

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.51

О ВЛИЯНИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Ю. АЛЕКСАНДРОВ

В работах [1 — 5] изучалось воздействие высокочастотных возмущений на системы дифференциальных уравнений. Показано, что достаточно быстрые колебания не нарушают асимптотическую устойчивость решений рассматриваемых систем, при этом предполагалась ограниченность амплитуд указанных колебаний. В настоящей работе исследуем случай, когда амплитуды возмущающих воздействий являются неограниченными функциями времени.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = (A + B(t))X. \quad (1)$$

Здесь X — n -мерный вектор неизвестных функций, A — постоянная матрица, элементы матрицы $B(t)$ определены при $t \geq 0$ и представимы в виде $b_{sj}(t) = t^\alpha \varphi_{sj}(t^\beta)$, где α и β — положительные постоянные, а функции $\varphi_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$ вместе с интегралами $\int_0^t \varphi_{sj}(\tau) d\tau$. Известно (см. [2]), что при $\alpha = 0$, $\beta > 1$ из асимптотической устойчивости невозмущенной системы $\dot{X} = AX$ следует, что система (1) также асимптотически устойчива.

Будем считать, что

$$\beta > \alpha + 1. \quad (2)$$

Тогда интеграл $\int_0^{+\infty} B(\tau) d\tau$ сходится, причем при всех $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\left\| \int_t^{+\infty} B(\tau) d\tau \right\| \leq D(t+1)^{\alpha+1-\beta}, \quad (3)$$

где D — положительная постоянная.

Теорема 1. Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тогда при выполнении неравенства

$$\beta > 2\alpha + 1 \quad (4)$$

система (1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Из оценки (3) следует, что существует число $T > 0$ такое, что при всех $t \geq T$ преобразование

$$Y = \left(E + \int_t^{+\infty} B(\tau) d\tau \right) X \quad (5)$$

является неособым. При этом задача устойчивости относительно переменной X эквивалентна задаче устойчивости относительно переменной Y . Для новой переменной получим систему

$$\dot{Y} = (A + R(t))Y, \quad (6)$$

где элементы матрицы $R(t)$ определены и непрерывны при $t \geq T$ и стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно (см. [6, с. 114 — 116]), система (6), а значит, и система (1) асимптотически устойчивы. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть у матрицы A существует по крайней мере одно собственное число с положительной вещественной частью. Тогда при выполнении неравенства (4) система (1) неустойчива.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 1. В случае $\beta = 2\alpha + 1$ возмущения рассматриваемого вида могут нарушать устойчивость линейных систем.

Пример 1. Пусть система (1) имеет вид

$$\dot{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6t \sin(t^3) \\ 6t \cos(t^3) & 0 \end{pmatrix} \right) X. \quad (7)$$

Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 3$, а соответствующая невозмущенная система асимптотически устойчива.

С помощью преобразования (5) приходим к системе $\dot{Y} = (\text{diag}(-7 - 6 \cos(2t^3), 5 - 6 \cos(2t^3)) + R(t))Y$, где $\|R(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Легко показать, что преобразованная система неустойчива. Но тогда и система (7) также является неустойчивой.

Предположим теперь, что матрица $B(t)$ при всех $t \geq 0$ удовлетворяет условию Лапко-Данилевского

$$B(t) \int_t^{+\infty} B(\tau) d\tau = \int_t^{+\infty} B(\tau) d\tau B(t).$$

Делая в системе (1) замену $Y = \exp\left(\int_t^{+\infty} B(\tau) d\tau\right) X$, получим, что теоремы 1 и 2 также имеют место, если в их формулировках условие (4) заменить условием (2).

Рассмотрим, далее, нелинейную систему

$$\dot{x}_s = f_s(t, X), \quad s = 1, \dots, n, \quad (8)$$

где функции $f_s(t, X)$ определены и непрерывны при $t \geq 0$, $\|X\| \leq H$, и удовлетворяют в этой области условию Липшица по X с константой, не зависящей от t . Будем предполагать, что система (8) имеет нулевое решение $X = 0$, которое асимптотически устойчиво равномерно по t_0 и X_0 . Известно [1, с. 31—34], что для системы (8) в некоторой области вида

$$t \geq 0, \quad \|X\| \leq \gamma, \quad (9)$$

где $0 < \gamma < H$, существует функция $V(t, X)$, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Эта функция имеет частные производные любого порядка по всем переменным, причем указанные производные равномерно ограничены в области (9).

