П. И. Самовол, М. Аппельбаум, От школьной задачи к студенческой проблеме, *Матем. обр.*, 2005, выпуск 3, 51–57

От школьной задачи к студенческой проблеме

П. Самовол, М. Эпплбаум

Авторы статьи, начиная с довольно простой задачи о существовании числовой последовательности с необычным, на первый взгляд, свойством, рассматривают и анализируют ряд обобщений этой задачи, в том числе, интересных для студентов.

На школьных математических соревнованиях самого разного уровня встречаются задачи с парадоксальной формулировкой. Например, в книге [1, p.105] находим:

Задача № 1: «Один человек каждый месяц записывал свой доход и расход. Может ли быть так, что за любые пять идущих подряд месяцев его общий расход превышал доход, а в целом за год, его доход превысил расход?»

Второй пример, под номером 19.2, предлагался на XIX Международной Математической Олимпиады (IMO) 1977 года в Белграде (6 очков).

Задача № 2: «В конечной последовательности действительных чисел сумма любых семи идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых одиннадцати идущих подряд членов положительна. Найти наибольшее число членов данной последовательности» (см. [2, p.5]).

Обобщим данную задачу: Для последовательности действительных чисел, записанных в строчку, выполняются следующие условия (*):

1) сумма любых n идущих подряд членов — S_n — отрицательна;

2) сумма любых k идущих подряд членов — S_k — положительна.

Какое *максимальное* значение — $N_{\max}$ — может принимать число членов данной последовательности?

I. Предположим, что $k > n$. *Очевидно,что если решение задачи существует, то числа n и k не могут быть кратны друг дугу*. Для допустимых значений параметров n и k *первую часть решения искомой задачи можно обосновать следующей* теоремой № 1:

Теорема № 1. Максимальное число членов искомой последовательности не больше, чем $N_{\max} = n + k - d - 1$, где $d = (n, k)$ и k не делится на n.

Доказательство. Пусть наибольший общий делитель чисел n и k равен $d = (n, k) \neq n$. Тогда $n > d$. Обозначим $n = n_1 \cdot d$, $k = k_1 \cdot d$; $(k_1, n_1) = 1$. Покажем, что число $N_{\max}$ увеличить нельзя. Используем для доказательства «метод от противного». Предположим, что в последовательности $N_1 = n + k - d = d \cdot (k_1 + n_1 - 1)$ членов.

1.1. Разобьем последовательность длины N_1 на $(k_1 + n_1 - 1)$ групп по d чисел в каждой группе. Согласно условию задачи получаем, что сумма чисел в любых k_1 группах — $S_k = S_{k_1 \cdot d} > 0$, а сумма чисел в любых n_1 группах — $S_n = S_{n_1 \cdot d} < 0$.

1.2. Рассмотрим любые $(k_1 - n_1)$ групп подряд идущих членов нашей последовательности. Остальных групп из членов последовательности осталось $(k_1 + n_1 - 1) - (k_1 - n_1) = 2n_1 - 1$. Так как число $(2n_1 - 1)$ — нечетное, то при любом разбиении этого числа на два слагаемых одно из них будет не меньше n_1. Значит, всегда есть возможность выбранные нами наугад $(k_1 - n_1)$ групп членов последовательности дополнить слева (или справа, где это возможно) ещё n_1 группами чисел.

1.3. Дополним выбранные $(k_1 - n_1)$ групп членов n_1 группами чисел.

1.4. Пусть S_{k-n} — сумма чисел в выбранных $(k_1 - n_1)$. Из условия ($S_{n_1 \cdot d} = S_n < 0$ и $S_{k_1 \cdot d} = S_k > 0$) следует, что $S_{(k_1 - n_1) \cdot d} > 0$. То есть сумма чисел в любых выбранных $(k_1 - n_1)$ группах положительна.

