Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

L. N. Shevrin, On the theory of periodic semigroups,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1974, Number 5, 205–215

https://www.mathnet.ru/eng/ivm6599

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.175
December 14, 2025, 20:03:04

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 5 (144)

УДК 519.4

Л. Н. Шеврин

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

К семидесятилетию
Александра Петровича Нордена

§ 1. Введение

1.1. Общие замечания. При изучении строения полугрупп разных типов очень часто приходится обращаться к рассмотрению их подполугрупп, всех или некоторых. Одна из распространенных ситуаций, когда такой подход актуален, возникает, в частности, если условия, накладываемые на полугруппу, наследственны для подполугрупп. Знание при этом некоторых „канонических" типов подполугрупп может оказаться полезным. Подчас роль таких канонических подполугрупп играют уже циклические подполугруппы, и иногда при их рассмотрении возникают те или иные ограничения на порядок элементов или индекс, или период, что позволяет получить определенную информацию о всей полугруппе. В ряде специфических ситуаций такую роль играют другие подполугруппы, например, нильпотентные подполугруппы в нильполугруппах, прямоугольные подполугруппы в полугруппах идемпотентов и т. п.

В настоящей работе мы исследуем произвольные бесконечные периодические полугруппы. Основной результат статьи описывает класс П бесконечных полугрупп, обладающий тем свойством, что в любой бесконечной периодической полугруппе существует подполугруппа, изоморфная некоторой полугруппе из П. Разумеется, для целей работы нужно рассматривать только счетные полугруппы, поэтому в дальнейшем слова „бесконечная" и „счетная" можно считать синонимами. Среди типов полугрупп, составляющих класс П, один — это группы, и класс П является минимальным „по модулю групп": любой его подкласс, не содержащий хотя бы одну полугруппу из П, не являющуюся группой, уже не обладает отмеченным свойством. Полугруппы из П, не являющиеся группами, перечислены с точностью до изоморфизма; таковых пять типов, один из этих типов определяет единственную полугруппу, два других — по две полугруппы, а два остальных — счетные серии, зависящие от двух натуральных параметров и еще от очень небольшого числа определяющих соотношений. Следовательно, „по модулю групп" задача решается исчерпывающим образом, причем необходимо отметить, что все упомянутые полугруппы устроены крайне просто. Что касается дальнейшей детализации для групп, то, например, в случае локально конечных групп она непосредственно получается, если воспользоваться известной теоремой Каргаполова — Холла — Кулатилака (см. [1], § Д. 16, где имеется и информация о некоторых ее обобщениях): эта теорема сводит задачу к абелевым группам, а для последних класс с обсуждаемым свойством составляют, легко понять, группы типа p^∞ и бесконечные прямые произведения циклических

групп простого порядка; в общем же случае пока, по-видимому, трудно рассчитывать на получение подобного перечня.

Теорема, составляющая основной результат, сформулирована и доказана в § 2. Эта теорема — сама по себе или с сопутствующими ей утверждениями — допускает ряд применений. Некоторые из них рассмотрены в § 3. Здесь отмечено, что из результатов настоящей статьи непосредственно вытекают центральные результаты работ [2] — [5] о полугруппах с некоторыми условиями конечности, а также определено строение „по модулю групп" слойно конечных полугрупп. Другое из осуществленных нами сейчас применений состоит в описании счетно однородных полугрупп — под таким названием мы объединяем бесконечные полугруппы, все счетные подполугруппы которых „похожи" в различных естественных смыслах (например, изоморфны). В свою очередь, из этих результатов (как, впрочем, и непосредственно из теоремы настоящей статьи) вытекает описание категоричных в некоторой бесконечной мощности универсально аксиоматизируемых классов полугрупп, полученное недавно С. А. Чихачевым (работа печатается в „Сибирском математическом журнале"), описание многообразий полугрупп, все бесконечные полугруппы которых эквационально эквивалентны. Из-за недостатка места последние применения не могли быть включены в данную статью, и они будут рассмотрены в другом месте.

1.2. Определения. В терминологии мы в основном следуем книге [6] и работе [7]. Для обозначения операции порождения подполугруппы используем острые скобки. Через K_e обозначаем класс кручения данной периодической полугруппы S, соответствующий идемпотенту e, т. е. множество $\{x \in S \mid e \in \langle x \rangle\}$; через G_e обозначаем наибольшую подгруппу, содержащуюся в K_e. Полугруппу, все элементы которой суть левые или правые нули, мы называем *сингулярной*.

Мы будем пользоваться отношением естественного частичного порядка $\leqslant$ на множестве E идемпотентов данной полугруппы:

$$e \leqslant f \Longleftrightarrow ef = fe = e,$$

и соответственно говорить, например, о *цепях* в E. Нам будет удобно договориться также о следующей терминологии: частично упорядоченное множество с наименьшим элементом, все остальные элементы которого попарно несравнимы, назовем *веером*; наименьший элемент веера естественно назвать его *нулем*. Полуструктуру, являющуюся веером, будем, как и в [8], называть *веерной*; заметим, что в соответствии с терминологией [6] ее можно было бы назвать примитивной. Веер V в частично упорядоченном множестве P назовем *плотным*, если между любым ненулевым элементом V и его нулем нет не только других элементов из V (что предписано определением), но и из P. Ниже нам придется сослаться на следующее простое утверждение, доказательство которого проводится стандартными рассуждениями и может быть здесь опущено.