Наряду с системой (8) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x}_s = f_s(t, X) + \sum_{j=1}^k b_{sj}(t) h_j(X), \quad s = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Здесь функции $h_j(X)$ определены и непрерывно-дифференцируемы при $\|X\| \leq H$, а функции $b_{sj}(t)$ непрерывны при всех $t \geq 0$. При этом функции $b_{sj}(t)$ могут быть не ограничены на промежутке $[0, +\infty)$.

Пусть система (10) также имеет нулевое решение, а интегралы $\int_0^{+\infty} b_{sj}(\tau) d\tau$ сходятся.

Теорема 3. Если функции

$$b_{sj}^{(ri)}(t) = b_{ri}(t) \int_t^{+\infty} b_{sj}(\tau) d\tau, \quad r, s = 1, \dots, n; \quad i, j = 1, \dots, k,$$

стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, то нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво равномерно по t_0 и X_0 .

Доказательство. Функцию Ляпунова для системы (10) выбираем в виде

$$V_1 = V(t, X) + \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{j=1}^k \int_t^{+\infty} b_{sj}(\tau) d\tau h_j(X), \quad (11)$$

где $V(t, X)$ — функция, соответствующая невозмущенной системе (8). Получим, что для функции $V_1(t, X)$ и ее производной, вычисленной в силу системы (10), в области (9) справедливы неравенства

$$V(t, X) - \psi_1(t) \leq V_1(t, X) \leq V(t, X) + \psi_1(t), \quad dV_1/dt \leq W(t, X) + \psi_2(t),$$

где $W(t, X)$ — отрицательно-определенная функция, а неотрицательные функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ определены и непрерывны при $t \geq 0$ и стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

С учетом этих неравенств дальнейшее доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 5 в работе [3, § 4, с. 83—85].

Рассмотрим теперь случай, когда функции $c_{sj}^{(ri)}(t)$ могут не стремиться к нулю при $t \rightarrow +\infty$, но при этом интегралы $\int_0^{+\infty} c_{sj}^{(ri)}(\tau) d\tau$ сходятся. Тогда имеет место

Теорема 4. Если у функций $h_j(X)$ в области $\|X\| \leq H$ существуют непрерывные частные производные первого и второго порядка по всем переменным, а функции

$$b_{pi}(t) \int_t^{+\infty} c_{sj}^{(ri)}(\tau) d\tau, \quad p, r, s = 1, \dots, n; \quad i, j, l = 1, \dots, k,$$

стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, то нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво равномерно по t_0 и X_0 .

Для доказательства теоремы функцию Ляпунова следует выбрать в виде

$$V_2 = V_1(t, X) + \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^k \int_t^{+\infty} c_{sj}^{(ri)}(\tau) d\tau \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial V}{\partial x_s} h_j \right) h_i(X),$$

где $V_1(t, X)$ — функция из (11).

Замечание 2. Накладывая аналогичным образом новые ограничения на функции $b_{sj}(t)$, можно продолжить процесс построения функций Ляпунова, уточняя условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (10).

Пример 2. Предположим, что система (10) имеет вид

$$\dot{x}_s = f_s(t, X) + t^\alpha \varphi(t^\beta) h_s(X), \quad s = 1, \dots, n, \quad (12)$$

где α и β — положительные постоянные, удовлетворяющие неравенству (2), функция $\varphi(t)$ непрерывна и ограничена при всех $t \geq 0$ вместе с интегралом $\int_0^t \varphi(\tau) d\tau$, а функции $h_j(X)$ в области $\|X\| \leq H$ имеют непрерывные частные производные любого порядка по всем переменным.

Пусть функции Ляпунова определяются формулами

$$V_1 = V(t, X) + g_1(X) \int_t^{+\infty} \tau^\alpha \varphi(\tau^\beta) d\tau, \quad V_m = V_{m-1}(t, X) + \frac{g_m(X)}{m!} \left(\int_t^{+\infty} \tau^\alpha \varphi(\tau^\beta) d\tau \right)^m, \quad m = 2, 3, \dots,$$

где $g_1 = \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} h_s(X)$, $g_m = \sum_{s=1}^n \frac{\partial g_{m-1}}{\partial x_s} h_s(X)$, $m = 2, 3, \dots$. Условия асимптотической устойчивости, получающиеся с помощью функции $V_m(t, X)$, имеют вид $\beta > (1 + 1/m)\alpha + 1$.

Следовательно, при выполнении неравенства (2) нулевое решение системы (12) асимптотически устойчиво равномерно по t_0 и X_0 .

Литература

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
2. Зубов В. И. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 4. С. 777 — 778.
3. Зубов В. И. Колебания и волны. Л., 1989.
4. Игнатьев А. О. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 12. С. 2161 — 2163.
5. Александров А. Ю., Прасолов С. А. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 3. С. 8 — 14.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию
13 мая 1996 г.