1.5. Переопределим условие задачи. Для последовательности $N_1 = n + k - d = d \cdot (k_1 + n_1 - 1)$ действительных чисел, которые записаны в строчку и разбиты на $(k_1 + n_1 - 1)$ групп по d чисел в каждой группе, выполняются следующие условия:

1.4.1) сумма членов в n_1 изначально определённых группах — S_n — отрицательна;

1.4.2) сумма чисел в любых изначально выбранных $(k_1 - n_1)$ группах $S_{(k_1 - n_1)\cdot d} > 0$;

Заметим, что замена числа групп k_1 на число групп $(k_1 - n_1)$ соответствует шагу в алгоритме Евклида. Повторим это рассуждение необходимое число раз в соответствии с алгоритмом Евклида. Так как $(k_1, n_1) = 1$, то получим, что сумма любых d чисел *в одной группе* должна быть положительна или всегда отрицательна. Так как $k = k_1 \cdot d$ и $n = n_1 \cdot d$, то получаем тогда, что числа S_k и S_n будут одного знака. Противоречие.

II. Предположим, что существует последовательность максимальной длины, которая в общем виде состоит из двух переменных $x \,\&\, y$ и удовлетворяет условию (*). Предположим, так же, что каждая подпоследовательность из n членов будет содержать, например, b_1 членов, равных y, и a_1 членов, равных x. Аналогично, пусть каждая подпоследовательность из k членов будет содержать, например, b_2 членов, равных y, и a_2 членов, равных x. Составим для $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_1 + b_1 = n$, $a_2 > 0$, $b_2 > 0$, $b_2 + a_2 = k$ систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = S_n = -b, \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = S_k = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b \cdot a_2 + a \cdot a_1}{b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1}, \\ x = \dfrac{a \cdot b_1 + b \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1}, \\ b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1 \neq 0. \end{cases} \qquad (C)$$

Теорема № 2. Система составленных уравнений всегда совместна.

Доказательство. Пусть $a_1 > 0$, $b_1 > 0$; $a > 0$, $b > 0$; $b_2 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 + a_1 = n$, $b_2 + a_2 = k$.

1. Используем метод от противного. Предположим, что $b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1 = 0$ (*). Тогда из этого равенства и данных системы (C) получим:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = t \cdot b_2, \\ a_1 = t \cdot a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 + b_1 = t \cdot (a_2 + b_2) \Leftrightarrow n = t \cdot k;$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{n}{k} < 1, \; a_1 < n, \; b_1 < n, \; a_2 < k, \; b_2 < k, a_1 + b_1 = n, \; a_2 + b_2 = k.$$

2. Если $d = (n, k) = 1$, то дробь $\frac{n}{k}$ несократима. Поэтому, равенство $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{n}{k}$ невозможно. А значит, в этом случае, предположение (*) ложно.

3. Если $d = (n, k) > 1$, то из равенства $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{n}{k}$ и условия $a_1 < n$, $b_1 < n$, $a_2 < k$, $b_2 < k$, $a_1 + b_1 = n$, $a_2 + b_2 = k$, получаем, что n делится на a_1 и на b_1, а k делится на a_2 и b_2. То есть $n \geq 2a_1$ и $n \geq 2b_1$, $k \geq 2a_2$ и $k \geq 2b_2$. Получаем, что $n \geq a_1 + b_1 = n$ и $k \geq a_2 + b_2 = k$. Это означает, что существует только одна возможность: $a_1 = b_1 = \frac{n}{2}$ & $a_2 = b_2 = \frac{k}{2}$. То есть, количество отрицательных и положительных членов в каждой группе из n членов равны между собой. И количество отрицательных и положительных членов в каждой группе из k членов равны между собой. Но тогда мы неверно задали параметры a & b, которые в этом случае будут разных знаков. Противоречие. Таким образом, при выполнения условия $k > n$ и k не делится на n, $a_1 \cdot b_2 \neq b_1 \cdot a_2$.

III. Перейдём к описанию алгоритма построения подходящего примера. Будем строить последовательность максимальной длины, которая в общем виде состоит из двух переменных x & y и удовлетворяет условию (*). Искомый алгоритм состоит из следующих шагов:

3.1. Если k и n такие, что $(k - n) = d = (n, k) \geq 1$, то $N_{\max} = 2 \cdot n - 1$. Тогда искомая последовательность может быть определена в форме таблицы:

a_1	a_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_{2n-2}	a_{2n-1}
x	x	x	x	x	x	y	x	x	x	x	x	x

Соответствующая система (C) в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} (n-1) \cdot x + 1 \cdot y = -b, \\ n \cdot x + 1 \cdot y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (n-1) \cdot a + n \cdot b, \\ x = a + b. \end{cases} \qquad (C_1)$$