Замечание. Если в бесконечном частично упорядоченном множестве P все цепи конечны и множество всех минимальных элементов P конечно, то в P есть бесконечный плотный веер.

Остальная часть этого раздела посвящена рассмотрению полугрупп, заданных над алфавитом A некоторыми определяющими соотношениями. Перечислим основные из используемых ниже соотношений:

$$abc = a'b'c' \text{ для любых } a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c' \in A; \tag{1}$$

если $h > 1$ и d — фиксированные натуральные числа, то

$$a^h = a^{h+d} \text{ для любого } a \in A; \tag{2}$$

$$a^2 = b^2 \text{ для любых } a,\ b \in A; \tag{3}$$

если $\lesssim$ — фиксированное отношение строгого линейного порядка на множестве A, то

$$\left.\begin{array}{l} ab = a'b' \\ ba = b'a' \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{для любых } a,\ b,\ a',\ b' \in A \\ \text{таких, что } a \lesssim b,\ a' \lesssim b'. \end{array} \tag{4}$$

Если в полугруппе $S = \langle A \rangle$ выполнено соотношение (1), то идеал S^3 совпадает с идеалом $\langle a \rangle^3$ для любого $a \in A$; если к тому же выполняется (2), то этот идеал конечен. В последнем случае S — периодическая полугруппа с единственным идемпотентом, скажем e, и ее ядро есть циклическая группа порядка d. В силу (1) ясно, что $ae = be$ для любых $a,\ b \in A$; обозначим этот элемент через r_0. Введем также постоянные обозначения для элементов, которым равны произведения, указанные в соотношениях (3) и (4): для (3) r_{11}, для (4) соответственно r_{12} и r_{21} (очевидна некоторая мнемоническая роль таких обозначений). Тип упорядоченного множества $(A,\ \lesssim)$ обозначим через α.

Мы будем иметь дело с полугруппами, заданными над некоторым алфавитом A определяющими соотношениями (1) — (4) и, быть может, дополнительными соотношениями, приравнивающими элементы r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_0^2 друг другу в любых комбинациях. Произвольная такая полугруппа S, как видно из сказанного в предыдущем абзаце, устроена очень просто, и к перечисленным только что свойствам нужно добавить, что идеал S^2 конечен и $S^2 \setminus S^3 \subseteq \{r_{11},\ r_{12},\ r_{21}\}$. Отметим, что, если хотя бы один из элементов r_{12}, r_{21} равен r_0^2, то можно считать $h \leqslant 3$; в самом деле, тогда в силу (1) и (2), очевидно, $a^3 = a^{3+d}$ для любого $a \in A$. Столь же очевидно, что соотношение $r_{11} = r_0^2$ можно считать эквивалентным равенству $h = 2$. Учитывая сказанное, для однозначности сопоставления каждому из получающихся типов полугрупп параметра h будем считать, что при $h > 2$ всегда $r_{11} \neq r_0^2$, а при $h > 3$ к тому же $r_{12} \neq r_0^2 \neq r_{21}$. Тогда, если фиксировать α, h и d, то при $h \neq 3$ в дополнительных определяющих соотношениях участвуют лишь элементы r_{11}, r_{12}, r_{21} и мы получаем 5 возможных типов, а при $h = 3$ получаем 10 типов; автор освобождает себя от рутинного перечисления их и указания для них условий изоморфизма (и антиизоморфизма). Необходимо только договориться об обозначениях, выражающих эту классификацию. Прежде всего, отметим, что порядковый тип α определяет строение рассматриваемой полугруппы S лишь в случае, когда $r_{12} \neq r_{21}$; если $r_{12} = r_{21}$, то определяющей является мощность множества A. В первом случае условимся говорить, что S *имеет тип* $[h,\ d,\ \alpha]$, во втором — *тип* $[h,\ d,\ =]$; при желании подчеркнуть во втором случае мощность множества A, можно сделать это словами. Непосредственно для нужд данной работы дальнейшая детализация типов не понадобится (кстати, в качестве α у нас будет выступать только первое бесконечное порядковое число ω). В случае необходимости, по-видимому, было бы удобно обозначать рассматриваемые типы дописыванием к последовательности уже указанных символов в квадратных скобках соответствующих дополнительных определяющих соотношений или подчеркиванием их невыполнения; например, можно говорить о типе $[h,\ d,\ =,\ r_{11} = r_{12}]$.

§ 2. Основной результат

Теорема. *Произвольная бесконечная периодическая полугруппа содержит бесконечную подполугруппу одного из следующих типов*:

1) *группа*,
2) *полугруппа типа* $[h, d, =]$ *для некоторых* h *и* d,
3) *полугруппа типа* $[h, d, \omega]$ *для некоторых* h *и* d,
4) *сингулярная полугруппа*,
5) *веерная полуструктура*,
6) *цепь типа* ω *или* ω^*.

