Serge Bernstein, О нѣкоторыхъ періодическихъ функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля, *Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер.*, 1914, том 14, выпуск 4, 145–152

Sur certaines fonctions périodiques qui s'écartent le moins possible de zéro.

Serge Bernstein.

En étudiant les conditions de convergence absolue des séries trigonométriques [1]), j'ai établi la proposition suivante fondamentale pour cette étude:

Si

$$\left|\sum_{n=1}^{n=N} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| \leqq 1\,,$$

le maximum M de

$$\sum_{n=1}^{n=N} |a_n| + |b_n|$$

est de l'ordre de $\sqrt{N}$.

La démonstration s'appuie essentiellement sur la considération des fonctions

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{3/2}} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right)(p-n)\sin nx \qquad \text{(pour } p=4\mu+3\text{)},$$

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{3/2}} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right)(p-n)\cos nx \qquad \text{(ponr } p=4\mu+1\text{)},$$

où $\left(\frac{n}{p}\right)$ représente le symbole de Legendre.

Je me propose de démontrer ici quelques propriétés remarquables de ces fonctions, en supposant toujours p un nombre *premier:*

Soit d'abord $p=4\mu+3$. Nous allons établir le théorème que voici:

Théorème. *Entre toutes les fonctions de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \sin nx$$

[1]) Comptes Rendus, Juin 1914, et Communicat. de le Société Math. de Kharkow, t. XIV.

qui satisfont à la condition

$$\sum_{n=1}^{n=p-1} \left| a_n - a_{p-n} \right| = 1 \tag{1}$$

c'est la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right) (p-n) \sin nx$$

qui s'écarte le moins possible de zéro. Si la condition (1) est remplacée par

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} | a_n + a_{p-n} | = 1, \tag{1bis}$$

c'est la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x+\pi) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=p-1} (-1)^n \left(\frac{n}{p}\right) (n-p) \sin nx$$

qui s'écarte le moins possible de zéro.

A cet effet, vérfions d'abord le lemme suivant:

Pour toutes les fonctions

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \sin nx,$$

telles que

$$\left| \varphi\left(\frac{2h\pi}{p}\right) \right| \leqq 1 \qquad \left(h = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right),$$

on a

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} | \alpha_n | \leqq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

le signe $=$ *ayant lieu, lorsque* $\alpha_n = \dfrac{2}{\sqrt{p}} \left(\dfrac{n}{p}\right)$, *si* p *est un nombre premier de la forme* $4\mu + 3$.

En effet, on a

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \varphi^2 \left(\frac{2h\pi}{p}\right) = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2 . \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \sin^2 \frac{2nh\pi}{p} = \frac{p}{4} \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2 .$$

Donc,

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2 \leqq \frac{4}{p} . \frac{p-1}{2} = 2 \frac{p-1}{p} .$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n|$$

atteint son maximum, si

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = \ldots = |\alpha_{\frac{p-1}{2}}| = \frac{2}{\sqrt{p}}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| \leqq \frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

On reconnait, d'autre part, que, si l'on pose $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{p}\right)$, on

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| = \frac{p-1}{\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{2h\pi}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) = \pm 1,$$

p étant un nombre premier de la forme $4\mu + 3$. C. q. f. d.

Cela étant, considérons une fonction quelconque

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \sin nx.$$

On voit sans peine que

$$a_n = \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{h=p-1} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) \sin \frac{\pi n h}{p}. \tag{2}$$

Par conséquent,

$$\alpha_n = a_n - a_{p-n} = \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{h=p-1} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) \left(\sin \frac{\pi n h}{p} - \sin \frac{\pi (p-n) h}{p}\right) =$$

$$= \frac{4}{p} \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \sin \frac{2\pi n h}{p}. \tag{3}$$

Or, la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \sin nx,$$

où α_n est donné par la formule (3), satisfait évidemment aux équations

$$\varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) = f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \qquad \left(h = 1, 2, \ldots, \tfrac{p-1}{2}\right)$$

Donc, si

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{1}} |a_n - a_{p-n}| = 1, \tag{1}$$

on a, en vertu du lemme qui vient d'être démontré, au moins pour une valeur de h,

$$\left| f\left(\frac{2\pi h}{p}\right)\right| = \left|\varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right)\right| \geqq \frac{\sqrt{p}}{p-1}.$$

Ainsi, a fortiori, aucune des fonctions $f(x)$ qui satisfait à la condition (1) ne peut rester constamment inférieure à $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$. Or, la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right)(p-n)\sin nx$$

qui satisfait aussi à la condition (1) jouit précisément de la propriété que

$$\left|\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)\right| \leqq \frac{\sqrt{p}}{p-1},$$

le signe d'égalité ayant lieu pour $x = \frac{2h\pi}{p}\left(h = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$.

Donc, la fonction $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$ s'écarte le moins possible de zéro pour toutes les valeurs de x, *et l'écart minimum de zéro des fonctions satis faisant à (1) est précisément* $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$.

Pour obtenir le résultat énoncé dans le cas, où la condition (1) se trouve remplacée par (1^{bis}), il suffit de remarquer que, si $f(x)$ satisfait à la condition (1), $f(x+\pi)$ satisfait à la condition (1^{bis}); par conséquent, si $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$ fournit la solution dans le premier cas, c'est $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x+\pi)$ qui résout la question dans le second cas.

Notre théorème est donc entièrement démontré.

