С. Ю. Оревков, Неравенства Петровского–Олейник и комбинаторика T-гиперповерхностей Виро,
Алгебра и анализ, 2002, том 14, выпуск 1, 134–157

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 1

В. А. Залгаллеру к 80-летию

НЕРАВЕНСТВА ПЕТРОВСКОГО-ОЛЕЙНИК И КОМБИНАТОРИКА Т-ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ВИРО

© С. Ю. Оревков

Введение

Пусть $X \subset \mathbf{R}\mathrm{P}^{n-1}$ — гладкая вещественная алгебраическая гиперповерхность, заданная уравнением $f(x_1,\dots,x_n)=0$, где f — однородный многочлен степени m с вещественными коэффициентами. Неравенство Петровского-Олейник (в форме, данной Арнольдом [1]) имеет вид

$$|\tilde\chi(S^{n-1}_+)| \leqslant \Pi_n(m), \qquad (*)$$

где $\tilde\chi$ — приведенная (уменьшенная на 1) эйлерова характеристика, $S^{n-1}_+ = \{x\in S^{n-1} \mid f(x)\geqslant 0\}$ (как обычно, S^{n-1} обозначает $(n-1)$-мерную сферу) и $\Pi_n(m)$ — *число Петровского*:

$$\Pi_n(m) = \#\{(k_1,\dots,k_n)\in \mathbf{Z}^n \mid 0<k_i<m;\ k_1+\dots+k_n = mn/2\}.$$

Это число целых внутренних точек на сечении n-мерного куба с ребром m гиперплоскостью, ортогональной главной диагонали и проходящей через центр куба. Петровский показал, что неравенство $(*)$ точно при $n=3$; Виро [14] показал, что $(*)$ точно при $n=4$. Настоящая статья возникла из неудачной попытки доказать, что $(*)$ точно при всех n.

Вещественная алгебраическая гиперповерхность называется *Т-гиперповерхностью Виро*, если ее можно построить методом Виро [15] по триангуляции и многочлену, имеющему ненулевые мономы лишь в вершинах триангуляции (точное определение см. в §2). T-гиперповерхностями Виро были впервые реализованы: контрпримеры к гипотезе Рэгсдэйл [7], примеры M-гиперповерхностей (и M-полных пересечений) любой степени и любой размерности [8], примеры $\exp(Cm^{3/2})$ попарно неизотопных плоских M-кривых степени m (см. [12], в построении применена техника из [6]).

В этой статье мы даем комбинаторную интерпретацию неравенств Петровского–Олейник для Т-гиперповерхностей в терминах триангуляций. А именно, мы переписываем каждую часть неравенства (∗) в виде некоторой суммы по всем симплексам триангуляции (см. 4.3, 6.2) и показываем, что каждое слагаемое в левой части не превосходит соответствующего слагаемого в правой части (см. 7.3). Другими словами, мы раскладываем (∗) в сумму локальных неравенств.

Во-первых, это дает другое доказательство неравенства Петровского–Олейник в случае Т-гиперповерхностей. Во-вторых, для Т-гиперповерхностей это дает необходимое и достаточное условие для знака равенства в (∗): „=“ имеет место в (∗) тогда и только тогда, когда „=“ имеет место во всех локальных неравенствах. Вопрос о „=“ в локальных неравенствах обсуждается в §7–9.

Доказательство локальных неравенств основано на относительном варианте неравенств Мак-Муллена на числа k-мерных граней симплициального многогранника. Относительные неравенства Мак-Муллена сформулированы и доказаны в приложении (совместно с Р. Мак-Ферсоном).

Я благодарен А. Г. Хованскому, О. Я. Виро, И. В. Итенбергу и Е. Шустину за полезные обсуждения.

§1. Определения и обозначения

1.1. Обозначения. На протяжении всей статьи n и m будут обозначать соответственно размерность и степень (см. Введение). Обозначим множество $\{1, 2, \dots, n\}$ через $\bar{n}$. Пусть $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ — симплекс

$$\Delta = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i > 0;\ x_1 + \dots + x_n = m\}.$$

Мы будем обозначать через $[p_1, \dots, p_k]$ выпуклую оболочку точек $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}^n$.

При $x \in \mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{Z}^n$, обозначим $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ через x^a.

Для конечного множества M обозначим число его элементов через $|M|$ или через $\#M$.

Для многочлена $p(t)$ обозначим через $\mathrm{coef}_\alpha(p)$ коэффициент при t^α.

Аффинной оболочкой множества $A \subset \mathbf{R}^n$ называется минимальная аффинная плоскость, содержащая A. Аффинная плоскость $V \subset \mathbf{R}^n$ называется *целочисленной*, если она совпадает с аффинной оболочкой множества $V \cap \mathbf{Z}^n$. Любая k-мерная целочисленная аффинная плоскость снабжена *целочисленным k-мерным объемом*, который нормирован тем условием, что объем фундаментального параллелепипеда решетки $V \cap \mathbf{Z}^n$ равен 1.

1.2. Триангуляции. *k-Симплекс* в $\mathbf{R}^n$ ($k \leqslant n$) — это выпуклая оболочка $k+1$ точек в общем положении. Если τ — грань симплекса σ, будем писать $\tau \leqslant \sigma$. Пустой симплекс $\varnothing$ и сам σ всегда считаются гранями симплекса σ. *Внутренность* $\operatorname{Int}\sigma$ симплекса σ — это внутренность по отношению к аффинной оболочке симплекса σ (если $\dim\sigma = 0$, то $\operatorname{Int}\sigma = \sigma$).

Симплициальный комплекс в $\mathbf{R}^n$ — это множество Σ, состоящее из симплексов, удовлетворяющих стандартным аксиомам:

(1) если $\sigma \in \Sigma$ и $\tau \leqslant \sigma$, то $\tau \in \Sigma$;

(2) если $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$, то $\tau \leqslant \sigma_1$ и $\tau \leqslant \sigma_2$. (В частности, пустой симплекс $\varnothing$ всегда является элементом Σ.)

Для симплициального комплекса Σ обозначим через $[\Sigma]$ его *носитель*: $[\Sigma] = \bigcup_{\sigma\in\Sigma}\sigma$ и обозначим через $\operatorname{Som}\Sigma$ множество вершин. Если $[\Sigma] = X$, то Σ называется *триангуляцией* множества $X \subset \mathbf{R}^n$.

