И. Л. Гуревич, О разрешимости задачи обтекания газового пузыря плоским потоком жидкости,
Изв. вузов. Матем., 1986, номер 7, 19–24

Так как $5(2m-1)^{1/6} < 2m-1$ при $m \geqslant 4$, то вновь $F(d)/|Q_d| \to 1$ при $d \to \infty$. Сравнивая результаты пп. 2 и 3, заключаем, что $|T_d|/|Q_d| \to 1$ при $d \to \infty$.

В заключение поставим следующую задачу. Рассмотрим класс групп с m порождающими и n соотношениями. Подкласс этого класса групп будем называть плотным, если отношение количества копредставлений вида $\langle a_1, \ldots, a_m | R_1, \ldots, R_n \rangle$ (где R_i имеет длину d_i), задающих группы из этого подкласса, к количеству всех таких копредставлений стремится к 1 при $d_1 + \ldots + d_n \to \infty$. Требуется исследовать, при каких m, n, k класс групп со свободными k-порожденными подгруппами является плотным подклассом в классе групп, заданных m порождающими и n соотношениями.

В данной работе доказано, что при $k=2$, $m \geqslant 4$, $n=1$ указанный подкласс является плотным. С помощью приведенного в работе способа нетрудно показать это же при $k=2$, $m \geqslant 3$ и любом n.

А. Ю. Ольшанский высказал гипотезу, что подкласс будет плотным в случае $k < m$.

Автор благодарит А. Ю. Ольшанского за ценные обсуждения и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М., 1980. 447 с.

г. Вологда

Поступила
07. 03. 1984

И. Л. Гуревич

УДК 517.958:532.5

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ ПЛОСКИМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Рассматривается плоское обтекание несжимаемой идеальной жидкостью газового пузыря с постоянным внутренним давлением. Задается величина $\varkappa$ — произведение кривизны оболочки пузыря в критической точке на четверть длины оболочки (течение считается имеющим две оси симметрии). Доказывается разрешимость задачи при условии $-\pi/2 < \varkappa \leqslant \pi/2$.

1. Пусть в плоскости $z = x + iy$ расположен газовый пузырь (абсолютно гибкая оболочка), т. е. замкнутая кривая Γ длины $4L$, симметричная относительно осей x и y. Оболочка обтекается потоком, у которого вектор скорости на бесконечности имеет координаты $(v_0, 0)$. Обозначим через B и B' соответственно точки разветвления и схода потока на Γ, а через C — одну из точек пересечения Γ с осью y $(y(B) = y(B') = 0,\ y(C) > 0)$. Пусть $\theta(l)$ — угол между осью x и касательной к оболочке, взятый как функция длины дуги l на BC $(0 \leqslant l \leqslant L)$. Из уравнения Лапласа

$$d\theta/dl = (p_0 - p_1)/T - \rho v^2/(2T), \tag{1}$$

где v — скорость, p_0 и p_1 — соответственно давление в критической точке и внутри полости, ρ — плотность, T — сила натяжения. Будем задавать параметр $\varkappa = L(p_1 - p_0)/T$; из (1) видно, что $-\varkappa$ совпадает со значением „приведенной кривизны“ $d\theta/ds$ в точке B, где $s = l/L$ — безразмерная дуговая координата, $s(B) = 0$, $s(C) = 1$.

В опубликованных по этой задаче работах [1] — [4] задавались значения других параметров; можно, однако, показать, что полученные в них результаты эквивалентны следующим. В [1], [2] получено численное решение при $\varkappa \in [0, \pi/2]$. В [1], [3] даны строгие доказательства разрешимости при $\varkappa \in [\pi/2 - \varepsilon_1, \pi/2]$, где ε_1 — достаточно малое положительное число. В [4] построено точное решение при $\varkappa = 0$. Кроме того, О. М. Киселёвым получены численное решение при $\varkappa \in (-\pi/2, 0)$ и точное решение при $\varkappa = -\pi/2$, а также приближенное аналитическое решение при достаточно малом $|\varkappa|$. Заметим, что при $\varkappa = \pi/2$ получаем задачу обтекания окружности, а при $\varkappa = -\pi/2$ дуга BC также является четвертью окружности, но обращенной вогнутостью в сторону набегающего потока (таким образом, при $\varkappa = -\pi/2$ область течения двулистна).