Весь параграф посвящен доказательству теоремы. Пусть S — бесконечная периодическая полугруппа, E — множество всех ее идемпотентов. Доказательство естественно распадается на два случая в зависимости от того, конечно E или бесконечно. Однако в первом случае целесообразно рассмотреть сначала важный частный подслучай нильполугрупп.

2.1. О бесконечных нильполугруппах. Пусть P — бесконечная нильполугруппа. Мы существенно опираемся на теорему 1.2 работы [9], согласно которой P обладает бесконечными нильпотентными подполугруппами. Среди таких зафиксируем подполугруппу M наименьшего возможного класса нильпотентности. Пусть этот класс равен m. Подполугруппа M^2 имеет класс нильпотентности меньше m, следовательно, она конечна. Тогда существует бесконечное подмножество $A_0 \subseteq M \setminus M^2$ такое, что

$$a^2 = b^2 \text{ для любых } a, b \in A_0. \tag{5}$$

Аналогично, существует бесконечное подмножество $A_1 \subseteq A_0$ такое, что

$$a^3 = b^3 \text{ для любых } a, b \in A_1. \tag{6}$$

Возьмем произвольный элемент $a_1 \in A_1$. Множество $a_1 A_1$ конечно, поэтому для некоторого бесконечного подмножества $A_2 \subseteq A_1 \setminus \{a_1\}$ имеем $a_1 b = a_1 c$ при любых $b, c \in A_2$. Аналогично, взяв произвольный элемент $a_2 \in A_2$, для некоторого бесконечного подмножества $A_3 \subseteq A_2 \setminus \{a_2\}$ имеем $a_2 b = a_2 c$ при любых $b, c \in A_3$. Этот процесс может быть продолжен бесконечно; в результате мы получим последовательность $a_1, a_2, \ldots$ с тем свойством, что для любых натуральных i, j, k, таких, что $i < j \leqslant k$, имеет место $a_i a_j = a_i a_k$. Таких различных произведений при всевозможных i снова конечное число, поэтому из указанной последовательности можно выбрать подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ с тем свойством, что для любых натуральных p, q, r, s при $p < q$, $r < s$ имеет место

$$a_{i_p} a_{i_q} = a_{i_r} a_{i_s}. \tag{7}$$

Двойственные рассуждения показывают, что существует подпоследовательность $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots$ последовательности $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ такая, что для любых натуральных p, q, r, s при $p < q$, $r < s$ имеет место

$$a_{j_q} a_{j_p} = a_{j_s} a_{j_r}. \tag{8}$$

Положим $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots\} = A$. Элементы, которым равны выражения в (7) и (8), обозначим соответственно через r_{12} и r_{21}. Из соотношений (5) — (8) несложными рассуждениями, перебирая возможные ва-

рианты взаимного расположения элементов из A в указанной последовательности, выводим, что $abc = a^3$ для любых $a, b, c \in A$. Отсюда вытекает соотношение (1). Вспоминая определения из раздела 1.2, заключаем, что $\langle A \rangle$ будет полугруппой типа $[h, 1, =]$ при $r_{12} = r_{21}$ или типа $[h, 1, \omega]$ при $r_{12} \neq r_{21}$. Здесь $h = m$, если порядок элементов из A превосходит 2; если же $a^2 = 0$ для $a \in A$, то $h = 2 = m - 1$ при $r_{12} \neq 0$ или $r_{21} \neq 0$, и $h = 2 = m$ при $r_{12} = r_{21} = 0$ (в последнем случае $\langle A \rangle$ — полугруппа с нулевым умножением).

Итак, доказана следующая

Лемма 1. *Произвольная бесконечная нильполугруппа содержит бесконечную подполугруппу типа* $[h, 1, =]$ *или* $[h, 1, \omega]$ *для некоторого* h.

2.2. Бесконечные периодические полугруппы с конечным числом идемпотентов. Пусть E конечно. Тогда существует бесконечный класс кручения K_e. Если G_e бесконечно, то сразу имеем бесконечную подполугруппу типа 1), так что считаем, что G_e конечно. Тогда множество нильэлементов факторполугруппы Риса $\langle K_e \rangle / G_e$ бесконечно; вместе с тем число ее идемпотентов конечно. Нашей целью теперь будет доказательство следующей леммы, после чего мы воспользуемся результатом предыдущего раздела.

Лемма 2. *Произвольная периодическая полугруппа с нулем, имеющая конечное число идемпотентов и бесконечное множество нильэлементов, содержит бесконечную нильподполугруппу.*

Пусть F — полугруппа, удовлетворяющая условию леммы, P — множество всех ее нильэлементов, Q — множество всех элементов из P, квадраты которых равны нулю. Рассмотрим два возможных случая.