Симплекс (или триангуляция) называется *целочисленным(ой)*, если все его (ее) вершины являются целыми точками.

§2. Т-гиперповерхности Виро

2.1. Регулярные триангуляции. Пусть $\Delta \in \mathbf{R}^n$ обозначает то же, что в п. 1.1. Целочисленная триангуляция Σ симплекса Δ называется *регулярной*, если существует выпуклая функция $\varphi : \Delta \to \mathbf{R}$, линейная на каждом $\sigma \in \Sigma$ и нелинейная на $\sigma_1 \cup \sigma_2$ для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, с $\dim\sigma_1 = \dim\sigma_2 = n-1$. Такая функция φ называется *Σ-выпуклой*. Пример нерегулярной триангуляции см. в [4; с. 119, рис. 3].

2.2. Индуцированная триангуляция октаэдра. Пусть Σ — регулярная триангуляция симплекса Δ (см. 2.1). Обозначим через g_i отражение в координатной гиперплоскости $x_i = 0$, и пусть $G = (\mathbf{Z}/2)^n$ — группа, порожденная отражениями $g_1, \dots, g_n$. Ясно, что $G = \{g_I \mid I \subset \bar{n}\}$, где $g_I = \prod_{i\in I} g_i$. Положим $\hat{\Delta} = G\Delta = \bigcup_{g\in G} g\Delta$ и $\hat{\Sigma} = \{g\sigma \mid \sigma \in \Sigma,\ g \in G\}$.

Тогда $\hat{\Delta}$ есть n-мерный октаэдр, и $\hat{\Sigma}$ — его триангуляция.

Лемма. *$\hat{\Sigma}$ комбинаторно-эквивалентна комплексу граней некоторого выпуклого многогранника.*

Доказательство. Спроектируем $\operatorname{Graph}(\varphi) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ на $\mathbf{R}^n \times 0$ из точки $(0, -y)$ при $y \gg 1$ и отразим результат относительно всех координатных гиперплоскостей. •

2.3 Т-гиперповерхности Виро. Пусть Σ — регулярная триангуляция симплекса Δ (см. 2.1) и s — *распределение знаков* на Σ (т.е. произвольная функция $s : \operatorname{Som}\Sigma \to \{-1, +1\}$). Пусть φ — некоторая Σ-выпуклая функция (см. 2.1).

Тогда *Т-гиперповерхностью Виро, ассоциированной с* (Σ, s), называется гиперповерхность $X_{(\Sigma,s)} \subset \mathbf{RP}^{n-1}$, заданная уравнением $f_\varepsilon(x) = 0$ при достаточно малом ε, где

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{a \in \operatorname{Som}\Sigma} s(a)\varepsilon^{\varphi(a)} x^a.$$

При $0 < \varepsilon \ll 1$ с точностью до объемлющей изотопии $X_{(\Sigma,s)}$ не зависит от выбора φ и ε. Топологический тип пары $X_{(\Sigma,s)}$ может быть явно описан следующим образом.

Пусть g_i и g_I, как в 2.2. Продолжим s на $\operatorname{Som}\hat{\Sigma}$: если $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{Som}\hat{\Sigma}$ и $s(a)$ уже заданы, то положим $s(g_i(a)) = (-1)^{a_i} s(a)$. Тогда при $a \in \operatorname{Som}\Sigma$ имеем $s(g_I(a)) = s(a) \cdot \prod_{i \in I}(-1)^{a_i}$. Обозначим:

$$\hat{\Sigma}_+ = \{\sigma \mid s(v) = +1 \text{ для любой вершины } v \text{ симплекса } \sigma\}.$$

Тогда $\operatorname{Som}\hat{\Sigma}_+ = \{a \in \operatorname{Som}\hat{\Sigma} \mid s(a) = +1\}$.

Пусть $\hat{\Delta}$ и $\hat{\Sigma}$ будут, как в п. 2.2, и пусть $\hat{\Sigma}'$ — барицентрическое подразделение триангуляции $\hat{\Sigma}$. Обозначим:

$$S_+^{n-1} = S^{n-1} \cap \{f_\varepsilon \geqslant 0\}$$

(как в (1)) и $\hat{\Delta}_+ = \bigcup_{a \in \operatorname{Som}\hat{\Sigma}_+} \operatorname{Star}_{\hat{\Sigma}'}(a)$.

Теорема (Виро [15]). *При достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует гомеоморфизм $(S^{n-1}, S_+^{n-1}) \approx (\hat{\Delta}, \hat{\Delta}_+)$.*

§3. Комбинаторные многочлены

3.1. Относительный H-многочлен выпуклого многогранника. Пусть $P \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклый симплициальный многогранник с $\dim P = n$. Пусть f_k — число его граней размерности k. Зададим *H-многочлен*[1] многогранника P как

$$H_P(t) = \sum_{i=0}^{n} h_i t^i = (t-1)^n + \sum_{k=1}^{n} f_{k-1} \cdot (t-1)^{n-k} = \sum_{\tau < P} (t-1)^{n-d(\tau)},$$

где $d(\tau) = 1 + \dim \tau$. (Напомним, что $\tau < P$ означает, что τ есть грань P; по соглашению, $\varnothing < P$ и $d(\varnothing) = 0$).

Если $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, $k \leqslant n$, — набор гиперплоскостей в общем положении, согласованный с P, то назовем $H_{P,\alpha}^{\mathrm{rel}}$ *относительным H-многочленом многогранника P по отношению к α* (см. Приложение).

[1] В приложении H-многочлен многогранника называется *многочленом Пуанкаре*. Однако в основном тексте статьи мы используем термин H-многочлен, так как, следуя Арнольду [1], мы вводим в §5 многочлен Пуанкаре грани.

Примеры. (a) Если P — симплекс, то $H_P(t) = 1 + t + \dots + t^n$.

(b) Если P — октаэдр, то $H_P(t) = (1+t)^n$.

(c) Если S — k-кратная надстройка над P, то $H_S(t) = (t+1)^k H_P(t)$.

3.2. Комбинаторный многочлен грани триангуляции симплекса Δ. Пусть Δ обозначает то же, что в (1.1), и Σ — регулярная триангуляция симплекса Δ (см. 2.1). Пусть τ — любой симплекс из Σ (возможно, $\tau = \varnothing$). Следуя [1], определим *комбинаторный многочлен* грани τ как

$$R_\tau(t) = \sum_{\sigma \geqslant \tau} (-1)^{n-k(\sigma)}(t-1)^{k(\sigma)-d(\sigma)},$$

где $d(\sigma) = 1 + \dim\sigma$ — размерность конуса над σ, а $k(\sigma)$ — размерность минимальной координатной гиперплоскости, содержащей σ.