3.2. Если $(k-n) > d = (n,k) \geq 1$, то:

3.2.1. Запишем $j \geq 2$ *первых* шагов алгоритма Евклида, полагая $n = n_1$, $k = k_1$:

$$(k_1, n_1) = (k_1 - n, n_1) = \cdots = (k_{j-1}, n_{j-1}) = (k_j, n_j), \ |k_j - n_j| = d.$$

3.2.2. Если, например, $k_j = n_j + d$, то рассмотрим нечётное число $N_j = k_j + n_j - d - 1 = (n_j + d) + n_j - d - 1 = 2 \cdot n_j - 1$. Первую часть последовательности заполним по правилу 3.1 $(a_{n_j} = y)$.

3.2.3. Пусть, например, для некоторых смежных пар $(k_{i-1}, n_{i-1}) = (k_i, n_i)$ выполняется: $k_{i-1} = k_i + n_i$, $n_{i-1} = n_i$, $i = 2, 3, \ldots, j$. Достроим $(j+2-i)$-ю часть последовательности, соответствующей (k_{i-1}, n_{i-1})-ой паре, с помощью ровно $n_i = n_{i-1}$ членов. Их мы получаем с помощью параллельного сдвига (*переноса*) последних $n_i - n_{i-1}$ членов из *объединения предыдущих* $(j+1-i)$ частей последовательности.

3.2.4. Выполним подобное достроение последовательно для всех $i = j, (j-1), \ldots, 2$. Получим последовательность только с двумя неизвестными (x, y). Их определим с помощью системы (C). Приведём пример (задача № 2) для, $n = n_1 = 7$ & $k = k_1 = 11 \Rightarrow (11, 7) = (7, 4) = (4, 3) \Rightarrow j = 3$.

- Первая часть последовательности состоит из $N_1 = 3 + 4 - 1 - 1 = 5$ членов и построена в соответствии 3.1

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
x	x	y	x	x											

- Вторая часть последовательности состоит из 4 членов, так как пара $(3, 4)$ получена из пары $(3+4, 4)$. Эту часть получим с помощью параллельного сдвига последних $n_2 = n_3 = 4$ членов из первой части последовательности. Рассмотрим теперь объединение двух частей.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
x	x	y	x	x	x	y	x	x							

- Третья часть последовательности согласно алгоритма Евклида состоит из 7 членов, так как пара $(7, 4)$ получена из пары $(4+7, 7)$. Её получим с помощью параллельного сдвига последних $n_1 = 7$ членов из объединения двух первых частей последовательности.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
x	x	y	x	x	x	y	x	x	y	x	x	x	y	x	x

- Для найденных значений $a_1 = 5$, $b_1 = 2$, $a_2 = 8$, $b_2 = 3$ составим и решим систему уравнений, например, для значений $a = b = 1$:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -1, \\ 8x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{8+5}{2 \cdot 8 - 3 \cdot 5} = -13, \\ x = \dfrac{2+3}{2 \cdot 8 - 3 \cdot 5} = 5. \end{cases}$$

Получим искомую последовательность (Ответ для задачи № 2).

5	5	−13	5	5	5	−13	5	5	−13	5	5	5	−13	5	5

IV. Обоснование сформулированного в III алгоритма. Пусть

$$(k_1, n_1) = \cdots = (k_i + n_i, n_i) = (k_i, n_i) = \cdots = (k_{j-1}, n_{j-1}) = (k_j, n_j).$$

Предположим, что для подпоследовательности, состоящей из $(j+1-i)$ частей, выполняется условие: в любой выборке из k_i членов, ровно b_2 членов равны числу y, и в любой выборке из n_i членов ровно b_1 членов так же равны числу y.

Теорема № 3. Если к $(j+1-i)$ частям последовательности добавить согласно очередного шага алгоритма $(j+2-i)$-ю часть, которая соответствует $(i-1)$-й паре алгоритма Евклида для заданных чисел, $(k_i + n_i, n_i)$, то для всех полученных $N_{i\,\max} = (k_i + n_i) + n_i - d - 1$ чисел будет выполняться условие:

- в любой выборке из n_i членов ровно b_1 членов равны числу y,
- в любой выборке из $(k_i + n_i)$ членов, $(b_2 + b_1)$ членов равны числу y.