1. Q бесконечно. Покажем, что в $\langle Q \rangle$ содержится бесконечная нильподполугруппа. Применим индукцию по числу n идемпотентов полугруппы $\langle Q \rangle$. При $n = 1$ $\langle Q \rangle$ есть просто нильполугруппа и доказывать нечего. Пусть $n > 1$ и требуемое утверждение доказано для полугрупп с бесконечным порождающим множеством из нильэлементов второго порядка и числом идемпотентов меньше n. Разобьем Q на счетное множество бесконечных подмножеств $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$. Если хотя бы для одного из подмножеств T_i выполняется $\langle T_i \rangle \subseteq P$, то сразу получаем требуемое. Поэтому предположим, что $\langle T_i \rangle$ не $\subseteq P$ для любого i. Тогда для каждого i в F существует идемпотент $e_i \neq 0$ такой, что $e_i \in \langle T_i \rangle$. Имеем $e_i \in F t_i$ для некоторого $t_i \in T_i$, откуда $e_i t_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Среди идемпотентов e_i различных лишь конечное число, следовательно, существует такой e, что $e t_i = 0$ для некоторого бесконечного множества индексов i, скажем I. Поскольку $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, множество $Q' = \{t_i \mid i \in I\}$ бесконечно. Имеем $e \notin \langle Q' \rangle$, ибо в противном случае $e \in t_j F$ для некоторого $j \in I$, откуда, очевидно, вытекает $e = 0$, что противоречиво. Таким образом, в полугруппе $\langle Q' \rangle$ число идемпотентов меньше n, и остается воспользоваться предположением индукции.

2. Q конечно. Здесь схема доказательства близка схеме доказательства леммы 6 работы [5], и мы не будем разъяснять аналогичные детали.

Пусть $\mathfrak{N}_1$ — семейство всех подполугрупп, содержащихся в P. Если среди них есть бесконечная, то доказывать нечего. Пусть все

они конечны. Тогда они нильпотентны, семейство $\mathfrak{N}_1$ бесконечно и объединение B_1 аннуляторов полугрупп из $\mathfrak{N}_1$ содержит ненулевые элементы. Но $B_1 \subseteq Q$, так что B_1 конечно, и тогда существует подполугруппа H_1, имеющая нетривиальный (конечный) аннулятор A_1 и такая, что множество $H_1 \cap P$ бесконечно. Факторполугруппа Риса $F_1 = H_1/A_1$ снова имеет бесконечное множество нильэлементов. Если множество Q_1 нильэлементов второго порядка из F_1 бесконечно, то в силу доказанного в п. 1 в $\langle Q_1 \rangle$ есть бесконечная нильподполугруппа, и тогда ее полный прообраз при естественном гомоморфизме H_1 на F_1 есть бесконечная подполугруппа из P, что противоречит предположению. Следовательно, Q_1 конечно. Теперь рассуждения продолжаем так же, как выше для F: констатируем существование в F_1 подполугруппы $\overline{H}_2$ с бесконечным множеством нильэлементов и нетривиальным аннулятором $\overline{A}_2$, обозначаем через H_2 и A_2 соответственно полные прообразы $\overline{H}_2$ и $\overline{A}_2$ при естественном гомоморфизме H_1 на F_1 и переходим к рассмотрению полугруппы $F_2 = H_2/A_2$ и множества Q_2 нильэлементов второго порядка из F_2.

Продолжаемый таким образом процесс приводит к построению строго возрастающей цепи (конечных) нильпотентных подполугрупп полугруппы F: $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ Объединение этой цепи является бесконечной нильполугруппой. Итак, в любом случае мы приходим к существованию в F бесконечной нильподполугруппы.

Лемма 2 доказана. В связи с ней возникает вопрос, справедливо ли то же заключение, если отказаться от требования конечности множества идемпотентов. Отрицательный ответ на этот вопрос доставляет следующий простой

Пример 1. Пусть F — полугруппа с нулем 0, заданная над бесконечным алфавитом $\{t_1, t_2, \ldots\}$ определяющими соотношениями: $t_i^2 = 0$ при всех i, $t_i t_j t_i = t_i$, $t_i t_j t_k = t_i t_k$ при любых различных i, j, k. В обозначениях доказательства леммы имеем $P = Q = \{0, t_1, t_2, \ldots\}$, $E \setminus \{0\} = F \setminus P = \{t_i t_j \mid i \neq j\}$. Очевидно, максимальные подполугруппы в P двухэлементны, а именно, имеют вид $\{0, t_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$