3.3. Срез грани. Пусть τ — грань выпуклого симплициального многогранника $P \subset \mathbf{R}^n$ такая, что $0 \in \operatorname{Int} P$. Пусть L — линейный функционал, задающий опорную гиперплоскость грани τ, т.е. $L|_P \leqslant 1$, причем $L(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \tau$. Пусть β_τ — пересечение гиперплоскости $\{L = 1 - \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, с плоскостью размерности $n - \dim\tau$, трансверсальной к τ и пересекающей $\operatorname{Int}\tau$. Определим *срез* грани τ как $\tau^* = P \cap \beta_\tau$. Следующая лемма A — стандартный факт о выпуклых многогранниках; лемма B доказывается аналогично.

Лемма A. *Отображение $\sigma \mapsto \sigma \cap \beta_\tau$ задает монотонную (т.е. сохраняющую порядок „$\leqslant$“) биекцию множества $\{\sigma \mid \tau \leqslant \sigma < P\}$ на множество граней многогранника τ^*.*

Пусть $\alpha = \{\alpha_i\}$ — набор гиперплоскостей, согласованный с P (см. Приложение). Положим $\alpha_\tau = \{\alpha_i \cap \beta_\tau \mid \tau \subset \alpha_i \in \alpha\}$.

Лемма B. *α_τ согласован с τ^*.*

3.4. Обозначения. Пусть $\hat\Delta$ и $\hat\Sigma$ обозначают то же, что и в п. 2.2. Пусть $\operatorname{expr}(\sigma)$ — некоторое выражение, а $\operatorname{cond}(\sigma)$ — некоторое условие на σ. Обозначим через

$$\hat{\sum_{\operatorname{cond}(\sigma)}} \operatorname{expr}(\sigma) \quad \text{и} \quad \sum_{\operatorname{cond}(\sigma)} \operatorname{expr}(\sigma),$$

соответственно сумму выражения $\operatorname{expr}(\sigma)$ по всем симплексам $\sigma \in \hat\Sigma$ (соответственно $\sigma \in \Sigma$, включая в обоих случаях пустой симплекс!), удовлетворяющим условию $\operatorname{cond}(\sigma)$.

Пусть $k(\sigma)$ обозначает то же, что и в п.3.2. Следующая лемма очевидна.

Лемма. *Если* $\tau \in \Sigma$, *то*

$$\sum^{\wedge}_{\sigma \geqslant \tau;\, \mathrm{cond}(\sigma)} \mathrm{expr}(\sigma) = \sum_{\sigma \geqslant \tau;\, \mathrm{cond}(\sigma)} 2^{k(\sigma)-k(\tau)} \mathrm{expr}(\sigma).$$

3.5. Сравнение многочленов H^{rel} **и** R_τ**.** Пусть Δ обозначает то же, что и в (1.1), и Σ — некоторая регулярная триангуляция симплекса Δ. Пусть $\hat{\Delta}$ и $\hat{\Sigma}$ обозначают то же, что и в 2.2. Пусть $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1,\dots,n}$ — набор координатных гиперплоскостей $\alpha_i = \{x_i = 0\}$. Пусть τ — одна из граней $\hat{\Delta}$. Определим τ^* и α_τ, как в 3.3, предполагая, что P — выпуклая реализация $\hat{\Delta}$ (см. лемму 2.2).

Предложение. *Если* $\tau \in \Sigma$, *то* $H^{\mathrm{rel}}_{\tau^*,\alpha_\tau}(t) = 2^{n-k(\tau)} R_\tau(t)$.

Доказательство. Для $I \subset \bar{n}$ положим $\alpha_I = \bigcap_{i \in I} \alpha_i$ и $k(\alpha_I) = \dim \alpha_I = n - |I|$. Тогда

$$\begin{aligned}
H^{\mathrm{rel}}_{\tau^*,\alpha_\tau}(t) &= \sum_{\alpha_I \geqslant \tau} (-1)^{|I|}(t+1)^{|I|} H_{\tau^* \cap \alpha_I}(t) \\
&= \sum_{\alpha_I \geqslant \tau} (-1)^{|I|}(t+1)^{|I|} \sum^{\wedge}_{\tau \leqslant \sigma \leqslant \alpha_I} (t-1)^{k(\alpha_I)-d(\sigma)} && \text{(по лемме 3.3.A)} \\
&= \sum_{\alpha_I \geqslant \tau} (-1)^{|I|}(t+1)^{|I|} \sum_{\tau \leqslant \sigma \leqslant \alpha_I} 2^{k(\sigma)-k(\tau)}(t-1)^{k(\alpha_I)-d(\sigma)} && \text{(по лемме 3.4)} \\
&= \sum_{\sigma \geqslant \tau} (-1)^{n-k(\sigma)}(t-1)^{k(\sigma)-d(\sigma)} 2^{k(\sigma)-k(\tau)} \sum_{\alpha_I \geqslant \sigma} (t+1)^{n-k(\alpha_I)}(1-t)^{k(\alpha_I)-k(\sigma)} \\
&= \sum_{\sigma \geqslant \tau} (-1)^{n-k(\sigma)}(t-1)^{k(\sigma)-d(\sigma)} 2^{k(\sigma)-k(\tau)} \cdot 2^{n-k(\sigma)} \\
&= 2^{n-k(\tau)} R_\tau(t). \quad \bullet
\end{aligned}$$

Вместе с теоремой 1 Приложения и леммами 2.2 и 3.3.B это дает

Следствие 3.6. R_τ *симметричен и унимодален.*

§4. Левая часть неравенства Петровского–Олейник для Т-гиперповерхностей

4.1. Обозначения. Пусть $\tau \subset \mathbf{R}^n$ — целочисленный симплекс, вершины которого $v_1, \dots, v_d$ линейно-независимы. Положим

$$e(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{если } v_1 + \dots + v_d \in 2\mathbf{Z}^n \text{ или } \tau = \varnothing, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $e(\tau) = 1$, мы скажем, что τ *четен*, иначе τ *нечетен*.

Пусть G, $\hat{\Delta}$, $\hat{\Sigma}$ обозначают то же, что в 2.2, и пусть $\tau \in \hat{\Sigma}$. Тогда положим $s(\tau) = \prod_{i=1}^{d} s(v_i)$, где $v_1, \dots, v_d$ — вершины симплекса τ.

