Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. Dorichenko, Стереометрия для всех,
Kvant, 2010, Number 6, 32–33

https://www.mathnet.ru/eng/kvant2541

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.175
December 15, 2025, 19:43:11

Стереометрия для всех

Стереометрия изучается в 10 и 11 классах и считается трудным предметом. Но многие стереометрические задачи доступны даже младшеклассникам. Мы собрали здесь несколько таких задач. А также добавили и более сложные задачи – формулировки их понятны любому, решения же требуют некоторой изобретательности (но минимум знаний).

Разминка

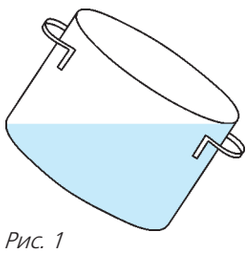

Рис. 1

1. Есть кран с водой и цилиндрическая кастрюля. Как набрать ровно половину кастрюли воды?

Решение. Наберем сначала полную кастрюлю, а потом отольем лишнее: будем наклонять ее до тех пор, пока не покажется дно (рис. 1).

2. Верно ли, что литровая и двухлитровая бутылки «Кока-Колы» подобны, т.е. одна получается из другой увеличением всех размеров в несколько раз?

Подсказка: решение не требует никаких вычислений!

3. а) Можно ли расположить пять одинаковых монет так, чтобы каждые две касались друг друга?

б) А можно ли расположить таким же образом шесть неоточенных карандашей?

Ответ. Можно в обоих пунктах.

Подсказка к пункту б): первые три карандаша положите на стол так, как показано на рисунке 2 (каждые два из них касаются друг друга).

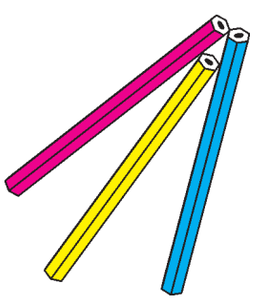

Рис. 2

4. После семи стирок и длина, и ширина, и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска?

Решение. На одну стирку – ведь объем куска мыла уменьшился в 8 раз.

5. Что тяжелее: два шара радиусов 3 см и 5 см или один шар радиуса 8 см? Шары сделаны из одного и того же материала.

Подсказка: подумайте, можно ли поместить первые два шара внутрь сферы радиуса 8 см.

6. Есть три одинаковых кирпича (прямоугольных параллелепипеда). Как с помощью линейки измерить длину диагонали кирпича (т. е. расстояние между двумя противоположными вершинами, не лежащими в одной грани)? Именно измерить, а не вычислить!

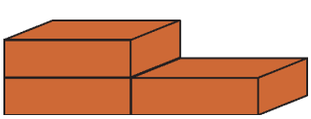

Рис. 3

Подсказка изображена на рисунке 3.

7. а) Можно ли выпилить из дерева выпуклую многогранную фигуру, отличную от куба, каждая грань которой квадрат?

б) А если фигура может быть невыпуклой?

Решение. а) Нельзя. *Указание*: в каждой вершине многогранника сходятся не меньше трех граней, а больше трех граней сходиться не может – сумма плоских углов при такой вершине будет не меньше 360°.

б) Можно: например, возьмем один кубик и приклеим к каждой его грани еще по такому же кубику. Такую фигуру можно выпилить.

8. Существует ли многогранник, все грани которого – равнобедренные прямоугольные треугольники?

Развертки

9. На одной из клеток клетчатой фигуры нарисовали краской букву *P* (рис. 4). На эту клетку поставили кубик с ребром, равным стороне клетки, и, перекатывая через ребра, прокатили по фигуре. При этом отпечаток буквы появился на грани кубика и на всех клетках, на которые становилась эта грань. В каких еще клетках появился отпечаток, и как именно там отпечаталась буква?

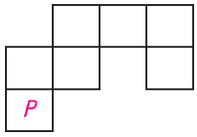

Рис. 4

10. Муравей сидит в вершине деревянного куба. Он хочет, двигаясь по поверхности куба, переползти в противоположную вершину по кратчайшему пути. Как ему это сделать?

Решение. Всего у куба шесть граней, три примыкают к вершине *A*, и три – к вершине *B* (рис. 5). Чтобы попасть из точки *A* в точку *B*, муравей должен в какой-то момент переползти с грани, примыкающей к *A*, на грань, примыкающую к *B*. Пусть это происходит на ребре *XY* в точке *M*. Но тогда ясно, что до этого момента муравью короче всего ползти по отрезку *AM*, а после этого момента короче всего ползти по отрезку *MB*. Вырежем мысленно те две грани, по которым ползет муравей, и расположим их на плоскости в виде прямоугольника (рис. 6). Для какой точки *M* путь *AM* + *MB* будет самым коротким? Конечно же, для середины отрезка *XY*: тогда он просто равен диагонали *AB* нашего мысленного прямоугольника. Значит, надо сначала ползти из *A* по прямой в середину одного из ребер, не примыкающих ни к *A*, ни к *B*, а потом ползти из этой середины по прямой в точку *B*.

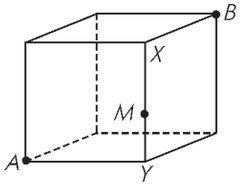

Рис. 5

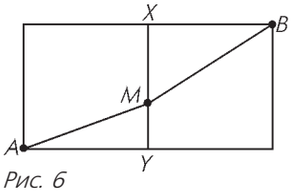

Рис. 6

11. В вершине *A* квадрата *ABCD* сидит муравей. Точки *A* и *C* разделяет вертикальная стена в виде равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой *BD*. Как муравью попасть в точку *C* кратчайшим путем?