Теперь закончим рассмотрения этого раздела. На основании лемм 2 и 1 в $\langle K_e \rangle / G_e$ существует бесконечная подполугруппа $\overline{H}$ типа $[h, 1, =]$ или $[h, 1, \omega]$. Пусть H — ее полный прообраз при естественном гомоморфизме $\langle K_e \rangle$ на $\langle K_e \rangle / G_e$. Положим $H \setminus H^2 = A_0$ и рассмотрим подполугруппу $B = \langle A_0 \rangle$. Вообще говоря, $B \neq H$, но ясно, что $B \setminus G_e = H \setminus G_e$, и поэтому для B верны все те из соотношений (1), (3), (4) и, возможно, дополнительных (приравнивающих некоторые из элементов r_{11}, r_{12}, r_{21} друг другу), для которых участвующие в них выражения представляют элементы не из $B \cap G_e$. Если мы теперь убедимся в том, что все элементы из $B \cap G_e$, представимые словами одной и той же длины, не меньшей 2, в алфавите A, где A — некоторое бесконечное подмножество из A_0, равны между собой, то вместе с только что сказанным это, как легко видеть, будет означать, что подполугруппа $\langle A \rangle$ имеет соответственно тип $[h, d, =]$ или $[h, d, \omega]$. Но $eA_0 \subseteq G_e$ и, т. к. G_e конечно, для некоторого бесконечного подмножества $A \subseteq A_0$ имеем $ea = eb$ при любых $a, b \in A$. Элемент, указанный этим равенством, обозначим через r_0. Тогда, если для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ имеем $a_1 a_2 \ldots a_n \in G_e$, то $a_1 a_2 \ldots a_n = a_1 a_2 \ldots a_n e = a_1 e a_2 e \ldots a_n e = r_0^n$, откуда и следует требуемое.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3. *Если в данной периодической полугруппе число идемпотентов конечно и класс кручения K_e бесконечен, а группа G_e конечна, то подполугруппа $\langle K_e \rangle$ содержит бесконечную подполугруппу типа $[h, d, =]$ или $[h, d, \omega]$ для некоторых h и d.*

В целом же ситуацию в рассматриваемом случае характеризует

Предложение 1. *Произвольная бесконечная периодическая полугруппа с конечным числом идемпотентов содержит бесконечную подполугруппу одного из типов* 1) — 3) *из формулировки теоремы.*

Апостериори видим, в частности, что всякая бесконечная периодическая полугруппа с конечным числом идемпотентов содержит бесконечную подполугруппу с единственным идемпотентом.

2.3. Периодические полугруппы с бесконечным множеством идемпотентов. Теперь пусть E бесконечно. Если в E есть бесконечная цепь, то имеется и подполугруппа типа 6). Таким образом, с учетом того, что нам требуется доказать, остается исследовать случай, когда *в E все цепи конечны и в S нет бесконечных сингулярных подполугрупп.* Учитывая результаты разделов 2.1 и 2.2, мы будем также предполагать, что *в S нет подполугрупп с нулем, содержащих лишь конечное число идемпотентов и бесконечно много нильэлементов.*

Пусть W — произвольное бесконечное подмножество из E. Рассмотрим произвольный элемент $x \in W$. Пусть $y_1, y_2, \ldots$ — остальные элементы W и $xy_i \in K_{e_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Положим $\{e_1, e_2, \ldots\} = W_x$. Ради удобства дальнейших рассуждений договоримся о следующей терминологии: скажем, что *W растянуто слева*, если существует $x \in W$, для которого W_x бесконечно; в противном случае будем говорить, что *W стянуто слева.*

Покажем, что при наших предположениях все бесконечные подмножества из E не могут быть растянутыми слева. Допустим противное. Возьмем произвольное бесконечное подмножество W и элемент $x_1 \in W$, для которого W_{x_1} бесконечно. Из определения W_{x_1} вытекает, что $x_1 w = w$ для любого $w \in W_{x_1}$. Сам элемент x_1 может принадлежать или не принадлежать W_{x_1}. Полагая $W_1 = W_{x_1} \setminus \{x_1\}$, мы получаем, что $x_1 \notin W_1$ и x_1 является левой единицей для всех элементов подполугруппы $S_1 = \langle W_1 \rangle$. При этом $x_1 \notin S_1$, ибо в противном случае $x_1 \in Sw$ для некоторого $w \in W_1$, откуда $x_1 w = x_1$, что противоречит равенству $x_1 w = w$.

Полугруппа S_1 удовлетворяет тем же предположениям: множество $S_1 \cap E$ бесконечно и все бесконечные подмножества из $S_1 \cap E$ растянуты слева. Поэтому аналогично предыдущему в ней существует такой элемент x_2 и такая подполугруппа S_2 с бесконечным множеством идемпотентов, что $x_2 \notin S_2$ и x_2 является левой единицей для всех элементов из S_2. Продолжаемый таким образом процесс, очевидно, бесконечен, и мы получаем последовательность идемпотентов $x_1, x_2, \ldots$ с тем свойством, что $x_i x_j = x_j$ при любых $i < j$. Но тогда подполугруппа $X = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$, как сразу проверяется, содержится в E. Имеем, очевидно, $x_1 \geqslant x_2 x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_k x_{k-1} \ldots x_2 x_1 \geqslant \ldots$ Следовательно, в силу предположения для некоторого n и для любого $k = 1, 2, \ldots$

$$x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 = x_{n+k} x_{n+k-1} \ldots x_2 x_1.$$

Рассмотрим разложение X в полуструктуру прямоугольных связок и образ произвольного элемента $x \in X$ при естественном гомо-