Лемма. *При $\tau \in \Sigma$ имеем*

$$\sum_{\tau' \in G\tau} s(\tau') = 2^{k(\tau)} s(\tau) e(\tau).$$

Доказательство. Ясно, что $|G\tau| = 2^{k(\tau)}$. Пусть $v_1, \dots, v_d$ — вершины симплекса τ и пусть $v = (x_1, \dots, x_n) = v_1 + \dots + v_n$. Тогда $s(g_I \tau) = (-1)^{x_I} s(\tau)$, где $x_I = \sum_{i \in I} x_i$. Значит, если $e(\tau) = 1$, то все x_I четны, и

$$\sum_{\tau' \in G\tau} s(\tau') = |G\tau| s(\tau) = 2^{k(\tau)} s(\tau).$$

Если же $e(\tau) = 0$, то x_j нечетно при некотором j. Положим $G_j = \{g_I \mid j \notin I \subset \bar{n}\}$. Тогда

$$\sum_{\tau' \in G\tau} s(\tau) = \sum_{\tau' \in G_j \tau} (s(\tau') + s(g_j \tau')) = 0. \quad \bullet$$

Следствие (см. 3.4). *Для любого выражения* $\mathrm{expr}(\tau)$ *имеем*

$$\hat{\sum_{\tau}} s(\tau)\, \mathrm{expr}(\tau) = \sum_{\tau} s(\tau) e(\tau) 2^{k(\tau)}\, \mathrm{expr}(\tau).$$

Лемма 4.2. *В обозначениях из п. 2.3 множество $[\hat{\Sigma}_+]$ — деформационный ретракт пространства $\hat{\Delta}_+$ (см. рис. 1).*

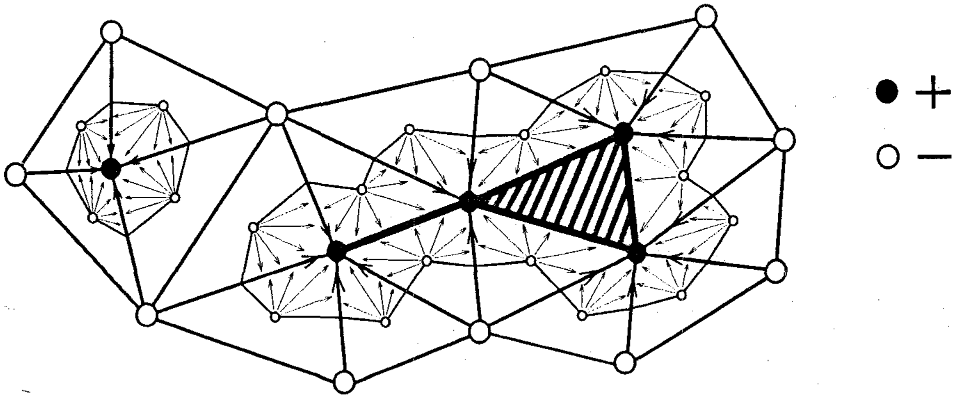

Рис. 1.

Доказательство. Рассмотрим последовательность множеств

$$[\hat{\Sigma}_+] = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = \operatorname{Int} \hat{\Delta}_+,$$

где

$$X_i = [\hat{\Sigma}_+] \cup ([\operatorname{Skel}^i \hat{\Sigma}] \cap \operatorname{Int} \hat{\Delta}_+).$$

Построим последовательность деформационных ретракций $X_n \to X_{n-1} \to \dots \to X_0$ следующим образом.

Если $\sigma \in \hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}_+$ — i-мерный симплекс, а b — барицентр симплекса σ, то $b \notin X_i$, и, значит, $\sigma \cap X_i$ можно „выдуть" из b на $\partial\sigma \cap X_{i-1}$. Выполнив эту процедуру для всех i-мерных симплексов $\sigma \in \hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}_+$, получим требуемую ретракцию $X_i \to X_{i-1}$. •

Предложение 4.3. *Пусть $X = X_{(\Sigma,s)} = \{f = 0\}$ — некоторая Т-гиперповерхность Виро (см. 2.3). Пусть $S_+^{n-1} = S^{n-1} \cap \{f \geqslant 0\}$ (как и в левой части неравенства (*)). Тогда*

$$\tilde{\chi}(S_+^{n-1}) = (-1)^{n-1} \sum_{\tau \in \Sigma} e(\tau) s(\tau) R_\tau(-1),$$

где $e(\tau)$ и $s(\tau)$ определены, как в п. 4.1, и $R_\tau(t)$ — комбинаторный многочлен грани τ (см. п. 3.2).

Доказательство. Из п. 2.3 и 4.2 следует, что $\tilde{\chi}(S_+^{n-1}) = \tilde{\chi}(\hat{\Delta}_+) = \tilde{\chi}([\hat{\Sigma}_+])$. Пусть

$$\mathbf{1}_{\hat{\Sigma}_+} : \hat{\Sigma} \to \{0, 1\}$$

и

$$\mathbf{1}_{\operatorname{Som} \hat{\Sigma}_+} : \operatorname{Som} \hat{\Sigma} \to \{0, 1\}$$

— характеристические функции множеств $\hat{\Sigma}_+$ и $\operatorname{Som} \hat{\Sigma}_+$, т.е. $\mathbf{1}_{\hat{\Sigma}_+}(\sigma) = 1$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in \hat{\Sigma}_+$, и $\mathbf{1}_{\operatorname{Som} \hat{\Sigma}_+}(v) = 1$ тогда и только тогда, когда $v \in \operatorname{Som} \hat{\Sigma}_+$. Ясно, что $\mathbf{1}_{\operatorname{Som} \hat{\Sigma}_+}(v) = (s(v) + 1)/2$. Пусть $d(\sigma)$, $k(\sigma)$ обозначают то же, что в 3.2. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\hat{\Sigma}_+}(\sigma) &= \prod_{i=1}^{d(\sigma)} \mathbf{1}_{\operatorname{Som} \hat{\Sigma}_+}(v_i) = \prod_{i=1}^{d(\sigma)} \frac{s(v_i) + 1}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{d(\sigma)} \sum_{\tau \leqslant \sigma} s(\tau),
\end{aligned}$$