Доказательство. Согласно указанного алгоритма $(j + 2 - i)$-ю часть последовательности, состоящую из n_i членов заполняем с помощью параллельного сдвига последних n_i членов из предыдущих $(j + 1 - i)$ частей последовательности. Очевидно, общее число членов станет $N_{i\max} = (k_i + n_i) + n_i - d - 1$, что соответствует установленному ранее закону. Так как каждый член, равный числу y, сместился ровно на n_i членов, то для достроенной последовательности так же выполняется условие: сумма любых n_i членов последовательности равна одному и тому же числу b. Покажем, что в любой выборке из $(k_i + n_i)$ членов, ровно $(b_2 + b_1)$ равны числу y. В самом деле, для $(k_i + n_i)$ стоящих справа-налево членов получаем b_2 членов, равных y в выборке из k_i членов, а b_1 членов, равных y в любой выборке из n_i членов. Это же число не измениться при смещении на любое возможное число справа-налево по причине того, что предыдущей части последовательности в любой выборке из k_i членов содержится ровно b_2 членов, равных числу y, а в достроенной последовательности в любой выборке из n_i членов содержится ровно b_1 членов равных y. Этим самым обосновывается индукционный переход от i к $(i-1)$, когда $i = j$, $(j-1), \cdots, 2$. Ранее было показано, что при $1 = j$ искомая часть последовательности существует и удовлетворяет условию задачи.

Задача № 3. О данной последовательности действительных чисел известно следующее (R):

1. Все члены этой последовательности записаны в строчку.
2. Сумма любых записанных подряд $n = 10$ чисел равна $-b$, $b > 0$.
3. Сумма любых записанных подряд k чисел равна a, $a > 0$.
4. Известно, что максимально возможное число членов данной последовательности $N = 23$ члена.

Необходимо определить значение числа k. Привести пример.

Приведём краткое решение задачи № 3.

- Если $(n, k) = 1 \Rightarrow N_{\max} = 23 = 10 + k - 2 \Leftrightarrow 15 = k$. Но $d = (10, 15) = 5 \neq 1$. Противоречие.
- Рассмотрим $(10, k) = d > 1 \Rightarrow 23 = 10 + k - d - 1 \Rightarrow k - d = 14$,

$$d = (10, k) = (10, k - d) = (10, 14) = 2; \qquad 23 = 10 + k - 2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 16 = k.$$

- $(10, 16) = (6, 10) = (4, 6) \Rightarrow j = 3$.
- С помощью алгоритма, описанного выше составим последовательность членов в общем виде:

x	x	x	y	x	x	x	x	x	y	x	x	x	y	x	x	x	x	x	y	x	x	x

Составим соответствующую систему уравнений, пользуясь, например, условием (R) при $a = 4$, $b = 2$:

$$\begin{cases} 13x + 3y = 4, \\ 2y + 8x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = -29. \end{cases}$$

Ответ: $7, 7, 7, -29, 7, 7, 7, 7, 7, -29, 7, 7, 7 - 29, 7, 7, 7, 7, 7, -29, 7, 7, 7$.

Задача № 4. Для последовательности действительных чисел, составляющих множество M и записанных в строчку, выполняются следующие условия:

1. Сумма любых n идущих подряд членов — S_n — отрицательна.
2. Сумма любых k идущих подряд членов — S_k — положительна.

Известно, что максимальное число членов данного множества ровно $N = 30$. Найти максимум возможной разности $|k - n|$. Привести примеры, удовлетворяющие условию задачи.

Решение. Если $N = 30$, то $n + k - d - 1 = 30 \Leftrightarrow n + k = 31 + d$.

- Если $d > 1$, то $n = n_1 d$, $k = k_1 d$, $(n_1, k_1) = 1$. Тогда 31 делится на число $d > 1 \Rightarrow d = 31$. Получаем, что
$$n = 31n_1,\ k = 31k_1,\ \Rightarrow\ 31n_1 + 31k_1 = 62\ \Rightarrow\ n_1 + k_1 = 2\ \Leftrightarrow\ n = k.$$
Это указывает на отсутствие решения задачи в данном случае.
- Если $d = 1$, то $n + k = 32$. Тогда получим с помощью метода перебора:
$$\max(|k - n|) = 29 - 3 = 26.$$

Ответ: 26.

