 множества нетрудно установить существование последовательности $\{u_m(x,t)\}$, сходящейся к решению $u(x,t)$ краевой задачи $(1'')$, (2), (6).

Для решения $u(x,t)$ краевой задачи $(1'')$, (2), (6) выполняются оценки

$$|\varphi(t,u)| \le R_4, \quad |\widetilde{\psi}(t,u)| \le R_6.$$

Из этих оценок следуют равенства

$$G_{\mu_2}(\widetilde{\psi}(t,u)) = \widetilde{\psi}(t,u), \quad G_{R_4}(\varphi(t,u)) = \varphi(t,u).$$

Следовательно, функции $u(x,t)$ и $q(t)$, определенные равенством

$$q(t) = \frac{F(t) - \mu''(t) + \widetilde{\psi}(t,u)}{\mu'(t) - \varphi(t,u)},$$

будут связаны в цилиндре Q уравнением (1). Выполнение для функции $u(x,t)$ условия переопределения (4) и принадлежность функций $u(x,t)$ и $q(t)$ нужным классам очевидны. Теорема доказана.

Разрешимость обратной задачи IV исследуется вполне аналогично вышеизложенному. Опуская технические подробности, приведем соответствующую теорему в упрощенном виде.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (13),* $(14')$ *и (16), а также условие* $\mu_0 > 0$. *Тогда существует положительное число* T^* *такое, что при* $T < T^*$ *обратная задача IV имеет решение* $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in V_1$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$, *причем коэффициент* $q(t)$ *выражается через функцию* $u(x,t)$ *явным образом.*

Доказательство этой теоремы проводится по-прежнему с помощью метода регуляризации, метода срезок и метода неподвижной точки. Уточним лишь, что основная априорная оценка выводится с помощью анализа равенства, полученного от умножения регуляризованного уравнения на функцию $u_\tau - \Delta u_\tau$ с последующим интегрированием и использованием интегральных неравенств [33].

Дополнение

1. Разрешимость линейной краевой задачи $(1'_{\varepsilon,v})$, (2), (3) нетрудно установить непосредственно — используя метод Галеркина со специальным базисом из собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа. Необходимые априорные оценки можно получить, используя схему доказательства оценок (18)–(21), (23). Аналогичным образом нетрудно непосредственно доказать разрешимость линейных краевых задач, возникающих при исследовании разрешимости обратных задач II–IV.

2. В целом вполне аналогично, но с более громоздкими выкладками можно доказать разрешимость обратных задач I–IV для уравнений вида (1) с заменой оператора Лапласа произвольным линейным эллиптическим оператором порядка $2m$, действующим по пространственным переменным, и оператора B произвольным линейным оператором порядка $2m$, также действующим по пространственным переменным.

3. Величины некоторых постоянных, фигурирующих в условиях теорем 1–3, во многом определяются авторским использованием параметров в неравенстве Юнга. Подбирая параметры по-иному, можно изменить те или иные постоянные. Кроме того, величины постоянных можно изменить с помощью дополнительных условий — например, потребовав чтобы оператор B был эллиптическим или же чтобы функция $b(x,t)$ была строго отрицательной в $\overline{Q}$.

4. Покажем, что множество задач, для которых выполняются все условия теоремы 1, не пусто.

Пусть $\mu(t)$ есть функция $\beta t - \alpha t^2$ с числами α и β такими, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta - 2\alpha T > 0$, $f(x,t)$ есть тождественно нулевая функция. Очевидно, что в качестве чисел μ_1 и μ_2 можно взять числа $\beta - 2\alpha T$ и 2α соответственно и что условие (15) и первое неравенство условия (17) будут выполняться. Далее, очевидно, что при выполнении условий малости на функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$, а также на область Ω число N_5 можно сделать сколь угодно малым — настолько малым, чтобы выполнялось второе неравенство условия (17). Тогда при выполнении нужных условий гладкости и согласования все условия теоремы 1 будут выполняться.

Аналогичным образом нетрудно показать, что множество задач, для которых выполняются все условия теоремы 3, не пусто.

Список литературы

1. *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. М.: Наука, 1972.

2. *Anikonov Yu. E.* Multidimentional Inverse and Ill-Posed Problems for Differential Equations. Utrecht: VSP, 1995.

3. *Anikonov Yu. E.* Formulas in Inverse and Ill-Posed Problems. Utrecht: VSP, 1997.

4. *Anikonov Yu. E., Bubhov B. A., Erokhin G. N.* Inverse and Ill-Posed Source Problems. Utrecht: VSP, 1997.

5. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N.Y.–Basel: Marcel Dekker, Inc., 1999.

6. *Denisov A. M.* Elements of the Theory of Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.

7. *Anikonov Yu. E.* Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations. Utrecht: VSP, 2001.

8. *Lorenzi A.* An Introduction to Mathematical Problems via Functional Analysis. Utrecht: VSP, 2001.

9. *Belov Yu. Ya.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Utrecht: VSP, 2002.

10. *Romanov V. G.* Investigation Methods for Inverse Problems. Utrecht: VSP, 2002.

11. *Lavrentiev M. M.* Inverse Problems of Mathematical Physics. Utrecht: VSP, 2003.

12. *Megrabov A. G.* Forward and Inverse Problems for Hyperbolic, Elliptic and Mixed Type Equations. Utrecht: VSP, 2003.

13. *Ivanchov M.* Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. VNTL. Publishers. 2003.

14. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.

15. *Атаманов Э. Р., Мамаюсупов М. Ш.* Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. Фрунзе: Илим, 1990.

16. *Аблабеков Б. С.* Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. Бишкек: Илим, 2001.

17. *Аблабеков Б. С.* Обратная задача для уравнения Бенджамена – Бона – Махони // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования. Ханты-Мансийск: Югорский НИИ информационных технологий, 2005. С. 6–9.

18. *Пятков С. Г.* О разрешимости некоторых классов обратных задач // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования. Ханты-Мансийск: Югорский НИИ информационных технологий, 2005. С. 61–66.

19. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых нелинейных обратных задач для уравнений составного типа // Материалы III Междунар. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 2006. С. 159–164.

20. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк. 1995.

21. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики. 1995.

22. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнеия и обратные задачи // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 722–744.

23. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.

24. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2005. Т. 45, № 12. С. 2168–2184.

25. *Cannon J. R., Lin Y.* Determination of a Parameter $p(t)$ in Some Quasi-linear Parabolic Differential Equations // Inverse Problems. 1988. Vol. 4. P. 35–45.

26. *Іванчов М. І.* Редукція задачі з вильною межею для параболічного рівняння до оберненой задачі. Нелинейные граничные задачи. Донецк: Ин-т прикладной математики и механики. 2002. С. 73–83.

27. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вильнаю межею для рівняння теплопровідності // Украинский мат. журн. 2003. Т. 55, № 7. С. 901–910.

28. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

29. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

30. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

31. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

32. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

33. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Материал поступил в редколлегию 26.03.2008

Адрес автора

КОЖАНОВ Александр Иванович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
тел.: +7 (383) 363 46 60
e-mail: kozhanov@math.nsc.ru