где $v_1, \ldots, v_{d(\sigma)}$ — вершины симплекса σ (напомним, что $\varnothing \leqslant \sigma$). Пусть $\hat{\sum}$ и $\sum$ обозначают то же, что и в 3.4. Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
-\tilde{\chi}(S_+^{n-1}) &= \hat{\sum_\sigma}(-1)^{d(\sigma)}\mathbf{1}_{\hat{\Sigma}_+}(\sigma) = \hat{\sum_\sigma}(-2)^{-d(\sigma)}\hat{\sum_{\tau\leqslant\sigma}}s(\tau) \\
&= \hat{\sum_\tau}s(\tau)\hat{\sum_{\sigma\geqslant\tau}}(-2)^{-d(\sigma)} \\
&\qquad \text{(по следствию 4.1)} \\
&= \sum_\tau s(\tau)e(\tau)2^{k(\tau)}\hat{\sum_{\sigma\geqslant\tau}}(-2)^{-d(\sigma)} \\
&\qquad \text{(по лемме 3.4)} \\
&= \sum_\tau s(\tau)e(\tau)2^{k(\tau)}\sum_{\sigma\geqslant\tau}2^{k(\sigma)-k(\tau)}(-2)^{-d(\sigma)} \\
&= (-1)^n\sum_\tau s(\tau)e(\tau)\sum_{\sigma\geqslant\tau}(-1)^{n-k(\sigma)}(-2)^{k(\sigma)-d(\sigma)} \\
&= (-1)^n\sum_\tau s(\tau)e(\tau)R_\tau(-1). \quad \bullet
\end{aligned}
$$

§5. Многочлен Пуанкаре симплекса

Определение 5.1. Для данного $S \subset \mathbf{R}^n$ и линейного функционала $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ определим *ряд Пуанкаре* множества S относительно L, как

$$[S]^L = \sum_{a\in S\cap\mathbf{Z}^n} t^{L(a)} = \sum_\alpha c_\alpha t^\alpha,$$

где c_α — число целых точек на гиперплоском сечении $S \cap \{L = \alpha\}$.

Пусть $\sigma \in \mathbf{R}^n$ — целочисленный симплекс с линейно-независимыми вершинами $v_1, \ldots, v_d$. Пусть

$$C_\sigma = \mathbf{R}_+\sigma = \{x_1v_1 + \cdots + x_dv_d \mid x_i \geqslant 0\}$$

— замкнутый конус, порожденный симплексом σ, и

$$\Pi_\sigma = \{x_1v_1 + \cdots + x_dv_d \mid 0 \leqslant x_i < 1\}$$

— „полузамкнутый" параллелепипед.

Пусть L — линейный функционал с $L|_\sigma = 1$. Следуя Арнольду [1],[2] определим *ряд Пуанкаре* p_σ (соответственно q_σ) и *многочлен Пуанкаре* P_σ (соответственно Q_σ) *грани* σ (соответственно *внутренности грани* σ) следующим образом:

$$p_\sigma(t) = [C_\sigma]^L, \qquad q_\sigma(t) = [\operatorname{Int} C_\sigma]^L,$$
$$P_\sigma(t) = [\Pi_\sigma]^L, \qquad Q_\sigma(t) = [\operatorname{Int} \Pi_\sigma]^L$$

(при $\sigma = \varnothing$ положим по определению $p_\varnothing = q_\varnothing = P_\varnothing = Q_\varnothing = 1$).

5.2. Примеры [1]. (a). Для Δ из (1.1) имеем

$$p_\Delta(t) = (1 - t^{1/m})^{-n}, \qquad q_\Delta(t) = t^{n/m}(1 - t^{1/m})^{-n},$$
$$P_\Delta(t) = \left(\frac{1-t}{1-t^{1/m}}\right)^n, \qquad Q_\Delta(t) = \left(\frac{t^{1/m}-t}{1-t^{1/m}}\right)^n.$$

(b) Число Петровского (см. Введение) равно $\Pi_n(m) = \operatorname{coef}_{n/2} Q_\Delta(t)$.

Лемма 5.3 [1].

$$\text{(a)}\quad p_\sigma(t) = \sum_{\tau\leqslant\sigma} q_\tau(t), \qquad \text{(b)}\quad q_\sigma(t) = \sum_{\tau\leqslant\sigma} (-1)^{d(\sigma)-d(\tau)} p_\tau(t),$$
$$\text{(c)}\quad P_\sigma(t) = \sum_{\tau\leqslant\sigma} Q_\tau(t), \qquad \text{(d)}\quad Q_\sigma(t) = \sum_{\tau\leqslant\sigma} (-1)^{d(\sigma)-d(\tau)} P_\tau(t).$$

Доказательство. Формулы (a), (c) очевидны; (b), (d) вытекают из формулы включений—исключений.

Лемма 5.4 [1]. $P_\sigma(t) = p_\sigma(t)\cdot(1-t)^{d(\sigma)}$.

Доказательство. Пусть M — полугруппа, порожденная вершинами $v_1, \dots, v_d$ симплекса σ. Ясно, что C_σ — объединение непересекающихся множеств $m + \Pi_\sigma$ по всем $m \in M$. Заметим также, что для любого $m = m_1v_1 + \dots + m_dv_d \in M$ и для любого подмножества $S \subset \mathbf{R}^n$ имеем $[m + S]^L = t^{m_1+\dots+m_d}[S]^L$. Значит,

$$p_\sigma = [C_\sigma]^L = \sum_{m\in M} [m + \Pi_\sigma]^L = P_\sigma \sum_{m\in M} t^{m_1+\dots+m_d}$$
$$= P_\sigma \cdot (1 + t + t^2 + \dots)^d.$$

[2]Наши обозначения рядов и многочленов Пуанкаре отличны от обозначений в [1].