Примечание: если условие задачи изменить на следующее: «...Известно, что максимальное число членов данного множества не больше $N = 30$...», то решение задачи несколько изменится.

Ответ: 27.

Задача № 5 (для школьников старших классов и студентов). Про функцию $f(x)$ на отрезке $[0; 23]$ известно, что любой определенный интеграл по отрезку длины 10 положителен, а по отрезку длины 16 отрицателен. Может ли такое быть? Как изменится ответ, если $x \in [0; 24]$?

Подсказка: да. Решение практически описано в решении задачи № 3. Функцию $f(x)$ следует определить, как ступенчатую, принимающую только два значения 7 и -29.

Задача № 6 (для студентов). Про интегрируемую функцию $f(x)$ на отрезке $[0, c]$ известно, что любой определенный интеграл по отрезку длины n положителен, а по отрезку длины m отрицателен, $c > m > n > 0$.

a) Докажите, что $c < m + n$; b) докажите, что если m и n соизмеримы, т.е. $\frac{m}{n} = \frac{q}{p}$ — несократимая дробь, p, q — целые числа, то оценку можно улучшить до $c < m + n - \frac{m}{q}$.

Решение. Из необходимого условия интегрирования функций следует, что $f(x)$ ограничена на $[0; c]$, т.е. существует $M > 0$, что $|f(x)| < M$ на $[0; c]$. Пусть $F(x)$ обозначает первообразную функцию функции $f(x)$. Определим на отрезке $[0; c - m]$ функцию $h(x) = F(x + m) - F(x) = \int\limits_x^{x+m} f(x)\,dx$. Очевидно, что функция $h(x)$ является непрерывной, кроме того, как следует из условия $h(x) < 0$, в частности $h(0) < 0$, $h(m) < 0$. В силу непрерывности на отрезке $[0; c - m]$ функция достигает максимального значения. Обозначим $\max\limits_{0 \le x \le c-m} h(x) = -B < 0$. Для любого $0 < d$, $k \in \mathbb{N}$, $kd \le c$, обозначим через $S_{d,k} = \int\limits_{(k-1)d}^{kd} f(x)\,dx$. Выберем натуральное число p, удовлетворяющее неравенству $p > \frac{2Mn}{B}$. Положим $d = \frac{n}{p}$, тогда очевидно $n = pd$, $d < \frac{B}{2M}$. Определим числа $q \in \mathbb{N}$ и $0 \le r < d$, чтобы $m = qd + r$.

Доказательство. a) Предположим $c \ge m + n$, тогда $(p + q)d \le c - r \le c$. Исходя из условий задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \int\limits_0^n f(x)\,dx = S_{d,1} + \dots + S_{d,p} = a_1, \\ \int\limits_d^{n+d} f(x)\,dx = S_{d,2} + \dots + S_{d,p+1} = a_2, \\ \dots\dots\dots \\ \int\limits_{qd}^{n+qd} f(x)\,dx = S_{d,q} + \dots + S_{d,p+q} = a_q; \\ \int\limits_0^m f(x)\,dx = S_{d,1} + \dots + S_{d,q} + r_{d,1} = b_1, \\ \int\limits_d^{m+d} f(x)\,dx = S_{d,2} + \dots + S_{d,q+1} + r_{d,2} = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ \int\limits_{pd}^{m+pd} f(x)\,dx = S_{d,p} + \dots + S_{d,p+q} + r_{d,p} = b_p, \end{cases} \tag{**}$$

где
$$r_{d,k} = \int\limits_{m+kd-r}^{m+kd} f(x)\,dx, \quad 0 < a_i,\ b_j \le -B < 0.$$

Оценим
$$|r_{d,k}| \le \left|\int\limits_{m+kd-r}^{m+kd} f(x)\,dx\right| \le \int\limits_{m+kd-r}^{m+kd} |f(x)|\,dx \le \int\limits_{m+kd-r}^{m+kd} M\,dx = Mr < Md < \frac{M}{2}.$$

Тогда
$$0 < \sum_{i=1}^{q} a_i = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} S_{d,i} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} S_{d,i} = \sum_{j=1}^{p}(b_j - r_{d,j}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{p} b_j - \sum_{j=1}^{p} r_{d,j} \le -pB + \sum_{j=1}^{p} |r_{d,j}| < -pB + \frac{pB}{2} < 0.$$

Противоречие. Итак $c < m + n$.