морфизме на соответствующую факторполуструктуру обозначим через $\bar{x}$. В силу свойств элементов x_i для любого $m > 1$ имеем

$$\overline{x_m x_{m-1} \dots x_2 x_1} = \bar{x}_m \bar{x}_{m-1} \dots \bar{x}_2 \bar{x}_1 = \overline{x_1 x_2 \dots x_{m-1} x_m} = \bar{x}_m.$$

Поэтому, учитывая предыдущие соотношения, получаем $\bar{x}_n = \bar{x}_{n+k}$ для любого $k = 1, 2, \dots$ Следовательно, прямоугольная связка R, содержащая x_n, бесконечна, а поскольку, как известно, R есть прямое произведение полугруппы левых нулей и полугруппы правых нулей, то в R имеется бесконечная сингулярная подполугруппа, что исключено предположением.

Итак, в E существует бесконечное подмножество W, стянутое слева. Из определения вытекает, что подмножество, содержащее растянутое слева подмножество, само будет таким же. Следовательно, все бесконечные подмножества из W стянуты слева. Фиксируем произвольный элемент $a \in W$. Поскольку множество W_a конечно, существует такой идемпотент e и такое бесконечное подмножество $W' \subseteq W$, что $aw \in K_e$ для любого $w \in W'$. Так как $ew = e$ для каждого $w \in W'$, элемент e будет левым нулем в подполугруппе $D = \langle e, W' \rangle$. Множество всех левых нулей D обозначим через L. Заметим, что L совпадает с множеством всех минимальных элементов множества $D \cap E$. Действительно, ясно, что каждый элемент из L минимален в $D \cap E$, а для любого минимального $f \in D \cap E$ и любого $y \in L$ имеем $f \geqslant fy$, откуда $f = fy$. Но $fy \in L$, поскольку L — идеал в D.

В силу нашего предположения L не может быть бесконечным. Тогда по замечанию из раздела 1.2 в $D \cap E$ есть бесконечный плотный веер V. Пусть 0 — его нуль. Ясно, что 0 будет нулем подполугруппы $\langle V \rangle$, откуда, в частности, $0 \leqslant x$ для любого $x \in \langle V \rangle \cap E$. Если в рассмотрениях предыдущего абзаца в качестве W взять V, в качестве a — произвольный отличный от 0 элемент $v_1 \in V$ и считать, что $b_1, b_2, \dots$ — остальные элементы $V \setminus \{0\}$, то мы констатируем существование такого идемпотента $e \in \langle V \rangle$, что $eb_i = e$, когда i пробегает некоторое бесконечное множество N_1 натуральных чисел. Тогда элементы $b_i e$, где $i \in N_1$, суть идемпотенты, причем $0 \leqslant b_i e \leqslant b_i$. Если для всех $i \in N_1$ имеем $b_i e \neq 0$, то, поскольку V — плотный веер в $D \cap E$, $b_i e = b_i$, откуда, пользуясь предыдущим равенством, получаем $b_i b_j = b_i$ при $i, j \in N_1$, т. е. $\{b_i \mid i \in N_1\}$ есть бесконечная полугруппа левых нулей, что исключено предположением. Следовательно, $b_i e = 0$ для некоторого i, откуда $e = eb_i e = 0$. Так как у нас теперь множество $\{b_i \mid i \in N_1\}$ играет роль множества W' из рассмотрений предыдущего абзаца, имеем $v_1 b_i \in K_e$ при $i \in N_1$, так что, поскольку $e = 0$, все эти элементы $v_1 b_i$ суть нильэлементы в $\langle V \rangle$. Тогда, очевидно, и все элементы $b_i v_1$ — нильэлементы.

Покажем, что подполугруппа $F_1 = \langle v_1 b_i \mid i \in N_1 \rangle$ содержит лишь конечное число идемпотентов. Допустим противное и рассмотрим бесконечное множество ненулевых идемпотентов $f_1, f_2, \dots$ из F_2. Для каждого f_j имеем $f_j \in v_1 S$, откуда $v_1 f_j = f_j$, так что $f_j v_1$ — идемпотент, причем $0 \leqslant f_j v_1 \leqslant v_1$. Опять воспользуемся тем, что V — плотный веер в $D \cap E$. Тогда $f_j v_1 = 0$ или $f_j v_1 = v_1$. Но первое невозможно, ибо иначе $f_j = f_j v_1 f_j = 0$, что противоречиво. Следовательно, $f_j v_1 = v_1$ для любого j. Отсюда, аналогично предыдущему, вытекает, что $\{f_1, f_2, \dots\}$ есть бесконечная полугруппа правых нулей, а это исключено предположением.

В силу нашего предположения в F_1 тогда лишь конечное число нильэлементов, поэтому для некоторого бесконечного подмножества $N_2 \subseteq N_1$ имеем $v_1 b_i = v_1 b_j$ при любых $i, j \in N_2$. Элемент, указанный в этом равенстве, обозначим через c. Если в предыдущих рассмотрениях в качестве W взять не V, а $\{b_j \mid j \in N_2\}$, то так же, как и выше, получаем $0 \in \langle b_j \mid j \in N_2 \rangle$; отсюда, поскольку $cb_j = c$ для всех $j \in N_2$, вытекает, очевидно, $c = 0$.