Лемма 5.5. *Пусть τ — грань симплекса σ и a, b — элементы любого коммутативного кольца. Тогда*

$$\sum_{\tau\leqslant\lambda\leqslant\sigma} a^{d(\sigma)-d(\lambda)} b^{d(\lambda)-d(\tau)} = (a+b)^{d(\sigma)-d(\tau)}.$$

Лемма 5.6.

$$Q_\sigma(t) = \sum_{\tau\leqslant\sigma} (-t)^{d(\sigma)-d(\tau)} q_\tau(t)\,(1-t)^{d(\tau)};$$

$$q_\sigma(t)\,(1-t)^{d(\sigma)} = \sum_{\tau\leqslant\sigma} t^{d(\sigma)-d(\tau)} Q_\tau(t).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
Q_\sigma(t) &\overset{5.3d}{=} \sum_{\lambda\leqslant\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)} P_\lambda(t)\\
&\overset{5.4}{=} \sum_{\lambda\leqslant\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)} p_\lambda(t)\,(1-t)^{d(\lambda)}\\
&\overset{5.3a}{=} \sum_{\lambda\leqslant\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}(1-t)^{d(\lambda)} \sum_{\tau\leqslant\lambda} q_\tau(t)\\
&= \sum_{\tau\leqslant\sigma} q_\tau(t)\,(1-t)^{d(\tau)} \sum_{\tau\leqslant\lambda\leqslant\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}(1-t)^{d(\lambda)-d(\tau)}\\
&\overset{5.5}{=} \sum_{\tau\leqslant\sigma} q_\tau(t)\,(1-t)^{d(\tau)}\cdot(-t)^{d(\sigma)-d(\tau)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_\sigma(t)(1-t)^{d(\sigma)} &\overset{5.3b}{=} (1-t)^{d(\sigma)} \sum_{\lambda\leqslant\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)} p_\lambda(t)\\
&\overset{5.4}{=} \sum_{\lambda\leqslant\sigma}(t-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)} P_\lambda(t)\\
&\overset{5.3c}{=} \sum_{\lambda\leqslant\sigma}(t-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)} \sum_{\tau\leqslant\lambda} Q_\tau(t)\\
&= \sum_{\tau\leqslant\sigma} Q_\tau(t) \sum_{\tau\leqslant\lambda\leqslant\sigma}(t-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}\\
&\overset{5.5}{=} \sum_{\tau\leqslant\sigma} Q_\tau(t)\,t^{d(\sigma)-d(\tau)}.
\end{aligned}$$

§6. Правая часть неравенства Петровского—Олейник для Т-гиперповерхностей

Предложение 6.1. *Пусть Σ — регулярная триангуляция симплекса Δ (см. п. 1.1, 2.1). Тогда $Q_\Delta(t) = \sum_{\tau\in\Sigma} Q_\tau(t)R_\tau(t)$.*

Доказательство. Заметим, что если $\sigma \in \Sigma$ и $\operatorname{Int}\sigma \subset \operatorname{Int}\Delta'$ для некоторой грани Δ' симплекса Δ, то $d(\Delta') = k(\sigma)$. Значит,

$$\begin{aligned}
Q_\Delta(t) &= \sum_{\Delta'\leqslant\Delta} (-t)^{n-d(\Delta')} q_{\Delta'}(t)\,(1-t)^{d(\Delta')} && \text{по 5.6; слева}\\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma} (-t)^{n-k(\sigma)} q_\sigma(t)(1-t)^{k(\sigma)} && \text{так как } q_{\Delta'} = \textstyle\sum_{\operatorname{Int}\sigma\subset\operatorname{Int}\Delta'} q_\sigma\\
&= \sum_{\sigma} (-t)^{n-k(\sigma)}(1-t)^{k(\sigma)-d(\sigma)} \sum_{\tau\leqslant\sigma} t^{d(\sigma)-d(\tau)} Q_\tau(t) && \text{по 5.6; справа}\\
&= \sum_{\tau} Q_\tau(t)\, t^{n-d(\tau)} \sum_{\sigma\geqslant\tau} (-1)^{n-k(\sigma)}(t^{-1}-1)^{k(\sigma)-d(\sigma)} &&\\
&= \sum_{\tau} Q_\tau(t)\, t^{n-d(\tau)} R_\tau(t^{-1}) = \sum_{\tau} Q_\tau(t) R_\tau(t) && \text{по симметрии } R_\tau.
\end{aligned}$$

Следствие 6.2. *Для любой регулярной триангуляции Σ симплекса Δ имеем*

$$\sum_{\tau\in\Sigma} \operatorname{coef}_{n/2}\left(Q_\tau(t)R_\tau(t)\right) = \Pi_n(m),$$

где $\Pi_n(m)$ — число Петровского (см. Введение). Поэтому для Т-гиперповерхности Виро $X_{(\Sigma,s)}$ (см. §2) неравенство $(*)$ эквивалентно неравенству

$$\left|\sum_{\tau\in\Sigma} e(\tau)s(\tau)R_\tau(-1)\right| \leqslant \sum_{\tau\in\Sigma} \operatorname{coef}_{n/2}\left(Q_\tau(t)R_\tau(t)\right),$$

где $e(\tau)$, $s(\tau)$ определены в 4.1, R_τ — комбинаторный многочлен грани τ (см. (3.2)) и Q_τ — многочлен Пуанкаре внутренности грани τ (см. 5.1).

Доказательство. Применим неравенство $(*)$, предложение (4.3), п. b леммы 5.2 и 6.1. •

§7. Локальные неравенства

7.1. Симметричные и унимодальные многочлены. Пусть $H(t) = \sum h_i t^i$ — некоторый многочлен, и $d \in \mathbf{Z}$. Скажем, что H *симметричен с центром* $t^{d/2}$, если $h_i = h_{d-i}$; H *унимодален с центром* $t^{d/2}$, если все его коэффициенты неотрицательны, $h_{i-1} \leqslant h_i$ при $i \leqslant d/2$ и $h_i \geqslant h_{i+1}$ при $i \geqslant d/2$.

Если многочлен $H(t)$ симметричен с центром $t^{d/2}$, будем обозначать коэффициент при $t^{d/2}$ через $\operatorname{mcoef} H$.

Будем следовать соглашению: если о многочлене, записанном в виде $\sum_{i=0}^{d} h_i t^i$, говорится, что он симметричен и (или) унимодален, то центр подразумевается в $t^{d/2}$, даже если $h_d = 0$.

Лемма. *Пусть многочлен* $H(t) = \sum_{i=0}^{d} h_i t^i$ *симметричен и унимодален. Тогда*

(a) $|H(-1)| \leqslant h_{d/2}$.

(b) *Пусть* $d = 2k-1$. *Тогда* $H(-1) = h_k \iff h_{2i} = h_{2i+1}$, $i = 0, \dots, [(k-1)/2]$.

(c) *Пусть* $d = 2k$. *Тогда* $H(-1) = -h_k \iff h_0 = 0$ *и* $h_{2i-1} = h_{2i}$, $i = 1, \dots, [k/2]$.