Ниже доказывается теорема существования для всего интервала $\varkappa \in (-\pi/2, \pi/2]$.

Отобразим область течения на единичный круг в плоскости переменной $\zeta = re^{i\sigma} = \xi + i\eta$ с нормировкой $\zeta(A) = 0$, $\zeta(B) = 1$, $\zeta(C) = i$. Для комплексного потенциала имеем: $w = -\varphi_0(\zeta + 1/\zeta)/2$, где $\varphi_0 = w(C) - w(B)$. Введем функцию $\Omega(\zeta) = \ln(v_0^{-1} dw/dz)$ $(\Omega(0) = 0,\ \Omega(e^{i\sigma}) = \tau(\sigma) - i\theta(\sigma))$ и представим ее в виде $\Omega = \omega(\zeta) + \ln(1 - \zeta^2)$, где $\omega(\zeta)$ непрерывна в замкнутом круге, $\omega(0) = 0$, $\omega(e^{i\sigma}) = \lambda - i\mu$. Имеем $\tau = \ln|2\sin\sigma| + \lambda(\sigma)$, $\theta = \pi/2 - \sigma + \mu(\sigma)$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$. Очевидно, действительные части $\Omega(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ симметричны, а мнимые — антисимметричны относительно осей $\xi = 0$ и $\eta = 0$, $\mu(0) = \mu(\pi/2) = \theta(\pi/2) = 0$, $\theta(+0) = \pi/2$. В дальнейшем мы будем рассматривать τ, θ, λ, μ в основном лишь при $\sigma \in [0, \pi/2]$.

Используя (1) и введенные выше функции, а также обозначения $\alpha = \rho v_0 \varphi_0/(2T)$, $M = Lv_0/\varphi_0$, получим следующие соотношения при $\sigma \in [0, \pi/2]$:

$$ds/d\sigma = M^{-1} \sin\sigma e^{-\tau} = (1/2) M^{-1} e^{-\lambda}, \tag{2}$$

$$d\theta/ds = -\varkappa - \alpha M e^{2\tau}, \tag{3}$$

$$d\theta/d\sigma = -\varkappa M^{-1} \sin\sigma e^{-\tau} - \alpha \sin\sigma e^{\tau}, \tag{4}$$

$$d\mu/d\sigma = 1 - (1/2)\varkappa M^{-1} e^{-\lambda} - 2\alpha \sin^2\sigma e^{\lambda}, \tag{5}$$

$$M = \int_0^{\pi/2} \sin\sigma e^{-\tau} d\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda} d\sigma. \tag{6}$$

Из условия $\mu(0) = \mu(\pi/2)$ вытекает также

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varkappa\right) \Big/ \int_0^{\pi/2} \sin^2\sigma e^{\lambda} d\sigma. \tag{7}$$

Уравнения (5) — (7) представляют собой условия для нахождения функции $\omega(\zeta)$.

Дифференцируя (5), вводя обозначение $u = d\lambda/d\sigma$ и учитывая, что $d\mu/d\sigma$ и $d\lambda/d\sigma$ — граничные значения непрерывных в замкнутом круге сопряженных гармонических функций, а $\omega(0) = 0$, можно записать

$$u(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\left|\frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg}\sigma}{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg}\sigma}\right| \left[u(t)\left(\frac{\varkappa}{2M} e^{-\lambda(t)} - 2\alpha \sin^2 t e^{\lambda(t)}\right) - 2\alpha \sin 2t e^{\lambda(t)}\right] dt, \tag{8}$$

$$\lambda(\sigma) = \int_0^{\sigma} u(t)\, dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\sigma \int_0^{\sigma} u(t)\, dt. \tag{9}$$

Пусть C — пространство непрерывных функций на $[0, \pi/2]$. Имея в виду применение принципа Лере — Шаудера, введем параметры $k \in [0, 1]$ и $t \in [0, 2]$ и преобразования A_k, B_t следующим образом.