В силу двойственных соображений существует бесконечное подмножество $N_3 \subseteq N_2$ такое, что $b_k v_1 = 0$ при $k \in N_3$. Итак, $v_1 b_k = b_k v_1 = 0$ при $k \in N_3$. При этом ясно, что $v_1 \notin \langle b_k \mid k \in N_3 \rangle$: в противном случае мы получили бы $b_k v_1 = v_1$ для некоторого k.

Фиксируя теперь произвольный элемент v_2 множества $\{b_k \mid k \in N_3\}$, аналогично проделанному выше можем констатировать существование такого бесконечного подмножества $N_4 \subset N_3$, что $v_2 b_l = b_l v_2 = 0$ при $l \in N_4$. Этот процесс бесконечен, и мы получаем бесконечную последовательность идемпотентов $v_1, v_2, \ldots$, для которых $v_i v_j = v_j v_i = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, $\{0, v_1, v_2, \ldots\}$ есть веерная полуструктура.

Подводя итоги доказанному в этом разделе, сформулируем

Предложение 2. *Произвольная периодическая полугруппа, содержащая бесконечное множество идемпотентов, обладает бесконечной подполугруппой одного из типов* 2) — 6) *из формулировки теоремы, причем в типах* 2) *и* 3) *можно считать* $d = 1$.

Апостериори видим, в частности, что *всякая периодическая полугруппа с бесконечным множеством идемпотентов содержит бесконечную полугруппу, являющуюся нильпотентной полугруппой или полугруппой идемпотентов.*

На естественный вопрос, нельзя ли здесь уменьшить список, убрав типы 2) и 3), отрицательный ответ дает следующий простой

Пример 2. Пусть F — свободное произведение счетного семейства одноэлементных полугрупп $\{f_i\}$. Через F_3 обозначим множество всех элементов из F, представимых в виде приведенных слов длины, не меньшей 3 (т. е. слов вида $f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_n}$, где $n \geqslant 3$ и соседние элементы f_{i_k} различны). Множество F_3 — идеал, фактор-полугруппа Риса $S = F/F_3$ содержит бесконечно много идемпотентов, но все ее максимальные подполугруппы идемпотентов двухэлементны. В S есть бесконечная подполугруппа с нулевым умножением — частный случай полугруппы типа 2). Руководствуясь той же идеей, легко построить пример аналогичной полугруппы, содержащей бесконечные подполугруппы лишь типа 3).

Предложения 1 и 2 исчерпывают ситуации, возможные в теореме, которая, следовательно, полностью доказана.

§ 3. Некоторые следствия

3.1. Известные результаты о полугруппах с условиями конечности. Обратимся к результату статьи [5], для которого основные результаты работ [2] — [4] являются частными случаями, и рассмотрим следующую ситуацию. Пусть θ — абстрактное теоретико-полугрупповое свойство, удовлетворяющее условиям:

I. θ наследственно для подполугрупп,

II. θ наследственно для гомоморфных образов,

III. θ-полугруппа не может иметь бесконечного нередуцируемого базиса.

Напомним, что *базисом* мы называем неприводимое порождающее множество. Определение нередуцируемого базиса здесь напоминать не будем: нам важно лишь иметь в виду, что единственный базис нередуцируем. Элемент полугруппы мы называем *негрупповым*, если он не содержится ни в какой подгруппе.

В [5] показано, что для любого указанного свойства θ во всякой периодической θ-полугруппе число идемпотентов и число негрупповых элементов конечны. Этот факт непосредственно вытекает из результатов настоящей работы, причем, как теперь видно, для доказательства конечности числа идемпотентов требование на свойство θ удовлетворять условию II оказывается даже излишним, а для доказательства конечности числа негрупповых элементов условие II может быть заменено следующим более слабым:

II′. θ наследственно для факторполугрупп Риса.

В обоих случаях условие III может быть заменено таким более слабым:

III′. θ-полугруппа не может иметь единственного бесконечного базиса.

В самом деле, каждая из полугрупп типов 2) — 6), очевидно, обладает единственным базисом, поэтому из предложения 2 вытекает

Следствие 1. *Если свойство θ удовлетворяет условиям* I *и* III′, *то всякая периодическая θ-полугруппа содержит лишь конечное число идемпотентов.*

Рассматривая же факторполугруппу Риса $\langle K_e\rangle/G_e$ для произвольного класса кручения K_e и применяя леммы 2 и 1, получаем с учетом следствия 1

Следствие 2. *Если свойство θ удовлетворяет условиям* I, II′ *и* III′, *то всякая периодическая θ-полугруппа содержит лишь конечное число негрупповых элементов.*

Различные примеры конкретных таких свойств θ приведены в [5].