Доказательство. Если d нечетно, то обе части в (a) равны нулю. Если $d = 2k$, то $h_k - H(-1) = 2(h_1 - h_0) + 2(h_3 - h_1) + \cdots$ и $h_k + H(-1) = 2h_0 + 2(h_2 - h_1) + 2(h_4 - h_3) + \cdots$ •

Следствие 7.2. *Пусть* H_P — *H-многочлен выпуклого симплициального многогранника размерности* $d = 2k$ (*см.* 3.1). *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) $|H_P(-1)| = h_k$; (b) $H_P(-1) = h_k$; (c) P — *симплекс.*

Доказательство. H_P симметричен и унимодален [13]. Значит, применима лемма 7.1:

(a) $\Longrightarrow$ (b) Иначе 7.1c дало бы $h_d = 0$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) По 7.1b имеем $1 = h_{d-1}$, значит, $f_0 = d + 1$ (см. 3.1).

(c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a) См. пример 3.1a. •

Следствие 7.3. *Пусть* Σ — *регулярная триангуляция симплекса* Δ, *и* $\tau \in \Sigma$. *Тогда*

$$e(\tau)|R_\tau(-1)| \leqslant \operatorname{coef}_{n/2}\bigl(Q_\tau(t)R_\tau(t)\bigr).$$

Доказательство. Положим $q = \operatorname{mcoef} Q_\tau$ и $r = \operatorname{mcoef} R_\tau$. Ясно, что $\operatorname{mcoef}(Q_\tau R_\tau) \geqslant qr$, $q \geqslant e(\tau)$, а из 3.6 и 7.1a следует, что $r \geqslant |R_\tau(-1)|$. •

Вместе с 6.2 это дает комбинаторное доказательство неравенства $(*)$ для T-гиперповерхностей Виро.

Определение 7.4. Триангуляция симплекса Δ (см. (1.1)) называется *локально-экстремальной*, если она регулярна и для каждого симплекса τ (включая $\tau = \varnothing$) имеем

$$e(\tau)|R_\tau(-1)| = \operatorname{coef}_{n/2}\left(Q_\tau(t)R_\tau(t)\right). \tag{**}$$

Следствие. *Пусть $X = X_{(\Sigma,s)}$ — Т-гиперповерхность Виро. Если в $(*)$ имеет место „=“, то Σ локально-экстремальна.*

Доказательство. Сравните 6.2 и 7.3. •

7.5. Приведенный многочлен Пуанкаре. Для $Q(t) = \sum_{\alpha\in A} q_\alpha t^\alpha$, $A \subset \mathbf{Q}$ и $\beta \in \mathbf{Q}$ определим β-редукцию многочлена $Q(t)$ формулой

$$\operatorname{red}_\beta Q(t) = \sum_{\alpha\in A\cap(\beta+\mathbf{Z})} q_\alpha t^\alpha.$$

Для Σ из (2.1) и $\tau \in \Sigma$ определим *приведенный многочлен Пуанкаре внутренности грани* τ как $\tilde{Q}_\tau = \operatorname{red}_{n/2} Q_\tau$ (см. §5). Из 6.1 (см. также 5.2b) легко следует, что

$$\Pi_n(m) = \sum_{\tau\in\Sigma} \operatorname{mcoef}\left(\tilde{Q}_\tau(t)R_\tau(t)\right).$$

§8. Случай примитивной триангуляции

Определение 8.1. Целочисленный i-мерный симплекс $\tau \in \mathbf{R}^n$ называется *минимальным*, если $\tau \cap \mathbf{Z}^n = \operatorname{Som}\tau$. Он называется *примитивным*, если его i-мерный объем равен $1/i!$. Триангуляция называется *примитивной* (соответственно *минимальной*), если каждый ее симплекс примитивен (соответственно минимален).

Ясно, что каждый примитивный симплекс минимален; если $\dim\tau \leqslant 2$, то минимальность равносильна примитивности; если τ минимален и $\dim\tau \geqslant 3$, то его объем может быть сколь угодно велик.

Лемма. *Пусть $\sigma \neq \varnothing$ — целочисленный примитивный симплекс. Тогда*

(a) *Если σ четен (см. 4.1), то $d(\sigma)$ нечетно (т.е. $\dim\sigma$ четно).*

(b) *Если вершины симплекса σ линейно-независимы, то σ имеет не более одной четной непустой грани.*

(c) *Если $\sigma \subset \Delta$ (см. (1.1)) и m четно, то σ имеет в точности одну четную непустую грань.*

Доказательство. Пусть V — линейная оболочка симплекса σ. Поскольку σ примитивен, существует $a \in V$ и базис $e_1, \ldots, e_d$ решетки $M = \mathbf{Z}^n \cap V$ такие, что вершины симплекса σ суть $a+e_1,\dots,a+e_d$. Пусть $a=\sum a_ie_i$ и пусть $I=\{i\mid a_i$ нечетно$\}$. Пусть τ — грань симплекса σ, натянутая на $\{a+e_j\mid j\in J\}$. Предположим, что τ четен. Мы покажем (и из этого будет следовать (b)), что тогда $J=I$. Действительно, обозначим через v сумму вершин симплекса τ. Тогда $v=|J|a+\sum_{j\in J}e_j\in 2M$. Если бы $|J|$ было четным, то $|J|a$ был бы четным вектором, и все x_j, $j\in J$ были бы нечетными, где $v=\sum x_ie_i$ — разложение вектора v по базису $\{e_i\}$. Поэтому $|J|$ нечетно (это доказывает (a)). Заметим, что $\sum_{i\in I}e_i\equiv a\pmod 2$, значит,

$$\sum_{i\in I}e_i+\sum_{j\in J}e_j\equiv a+\sum_{j\in J}e_j\equiv v\equiv 0\pmod 2.$$

Но $\{e_i\}_{i\in\bar n}$ — базис в $M\otimes\mathbf{Z}_2$, следовательно, $J=I$. Для доказательства (c) заметим, что $J=I=\varnothing$ влечет $a\in 2M$, что противоречит тому, что $m\in 2\mathbf{Z}$. •

Предложение 8.2. *Пусть $\tau\in\mathbf{R}^n$ — примитивный симплекс с линейно-независимыми вершинами. Тогда $\tilde Q_\tau(t)=e(\tau)t^{d(\tau)/2}$. В частности,* $\operatorname{mcoef}(Q_\tau R_\tau) = \operatorname{mcoef}(\tilde Q_\tau R_\tau)=e(\tau)\operatorname{mcoef}R_\tau(t)$.