Пусть $\varkappa \in (0, \pi/2]$. Берем $u_1(\sigma) \in C$ и находим λ из (9), затем заменяем $\varkappa$ на $\varkappa_k = k\varkappa + (1 - k)\pi/2$ и находим α $(\alpha \geqslant 0)$ из (7) и $u_2(\sigma)$ из (8). Таким образом, $u_2 = A_k u_1$. При $k = 0$ будет $\varkappa_k = \pi/2$, $\alpha = 0$. Уравнение $u = A_0 u$ имеет единственное решение $u_0 = 0$ (это вытекает из единственности конформного отображения внешности круга на круг $|\zeta| < 1$). Докажем, что преобразование $u - A_0 u$ локально взаимно однозначно в окрестности u_0. В противном случае существовала бы аналитическая функция $\delta\omega(\zeta) \neq \text{const}$ $(\delta\omega(e^{i\sigma}) = \delta\lambda - i\delta\mu)$ такая, что $d\delta\mu/d\sigma = (\pi/2)\delta\lambda$. Применение принципа максимума приводит к противоречию.

Пусть $\varkappa \in (-\pi/2, 0]$. При $t \in [1, 2]$ заменим $\varkappa$ на $\varkappa_t = (t - 1)\varkappa$; при $t \in [0, 1)$ заменим $\varkappa$ на $\varkappa_1 = 0$, слагаемое 1 в (5) — на t, а числитель в (7) — на $t\pi/4$. Кроме того, при всех t заменим правую часть $G(\sigma)$ в (8) на $|G|$. Полученные соотношения определяют на C преобразование B_t, причем $B_0 u = 0$ при любом u.

Операторы A_k и B_t вполне непрерывны по u и равномерно непрерывны соответственно по k и t на любом шаре из C. Каждая неподвижная точка оператора A_k или B_t определяет решение системы (6) — (9) (видоизмененной вышеуказанным образом), которое при $k=1$ или $t=2$ соответствует решению исходной задачи. Кроме того, при $\varkappa \leqslant 0$ имеем $u \geqslant 0$.

Используя установленные свойства операторов, легко видеть, что для доказательства теоремы существования достаточно получить априорную оценку $|u| \leqslant H(\varkappa)$. Мы выведем эту оценку лишь для $k=1$ и $t=2$. Она остается справедливой при всех k и при $t \in [1, 2]$; при $t \in [0, 1)$ ее вывод требует незначительных изменений.

2. Сначала с помощью неравенства Иенсена ([5], с. 204) получим

$$M \geqslant \frac{1}{2} \exp\left(-\int_0^{\pi/2} \lambda d\sigma\right) = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Далее в этом пункте будем рассматривать лишь случай $\varkappa \in (0, \pi/2]$. Так как в силу (5) $d\mu/d\sigma \leqslant 1$, $\mu(0) = \mu(\pi/2) = 0$, то $|\mu| < \pi/2$. Нам, однако, потребуется равномерная оценка $|\mu| \leqslant \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$. Из неравенства $d\mu/d\sigma \leqslant 1$, представления

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\mu}{d\sigma}(t) \ln|\cos t - \cos\sigma|\, dt \tag{11}$$

и (7) вытекают последовательно оценки

$$\lambda > -N_1, \quad \alpha < N_2 \tag{12}$$

(здесь и ниже $N_i > 0$ — известные постоянные). Оценим α снизу. Так как $\theta(0) = \pi/2$, $\theta(\pi/2) = 0$, а $d\theta/d\sigma \leqslant 0$ в силу (4) (т. е. оболочка выпукла), то $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ и $\cos\theta \geqslant 0$. Поэтому, умножая (4) на $\cos\theta$ и интегрируя от 0 до $\pi/2$, получим с учетом (2)

$$\alpha = \left(1 - \varkappa M^{-1} \int_0^{\pi/2} \sin\sigma \cos\theta e^{-\tau} d\sigma\right) \Big/ \int_0^{\pi/2} \sin\sigma\cos\theta e^{\tau} d\sigma \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 - \varkappa \int_0^1 \cos\theta ds\right) \Big/ \int_0^{\pi/2} \cos\theta e^{\tau} d\sigma = 1 - \varkappa \int_0^1 \cos\theta ds \tag{13}$$