Corollaire. *Si* $a_k a_m a_{p-k} a_{p-m} \geqq 0$ *et*

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} |a_k| = M,$$

la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \sin nx \qquad (p=4\mu+3, \text{ premier})$$

ne peut rester moindre en valeur absolue que $\frac{M\sqrt{p}}{p-1}$; *cette valeur ne sera pas dépassée, seulement si*

$$\pm f(x) = \frac{M\sqrt{p}}{p-1} f_p(x+k\pi).$$

Démontrons à présent une propriété analogue de $f_p(x)$ dans le cas, où $p=4\mu+1$.

Théorème. *Entre toutes les fonctions de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=p-1} a_n \cos nx$$

qui satisfont aux conditions $f(0) = a_0\sqrt{p}$ *et*

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| = 1,$$

c'est la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right)(p-n)\cos nx$$

qui s'écarte le moins possible de zéro $(p=4\mu+1)$.

Remarquons d'abord que notre fonction satisfait bien aux conditions du théorème, puisque $f_p(0) = a_0 = 0$.

Démontrons ensuite le lemme suivant:

Si la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \cos nx$$

satisfait aux conditions $\varphi(0) = \alpha_0\sqrt{p}$ *et*

$$\left|\varphi\left(\frac{2h\pi}{p}\right)\right| \leqq 1 \qquad \left(h=1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right),$$

on a

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| \leqq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

le signe = ayant lieu, lorsque $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{p}\right)$, *pour* $p = 4\mu + 1$ *premier.*

En effet, on a

$$\frac{1}{2}\varphi^2(0) + \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \varphi^2\left(\frac{2n\pi}{p}\right) = \frac{p}{2}\alpha_0{}^2 + \frac{p}{4}\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n{}^2$$

et, puisqu'on a $\varphi(0) = \alpha_0\sqrt{p}$, donc

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \varphi^2\left(\frac{2n\pi}{p}\right) = \frac{p}{4}\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n{}^2,$$

Par conséquent, on a, comme plus haut,

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\,\alpha_n\,| \leq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

le signe = ne pouvant avoir lieu que, lorsqu'on a en même temps

$$\left|\varphi\left(\frac{2\pi}{p}\right)\right| = \ldots = \left|\varphi\left(\frac{p-1}{p}\pi\right)\right| \text{ et } |\,\alpha_1\,| = \ldots = \left|\,\alpha_{\frac{p-1}{2}}\right|;$$

or cette circonstance se présente précisément, si $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{p}\right)$, la fonction

$$\varphi_p(x) = \frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \left(\frac{n}{p}\right)\cos nx$$

satisfaisant à toutes les conditions du lemme.

Cela étant, considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=p-1} a_n \cos nx.$$

On aura

$$a_n = \frac{1}{p}[f(0) + (-1)^n f(\pi)] + \frac{2}{p}\sum_{h=1}^{h=p-1} f\left(\frac{\pi h}{p}\right)\cos\frac{\pi n h}{p},$$

$$a_0 = \frac{1}{2p}[f(0) + f(\pi)] + \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{h=p-1} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) = \frac{1}{p}f(0) + \frac{2}{p}\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{2\pi h}{p}\right).$$

Donc,

$$a_n + a_{p-n} = \frac{2}{p}f(0) + \frac{4}{p}\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{2\pi h}{p}\right)\cos\frac{2\pi n h}{p}.$$

Or, construisons la fonction

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \cos nx\,,$$

définie par les conditions

$$\varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right)=f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \qquad \left(h=0,\,1,\ldots,\frac{p-1}{2}\right);$$

nous aurons

$$\alpha_0=\frac{1}{p}\varphi(0)+\frac{2}{p}\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}\varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right)=a_0$$

$$\alpha_n=\frac{2}{p}\varphi(0)+\frac{4}{p}\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}\varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right)\cos\frac{2\pi nh}{p}=a_n+a_{p-n}. \tag{4}$$

Mais la condition $a_0=\frac{1}{\sqrt{p}}f(0)$ donne $\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{p}}\varphi(0)$ et, d'autre part,

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}|\alpha_h|=\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}|a_h+a_{p-h}|.$$

Par conséquent, en vertu de notre lemme, il y aura au moins une valeur de $h\left(h=1,\ldots,\frac{p-1}{2}\right)$, pour la quelle

$$\left|f\left(\frac{2\pi h}{p}\right)\right|\geqq\frac{\sqrt{p}}{p-1}\,,$$

si

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}|a_h+a_{p-h}|=1\,;$$

donc la fonction $\frac{\sqrt{p}}{p-1}f_p(x)$, dont le module ne dépasse jamais $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$, est bien celle qui s'écarte le moins possible de zéro.

A fortiori, pouvons nous affirmer la conséquence suivante:

Théorème. *Entre toutes les fonctions*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=p-1}a_n\cos nx \qquad (p=4\mu+1)$$

telles que $f(0) = 0$ *et*

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| = 1$$

c'est la fonction $\dfrac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$ *qui s'écarte le moins possible de zéro et cet écart minimum est* $\dfrac{\sqrt{p}}{p-1}$.

On obtient un résultat analogue et le même écart minimum en remplaçant $f(0)$ par $f(\pi)$ et $|a_n + a_{p-n}|$ par $|a_n - a_{p-n}|$.

Je ne sais pas, si dans les énoncés précédents (pour $p = 4\mu + 1$) on peut rejeter la condition $f(0) = 0$ (ou $f(\pi) = 0$). Il est certain en tout cas (comme je l'ai vérifié pour $p=5$) que cette restriction est nécessaire, si l'on veut considérer tout l'ensemble de fonctions pour lesquelles

$$\sum_{n=1}^{n=p-1} |a_n| \leq 1$$

au lieu de l'ensemble partiel qui satisfait aux conditions

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n - a_{p-n}| \leq 1$$

que nous nous sommes bornés d'envisager ici.