3.2. О слойно конечных полугруппах. Распространяя на полугруппы соответствующее теоретико-групповое понятие, введенное С. Н. Черниковым, назовем полугруппу *слойно конечной*, если она содержит лишь конечное число элементов любого данного порядка. Слойно конечные группы изучены почти исчерпывающим образом (информацию по этому поводу см. в [1], §§ 53 и Д. 17). Схема, указанная в разделе 3.1, для исследования слойно конечных полугрупп неприемлема: свойство слойной конечности не удовлетворяет ни условию II′, ни условию III′ (впрочем, априори это не очевидно, но может быть подтверждено приведенным ниже примером). Ясно, разумеется, что всякая слойно конечная полугруппа периодична и содержит лишь конечное число идемпотентов. Но число негрупповых элементов может быть бесконечным (приводимый ниже пример подтверждает и это). Пользуясь леммой 3, мы дадим описание слойно конечных полугрупп „по модулю групп". Для него понадобится одно определение. Скажем, что элементы x и y данной периодической полугруппы *равноядерны*, если ядра циклических подполугрупп $\langle x\rangle$ и $\langle y\rangle$ совпадают. Понятно, что разбиение на классы равноядерных элементов является, вообще говоря, более дробным, чем разбиение на классы кручения.

Следствие 3. *Полугруппа S слойно конечна тогда и только тогда, когда она периодическая с конечным числом идемпотентов, все группы G_e слойно конечны и каждый класс равноядерных элементов из S конечен.*

Докажем это утверждение. Достаточность вытекает из того, что множество элементов одинакового порядка из одного класса кручения K_e со слойно конечной группой G_e разбивается, очевидно, на конечное число классов равноядерных элементов. В необходимости в силу отмеченного выше нужно лишь установить, что произвольный класс M равноядерных элементов из S конечен. Пусть G — ядро всех подполугрупп $\langle x\rangle$ при $x \in M$, e — единица G. Рассмотрим подполугруппу $\langle M\rangle$. Ясно, что для ее класса кручения K_e имеем $M \subseteq K_e$, группа G есть ядро $\langle M\rangle = \langle K_e\rangle$ и, следовательно, $G = G_e$. Таким образом, если M бесконечно, то полугруппа $\langle M\rangle$ удовлетворяет условиям леммы 3. Но все элементы базиса в полугруппе типа $[h, d, =]$ или $[h, d, \omega]$ имеют один и тот же порядок и мы получаем противоречие со слойной конечностью S.

Из следствия 3 вытекает, в частности, что, *если класс кручения K_e слойно конечной полугруппы бесконечен, то группа G_e бесконечна*. Отсюда, *если все подгруппы слойно конечной полугруппы S конечны, то и S конечна*.

Приведем, наконец, обещанный

Пример 3. Пусть полугруппа $S = \langle a_1, a_2, \ldots\rangle$ задана следующими определяющими соотношениями: $a_i^2 = a_i^{p_i+2}$, $i = 1, 2, \ldots$; $p_1, p_2, \ldots$ — различные простые числа; $a_i^{p_i} = a_j^{p_j}$ при любых i, j; $a_i a_j = a_j a_i = e a_i a_j$ при любых i, j, где e — элемент, указанный в предыдущем соотношении.

Легко понять, что S — периодическая полугруппа с единственным идемпотентом e; ее ядро совпадает с S^2 и является прямым произведением бесконечного множества циклических групп различных простых порядков. Группа S^2 слойно конечна, каждый элемент a_i имеет порядок $p_i + 1$, так что S слойно конечна. Но множество $S \setminus S^2 = \{a_1, a_2, \ldots\}$ всех негрупповых элементов S, являющееся единственным базисом S, бесконечно, а факторполугруппа Риса S/S^2 не является слойно конечной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. Теория групп. М., „Наука“, 1967.
2. Шеврин Л. Н. Некоторые условия конечности в теории полугрупп. ИАН СССР. Сер. матем., т. 29, № 3, 1965, с. 553—566.
3. Шеврин Л. Н. Полугруппы конечной ширины. В сб. „Теория полугрупп и ее прилож.“, вып. 1. Изд. Саратовск. ун-та, 1965, с. 325—351.
4. Шеврин Л. Н. Дополнение к работе „Полугруппы конечной ширины“. В сб. „Теория полугрупп и ее прилож.“, вып. 2. Изд. Саратовск. ун-та, 1971, с. 94—96.
5. Шеврин Л. Н. Одна общая теорема о полугруппах с некоторыми условиями конечности. Матем. заметки, т. 15, № 6, 1974, с. 927—937.
6. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М., „Мир“, 1972.
7. Шеврин Л. Н. К общей теории полугрупп. Матем. сб., т. 53 (95) : 3, 1961, с. 367—386.
8. Шеврин Л. Н., Просвиров А. С. Полугруппы с изотонной идеализаторной функцией. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 29, 1973, с. 235—246.
9. Шеврин Л. Н. Нильполугруппы с некоторыми условиями конечности. Матем. сб., т. 55 (97) : 4, 1961, с. 473—480.

г. Свердловск

Поступила
25 II 1974