(последнее равенство вытекает из теоремы о среднем значении и условия $\Omega(0) = 0$). Из условий $\theta(\pi/2) = 0$, $s(\pi/2) = 1$ и неравенства $d\theta/ds \leqslant -\varkappa$ вытекает $\theta \geqslant \varkappa(1-s)$, и в силу (13)

$$\alpha \geqslant 1 - \sin\varkappa. \tag{14}$$

Если $0 < \varkappa \leqslant \pi/6$, то $\alpha \geqslant 1/2$, и по (5) $d\mu/d\sigma \leqslant f_1(\sigma) = 1 - \sin^2\sigma e^{-N_1}$. Так как $\mu(0) = \mu(\pi/2) = 0$, $f_1 > 0$, то

$$|\mu| < \int_0^{\pi/2} f_1 d\sigma = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2} e^{-N_1}\right). \tag{15}$$

Если $\pi/6 < \varkappa \leqslant \pi/2$, то из (5) $d\mu/d\sigma \leqslant f_2(\sigma) = 1 - (\pi/12) M^{-1} e^{-\lambda}$,

$$\mu(\sigma) \leqslant \int_0^{\sigma} f_2 d\sigma = F_2(\sigma).$$

Принимая во внимание условия $F_2(\sigma) \leqslant \sigma$, $F_2(\pi/2) = \pi/3$, $f_1 > b = 1 - e^{N_1}/6$ (последнее вытекает из (10), (12)), заключаем, что $F_2 < \gamma_0$, где γ_0 — ордината точки пересечения прямых $\gamma = \sigma$, $\gamma = \pi/3 + b(\sigma - \pi/2)$, т. е. $\gamma_0 = \pi/2 - e^{-N_1}$. Аналогично доказывается неравенство $\mu > -\gamma_0$. Из этих оценок и (15) получаем

$|\mu| < \pi/2 - \delta$ при $\varkappa \in (0, \pi/2]$. Используя эту оценку, а также (10), (12), с помощью теоремы Зигмунда ([6], с. 110) и неравенства Гёльдера оценим константу Гёльдера функции $\mu(\sigma)$, а затем и $\lambda(\sigma)$. После этого с помощью (5) оценим константу Гёльдера функции $d\mu/d\sigma$, а затем и $u = d\lambda/d\sigma$. Таким образом, при $\varkappa \in [0, \pi/2]$ оценка $|u| < H_1$ получена (здесь H_1 не зависит от $\varkappa$).

3. В этом пункте рассмотрим случай $\varkappa \in [-\pi/2 + \varepsilon, 0]$, $\varepsilon > 0$. Так как $u \geqslant 0$, а $d^2\mu/d\sigma^2$ совпадает с подынтегральной функцией в (8), то $d^2\theta/d\sigma^2 = d^2\mu/d\sigma^2 \leqslant 0$. Из (3) видно, что кривизна оболочки $d\theta/ds$ убывает вдоль BC; она положительна в точке B и отрицательна в точке C; всюду на BC $d\theta/ds \leqslant -\varkappa$, $0 \leqslant \theta \leqslant \leqslant \pi - \varepsilon$.

Возьмем в плоскости $z' = z/L$ полуокружность радиуса $2/\pi$ с центром в точке $(-2/\pi, 0)$, проходящую через точку B и симметричную относительно оси x'. Дополним ее до замкнутого контура P отрезками $(x' = -2/\pi,\ 2/\pi \leqslant \leqslant |y'| \leqslant 1)$, $(x' = 2,\ |y'| = 1)$, $(-2/\pi \leqslant x' \leqslant 1,\ |y'| = 1)$. Область D (внешность P) целиком лежит внутри области, полученной из области течения гомотетией с коэффициентом $1/L$ и с центром в точке B. С помощью принципа Линделёфа получим $|dz'/d\zeta|_B < |dF/d\zeta|_B$, где $F(\zeta)$ — отображение круга $|\zeta| < 1$ на D, $F(0) = \infty$. Отсюда и из (2)

$$2e^{\lambda} = (M ds/d\sigma)^{-1} \geqslant (M ds/d\sigma)_B^{-1} > (MN_3)^{-1}. \tag{16}$$