Второй способ. Итак, «от противного» предположим $c \ge m+n$, обозначим через $\Phi(x)$ первообразную функцию функции $F(x)$. Тогда используя формулу Ньютона–Лейбница и учитывая условие задачи (интеграл от положительной функции положителен, от отрицательной отрицателен), получаем
$$0 < \int\limits_0^m \int\limits_x^{x+n} f(y)\,dxdy = \int\limits_0^m (F(x+n) - F(x))\,dx = \Phi(m+n) - \Phi(n) + \Phi(0) =$$
$$= \int\limits_0^n (F(y+m) - F(y))\,dy = \int\limits_0^n \int\limits_y^{y+m} f(x)\,dxdy < 0$$

противоречие. Итак $c < m + n$. Что и требовалось доказать.

Как видно из доказательства, переменные интегрирования попали в пределы интегрирования.

b) Докажите, что если m и n соизмеримы, т. е. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь p, q — целые числа, то оценку можно улучшить до $c < m + n - \frac{m}{q}$.

Решение. Исходя из условия соизмеримости, положим $d = \frac{m}{q} = \frac{n}{p}$, очевидно $n = pd$ и $m = qd$. Пусть $c \ge m + n - \frac{m}{q} = (p + q - 1)d$. Рассмотрим последовательность состоящую из $(p + q - 1)$ членов: $S_{d,1}, S_{d,2}, \ldots, S_{d,p+q-1}$. Эта последовательность удовлетворяет следующим свойствам:

1. Сумма любых подряд идущих p её членов положительна.

2. Сумма любых подряд идущих q её членов отрицательна.

Но в соответствии с теоремой № 1 в такой последовательности может быть не более $p+q-(p,q)-1$ членов, где (p,q) — наибольший общий делитель чисел p и q. Противоречие. Что и требовалось доказать.

Задача № 7. Члены некоторой последовательности выписываются в одну строку. Известно, что для любых натуральных n & k выполняются следующие условия (*):

1. Сумма любых k подряд идущих чисел будет равна положительному числу.

2. Сумма любых n подряд идущих чисел будет равна отрицательному числу.

Может ли при $k = 7$, $n = 4$ член $a_s < 0$? Выяснить знак произведения $a_4a_5a_6$.

V. Ещё одно обобщение.

5.1. Положительным ответом на вопрос первой задачи может быть, например, последовательность: $2, 2, 2, 2 - 9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2$.

5.2. В общем виде существует и чисто алгебраическое решение данной задачи. (См. [1], p.105). Рассмотрим, например, систему из $(k + n - 2d)$ уравнений и $(k + n - d - 1)$ неизвестных.

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = a_1, \\ x_2 + \cdots + x_{n+1} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{kd} + \cdots + x_{k+n-d-1} = a_{kd}; \\ x_1 + \cdots + x_k = b_1, \\ x_2 + \cdots + x_{k+1} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{nd} + \cdots + x_{k+n-d-1} = a_{nd}. \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет максимально возможный ранг $r = (k + n - 2d)$. Если даже взять значения всех $a_i > 0$, $1 = 1, \ldots, k - d$ и $b_j > 0$, $j = 1, \ldots, n - d$, то система всегда совместна. При $d = 1$ она имеет ровно одно решение. Таким образом всегда можно найти одну строчку, удовлетворяющую требованию задачи.

Литература

[1] Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Работ, А. Л. Тоом «Заочные математические олимпиады», М.: Наука, 1987.

[2] «Международные математические олимпиады». Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузминская. М.: «Дрофа», 2001.

Dr. Peter Samovol, lecturer of mathematics,
mathematics club "Youth Kidumatica".
E-mail: Pet12@012.net.il

Dr. Mark Applebaum,
Kaye Academic College of Education,
Beer- Sheva, Israel.
E-mail:Amark@012.net.il