Подсказка: умный в гору не пойдет.

12*. Дан кирпич (прямоугольный параллелепипед), по поверхности которого ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол? (Расстоянием между точками, с точки зрения муравья, является длина кратчайшего пути между этими точками, проходящего по поверхности кирпича.)

13*. Бумажный тетраэдр разрезали по ребрам так, что получилась плоская развертка. Может ли случиться, что эту развертку нельзя расположить на плоскости без наложений (в один слой)?

Ответ: может.

Замечание: до сих пор не решена проблема — верно ли, что любой выпуклый многогранник можно так разрезать по ребрам, что получится несамопересекающаяся плоская развертка?

Шары в пространстве

14. а) Можно ли так расположить четыре одинаковых шара в пространстве, чтобы каждый касался всех остальных?

б) А пять шаров (не обязательно одинаковых)?

Решение. а) Положим три одинаковых шара на стол и сдвинем их так, чтобы любые два касались друг друга. Затем положим один шар сверху так, чтобы он коснулся остальных. (В итоге центры шаров будут располагаться в вершинах правильного тетраэдра со стороной, равной удвоенному радиусу шара.)

б) Возьмем пирамидку из четырех шаров, построенную в предыдущем пункте. В центр этой пирамидки поместим маленький шарик и начнем раздувать его, пока он не коснется остальных четырех шаров. Такой момент обязательно наступит, и касание будет сразу со всеми шарами пирамидки из-за ее симметричности.

15. Есть 20 шариков, склеенных так, что получилось две «цепочки» по 4 шарика в каждой и два «прямоугольника» из 6 шариков со сторонами 2 и 3 шарика (рис. 7). Как сложить эти 4 набора, чтобы получилась составленная из шариков треугольная пирамида?

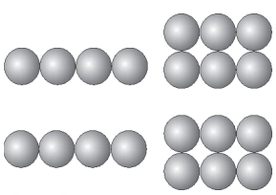

Рис. 7

16. В пространстве имеется точечная лампочка, светящая во все стороны. Можно ли подобрать 4 непрозрачных шара и так расположить их в пространстве, чтобы они не пересекали друг друга, не касались лампочки и полностью загораживали свет от нее (т.е. чтобы любой луч, выходящий из лампочки, упирался в один из этих шаров)?

Решение. Рассмотрим в пространстве такой правильный тетраэдр, что наша лампочка попадет ровно в его центр. Опишем вокруг одной из граней тетраэдра окружность. Соединим лампочку лучами со всеми точками этой окружности. Получим бесконечный конус. В этот конус можно положить шар (любого размера), и он закроет собой все лучи, идущие из лампочки внутри этого конуса. А как быть с лучами, идущими по границе конуса: они упираются в наш шар или нет? Для надежности увеличим немного размеры нашего шара (не меняя положение его центра и так, чтобы не задеть лампочку): тогда лучи, идущие по границе конуса, тоже упрутся в шар. Теперь рассмотрим второй конус (полученный с помощью другой грани тетраэдра). И его можно закрыть шаром, надо только расположить его далеко от лампочки (взяв для этого шар достаточно большого радиуса), чтобы он не пересекся с предыдущим шаром. Аналогично строим и закрываем еще два конуса. Так как луч, выходящий из лампочки, лежит в одном из конусов, шары загораживают весь свет от нее.

Проекции

17. а) Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано слева на рисунке 8. А если смотреть справа — то как на рисунке 8 справа. Нарисуйте вид сверху.

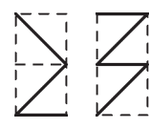

Рис. 8

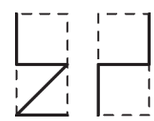

Рис. 9

б) Та же задача для рисунка 9.

18. Может ли тень куба быть правильным шестиугольником?

19. Существует ли выпуклый многогранник, ни одна грань которого не является квадратом, с таким свойством: если посмотреть на него сверху, спереди и сбоку, то мы каждый раз увидим квадрат?

Разное

20. Можно ли расположить восемь пирамид в пространстве так, чтобы каждые две соприкасались гранями (по участку ненулевой площади)?

21. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на ребрах этого многогранника?

22. Пирамиду, основание которой правильный треугольник, а боковые грани равнобедренные прямоугольные треугольники, отразили относительно середины высоты пирамиды. Какая фигура будет пересечением исходной и отраженной пирамид?

Подсказка: эта фигура вам очень хорошо известна.

23. Можно ли разбить какую-нибудь призму на непересекающиеся пирамиды, у каждой из которых основание лежит на одном из оснований призмы, а вершина — на другом основании призмы?

24. Можно ли в пространстве составить замкнутую цепочку из нечетного числа одинаковых согласованно вращающихся шестеренок? Для простоты считайте шестеренки кругами; шестеренки сцеплены если соответствующие окружности в точке соприкосновения имеют общую касательную.

25*. Есть циркуль, линейка, бумага, карандаш и деревянный шар. Можно рисовать на шаре (циркулем и карандашом) и на бумаге (здесь можно пользоваться и линейкой). Как нарисовать на бумаге отрезок, равный радиусу шара?

Материал подготовил С.Дориченко