Оценим M сверху. Введем представление $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1$, $\Omega_j(e^{i\sigma}) = \tau_j(\sigma) - i\theta_j(\sigma)$ $(j = 0, 1)$, где действительные части симметричны, а мнимые — антисимметричны относительно осей $\xi = 0$ и $\eta = 0$, а при $\sigma \in (0, \pi/2)$ $\theta_0 = (\pi - \varepsilon)/2$, $\tau_0 = (1 - \varepsilon/\pi) \ln \operatorname{tg} \sigma$. Тогда $|\theta_1| < (\pi - \varepsilon)/2$, и по теореме Зигмунда

$$M = \int_0^{\pi/2} (\sin\sigma)^{\varepsilon/\pi} (\cos\sigma)^{1-\varepsilon/\pi} e^{-\tau_1} d\sigma < \int_0^{\pi/2} e^{-\tau_1} d\sigma < N_4.$$

Отсюда, из (16), (7), (5), (10) получаем последовательно

$$\lambda > -N_5,\quad \alpha < N_6,\quad d\mu/d\sigma < N_7. \tag{17}$$

Займемся оценкой α снизу. Так как $\cos\theta$ может менять знак, то в отличие от (13) можно записать лишь

$$\alpha = \left(1 - \varkappa \int_0^1 \cos\theta\, ds\right) \Big/ \int_0^{\pi/2} \sin\sigma \cos\theta e^{\tau} d\sigma. \tag{18}$$

Из условий $\theta(0) = 0$, $s(0) = 0$ и неравенства $d\theta/ds \leqslant -\varkappa$ вытекает $\theta \leqslant \pi/2 - \varkappa s$, и числитель в (18) не меньше, чем $\sin\varepsilon$. Оценим знаменатель сверху.

Лемма. *Пусть $w(\zeta) = u + iv$, $c(\zeta) = a + ib$ — аналитические в круге функции, причем u, a симметричны, а v, b антисимметричны относительно осей $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Пусть $u'(\sigma)$, $v'(\sigma)$, $a'(\sigma)$, $b'(\sigma)$ — граничные значения соответственно $u(\zeta)$, $v(\zeta)$, $a(\zeta)$, $b(\zeta)$. Тогда*

$$\int_0^{\pi/2} a'u' d\sigma = \int_0^{\pi/2} b'v' d\sigma + \frac{\pi}{2} a(0) u(0). \tag{19}$$

Доказательство леммы элементарно и основано на применении теоремы о среднем значении к гармонической функции $au - bv$.

Пусть $a' = |\sin\sigma|$, $u' = \cos\theta e^{\tau}$, $v' = -\sin\theta e^{\tau}$. Так как функция $a'(\sigma)$ аналитична в окрестности $\sigma = \pi/2$, то $b'(\sigma)$ также аналитична здесь, и поскольку $b'(\pi/2) = 0$, то $|b'| \leqslant N_8 |\cos\sigma|$. Далее, легко проверить, что $u(0) = 1$, $a(0) = = 2/\pi$. Поэтому из (19) получаем

$$\int_0^{\pi/2} \sin\sigma \cos\theta e^{\tau} d\sigma = 1 - \int_0^{\pi/2} b' \sin\theta e^{\tau} d\sigma \leqslant 1 + N_8 \int_0^{\pi/2} \cos\sigma e^{\tau} d\sigma. \tag{20}$$

Представим Ω, как и выше, в виде $\Omega_0 + \Omega_1$. Тогда по теореме Зигмунда

$$\int_0^{\pi/2} \cos\sigma e^{\tau} d\sigma = \int_0^{\pi/2} (\cos\sigma)^{\varepsilon/\pi} (\sin\sigma)^{1-\varepsilon/\pi} e^{\tau_1} d\sigma < N_4,$$

и в силу (20), (18) $\alpha > N_9$. Теперь из (7) будем иметь

$$M_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\sigma e^{\tau} d\sigma = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2\sigma e^{\lambda} d\sigma = \frac{\pi/2 - \varkappa}{\alpha} < N_{10}. \tag{21}$$

Неравенство (21) используем для оценки снизу величины $\pi/2 - \sigma_0$, где (σ_0, σ_0) — координаты точки P пересечения выпуклой кривой $\gamma = \theta(\sigma)$ с прямой $\gamma = \sigma$ (напомним, что $\theta(0) = \pi/2$, $\theta(\pi/2) = 0$, $\theta(\sigma) < \pi - \varepsilon$).

Пусть $\delta\theta(\sigma) \geqslant 0$ — вариация функции $\theta(\sigma)$. Тогда

$$\delta M_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\sigma e^{\tau}\delta\tau d\sigma. \tag{22}$$

Имея в виду применение леммы, положим $a' = |\sin\sigma| e^{\tau}$, $u' = \delta\tau$, $v' = -\delta\theta$. Так как a' — возрастающая на $[0, \pi/2]$ функция, то по принципу максимума здесь $b' \leqslant 0$. Кроме того, $u(0) = 0$. Поэтому, используя (19), (22), заключаем, что $\delta M_1 \geqslant 0$ и $M_1 \geqslant M_*$, где

$$M_* = \int_0^{\pi/2} \sin\sigma e^{\tau_*} d\sigma,$$

а $\tau_* - i\theta_*$ — граничное значение аналитической функции $\Omega_*(\zeta)$ такой, что $\Omega_*(0) = 0$, $\theta_*(\sigma) = \sigma_0$ $(0 < \sigma < \sigma_0)$, $\theta_*(\sigma) = \sigma_0(\sigma_0 - \pi/2)^{-1}(\sigma - \pi/2)$ $(\sigma_0 < \sigma < \pi/2)$. Таким образом, графиком $\theta_*(\sigma)$ является ломаная с вершинами $(0, \pi/2 - \sigma_0)$, (σ_0, σ_0), $(\pi/2, 0)$. Выражая τ_* через θ_* по формуле Гильберга и переходя в ней к ядру Коши, получим

$$\tau_*(\sigma) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \theta_*(t)\left(\frac{1}{t-\sigma} + \frac{1}{t+\sigma} - \frac{1}{\pi - t - \sigma}\right)dt + g_1(\sigma) = \frac{2\sigma_0}{\pi}\ln\sigma -$$

$$- \ln(\pi - \sigma_0 - \sigma) + g_2(\sigma) \quad (0 < \sigma < \pi/2), \quad |g_{1,2}| < N_{11},$$

$$M_1 \geqslant M_* \geqslant -N_{12} - N_{13}\ln(\pi/2 - \sigma_0). \tag{23}$$

Сравнивая (21) и (23), имеем $\sigma_0 \leqslant \sigma_* < \pi/2$, где σ_* — известное число.

Поскольку $d\mu/d\sigma = d\theta/d\sigma + 1 > d\theta/d\sigma$, то кривая $\gamma = \mu(\sigma)$ пересекается с прямой $\gamma = \sigma$ при $\sigma < \sigma_0 \leqslant \sigma_*$. Представим $\omega(\zeta)$ в виде $\omega_0 + \omega_1$, $\omega_j(e^{i\sigma}) = \lambda_j(\sigma) - i\mu_j(\sigma)$, где $\mu_0 = \mu$, $\mu_1 = 0$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_*)$; $\mu_0 = [\mu_0(\sigma_*)/(\sigma_* - \pi/2)](\sigma - \pi/2)$, $\mu_1 = \mu - \mu_0$ $(\sigma_* < \sigma < \pi/2)$. Очевидно, $|\mu_1| \leqslant \sigma_* < \pi/2$. Кроме того, используя выпуклость кривой $\gamma = \mu(\sigma)$, легко показать, что $d\mu_0/d\sigma \geqslant \sigma_*(\sigma_* - \pi/2)^{-1}$. Отсюда и из представления (11) с $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$ получаем $\lambda_0 \leqslant N_{14}$. Взяв $p \in (1, \pi/(2\sigma_*))$, будем иметь с помощью теоремы Зигмунда

$$\int_0^{\pi/2} e^{p\lambda} d\sigma < N_{15}\int_0^{\pi/2} e^{p\lambda_1} d\sigma < N_{16}.$$

Используя эту оценку, а также (10), (17) и неравенство Гёльдера, получим оценку константы Гёльдера функции $\mu(\sigma)$, приводящую, как и в п. 2, к неравенству $|u| < H_2$, где H_2 уже зависит от ε.

Таким образом, при $\varkappa \in (-\pi/2, \pi/2]$ получена требуемая априорная оценка решений, что завершает доказательство теоремы существования.

4. Доказанную теорему легко распространить на случай $\varkappa > \pi/2$ (при этом, как видно из (7), $\alpha < 0$, т. е. имеем дело с „отрицательной капиллярностью“ или „струйной пленкой“; численное решение этой задачи получено О. М. Киселёвым). Опишем вкратце последовательность получения априорных оценок.

С помощью принципа максимума, как и в [7], докажем, что на дуге BC угол θ не достигает абсолютного экстремума, т. е. здесь $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Отсюда с помощью неравенства Иенсена, как в [4] (с. 204), найдем оценку M снизу, а $|\alpha|$ — из (7) сверху. Далее, в силу (3) $d\theta/ds \geqslant -\varkappa$, поэтому с применением принципа Линделёфа можно оценить $ds/d\sigma$ снизу, а затем λ—сверху. Это позволит оценить сверху $d\mu/d\sigma$ из (5), а затем с учетом (11) оценить λ снизу. Дальнейшие оценки очевидны.

Применяя вышеизложенный метод, удается также доказать разрешимость задачи симметричного обтекания газового пузыря в канале с прямолинейными стенками при условиях $\varkappa \in (-\pi/2, \pi/2]$, $\varphi_0/Q \leqslant (2/\pi)\ln((1+a)/(1-a))$, где $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $2Q$ — расход (в частном случае точное решение этой задачи найдено Н. Е. Жуковским ([8], с. 476)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселёв О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1969, № 4, с. 13—23.
2. Петрова С. И. Форма равновесия полости, ограниченной упругой пленкой, в однородном потоке жидкости.— Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1971, № 1, с. 120—127.
3. Beyer K. Existenzbewies für ein Randwertproblem mit freien Rand.— Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1966, Bd. 23, № 1, S. 15—25.
4. McLeod E. B. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension.— J. Rational Mech. and Anal., 1955, v. 4, № 4, p. 557—567.
5. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., 1964. 466 с.
6. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, 1968. 315 с.
7. Гуревич И. Л. Течение Рябушинского при наличии струйной или капиллярной пленки.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1975.
8. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. 2-е изд. М., 1979. 536 с.

г. Казань

Поступила
12.04.1984

Н. Н. Данилов, Л. А. Петросян

УДК 519.8

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ В КООПЕРАТИВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

1. Формализация и изучение принципов оптимальности является одной из первостепенных задач теории кооперативных игр. Этот вопрос и в настоящее время остается актуальным и привлекает внимание многих специалистов ([1]—[9] и др.). Как указывал Н. Н. Воробьев [1], применение конкретного принципа оптимальности должно быть обосновано его содержательностью, т. е. соответствием фактическому пониманию оптимальности и реализуемостью этого принципа для достаточно широких классов игр. Для принципов оптимальности, применяемых в динамических играх, к этим двум требованиям естественным образом добавляется еще одно: содержательность и реализуемость принципа оптимальности должны сохраняться в протяжении всей игры. Это свойство называется динамической устойчивостью принципа оптимальности. Принцип динамической устойчивости для различных классов игр впервые был предложен нами в работах [6]—[8]. Данная статья посвящена классификации динамически устойчивых решений кооперативных дифференциальных игр и теоремам существования таких решений.

Динамическая устойчивость решения дифференциальной игры в общем виде может быть сформулирована следующим образом: решение дифференциальной игры, построенное согласно тому или иному принципу оптимальности в начальный момент времени (в начальном состоянии), должно удовлетворять тому же принципу оптимальности в каждый момент времени вплоть до момента окончания игры.

Динамическая устойчивость решения дифференциальной игры представляет собой то важное свойство, согласно которому в каждый момент времени игроки ориентируются на один и тот же принцип оптимальности и, следовательно, не имеют оснований для отклонения от ранее принятого поведения до конца игры. В первый же момент нарушения динамической устойчивости выбранный в начале игры способ поведения перестает быть оптимальным и потому оказывается нереализуемым.