Доказательство. Если $d(\tau)$ четно, то $\tilde Q(t)=0$ и утверждение тривиально. Предположим, что $d=d(\tau)$ нечетно. Пусть V — линейная оболочка симплекса τ, L — линейный функционал на V такой, что $L|_\tau=1$, и $M=\{m\in\mathbf{Z}^n\mid 2L(m)\in\mathbf{Z}\}$. Обозначим через $v_1,\dots,v_d$ вершины симплекса τ, и пусть Π_τ будет, как в 5.1.

Нам надо показать, что $m\in M\cap\operatorname{Int}\Pi_\tau\implies 2m=\sum v_i$. Действительно, то, что τ примитивен, означает, что существуют $a\in M$ с $L(a)=1/2$ и базис $e_1,\dots,e_d$ в M такие, что $v_i=a+e_i$. Тогда $m=\sum m_ie_i$ с целыми m_i. С другой стороны, если $m\in\operatorname{Int}\Pi_\tau$, то $m=\sum x_iv_i$, где $0<x_i<1$. Значит, $a\cdot\sum m_i=\sum(m_i-x_i)v_i$. Но $2a$ лежит в аффинной оболочке симплекса τ, и τ примитивен, из этого следует, что коэффициенты вектора a в базисе $\{v_i\}$ полуцелые. Поэтому число m_i-x_i полуцело при всех i, значит, $x_i=1/2$. •

Таким образом, для примитивного симплекса τ условие локальной экстремальности (**) эквивалентно условию

$$e(\tau)=1\quad\implies\quad|R_\tau(-1)|=\operatorname{mcoef}R_\tau\,,$$

а если τ примитивен, $d(\tau)\equiv n\bmod 2$, и τ не содержится в объединении координатных гиперплоскостей, то (**) эквивалентно условию

$$e(\tau)=1\quad\implies\quad\tau^*\ \text{является симплексом}.$$

Напомним, что τ^* — срез грани τ (см. (3.3)).

8.3. Четная размерность. Пусть n четно и Σ — некоторая примитивная триангуляция симплекса Δ (см. (1.1)). Пусть S_+^{n-1} и $\Pi_n(m)$ обозначают то же, что и в $(*)$ (см. Введение) для Т-гиперповерхности Виро $X = X_{\Sigma,s}$ (где s — произвольное распределение знаков).

Предложение.

$$-\tilde{\chi}(S_+^{n-1}) = R_\varnothing(-1); \qquad \Pi_n(m) = \operatorname{coef}_{n/2} R_\varnothing.$$

В частности, при $n = 4$ *имеем* $R_\varnothing = c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t$, *где* $c_1 = \binom{m-1}{3}$ *и*

$$c_2 = \Pi_4(m) = \frac{2}{3}m^3 - 2m^2 + \frac{7}{3}m - 1,$$

значит,

$$-\tilde{\chi}(S_+^{n-1}) = c_2 - 2c_1 = \frac{1}{3}m^3 - \frac{4}{3}m + 1$$

не зависит от Σ *(и от* s*). Таким образом, мы имеем „=“ в* $(*)$ *при* $m \leqslant 3$ *и „<“ при* $m \geqslant 4$.

Доказательство. Если $\tau \neq \varnothing$, то либо $R_\tau(-1) = \operatorname{mcoef} R_\tau = 0$ (когда $d(\tau)$ нечетно), либо $e(\tau) = 0$ (когда $d(\tau)$ четно). Поэтому вклад симплекса τ в обе части $(*)$ равен нулю.

Для вычисления $R_\varnothing$ при $n = 4$ заметим, что для примитивной триангуляции число вершин и трехмерных граней известно, а число ребер и треугольников можно найти из уравнений Дэна–Соммервилля (см. Приложение). •

8.4. Нечетная размерность. Предположим, что n нечетно и имеет место „=“ в $(*)$ для Т-гиперповерхности Виро $X_{(\Sigma,s)}$, где Σ — некоторая примитивная триангуляция симплекса Δ, равенство. Пусть $\tau \in \Sigma$. Если $d(\tau)$ четно (в частности, если $\tau = \varnothing$), то вклад симплекса τ в обе части $(*)$ равен нулю. Таким образом, необходимым условием на примитивную триангуляцию Σ для „=“ в $(*)$ является следующее:

Срез τ^* *является симплексом для каждого симплекса* τ *такого, что* $d(\tau)$ *нечетно и* $k(\tau) = n$.

§9. Случай малых размерностей

Напомним (см. (1.1)), что все целочисленные плоскости снабжены целочисленным объемом, в частности, длина отрезка $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{Z}^n$, равна $\#(\mathbf{Z}^n \cap [a, b))$.

Для данного k-мерного симплекса σ в аффинной целочисленной k-плоскости V и для точки $p \in \mathbf{Z}^n \setminus V$ определим *высоту* h_p симплекса $[p\sigma]$ как длину отрезка $\varphi([p\sigma])$, где $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-k}$ — проекция вдоль V такая, что $\varphi(\mathbf{Z}^n) = \mathbf{Z}^{n-k}$. Таким образом, $\operatorname{vol}_{k+1}[p\sigma] = h_p \operatorname{vol}_k \sigma/(k + 1)$.

Случай $n = 3$

9.1. Локальное условие. Мы дадим интерпретацию локального условия $(**)$ при всех значениях $(d(\tau), k(\tau))$. Мы предполагаем, что m (см. (1.1)) четно, так как при нечетном m $(*)$ принимает вид $0 = 0$.

• $d(\tau) = 0$ (т.е. $\tau = \varnothing$): $Q_\tau = 1$, $R_\tau(-1) = \operatorname{coef}_{3/2} R_\tau = 0$, значит, $(**)$ всегда выполнено.

• $d(\tau) = 1$: $\tilde{Q}_\tau = e(\tau)t^{1/2}$. Обозначим число ребер триангуляции $\hat{\Sigma}$, инцидентных с τ, через $\hat{\nu}$.

$k(\tau) = 1, 2$: $2^{3-k(\tau)}R_\tau = (\hat{\nu} - 4)t$, значит, условие $(**)$ автоматически выполнено;

$k(\tau) = 3$: $R_\tau = 1 + (\hat{\nu} - 2)t + t^2$, значит, условие $(**)$ выполнено тогда и только тогда, когда $e(\tau) = 0$ или $\hat{\nu} = 3$.

• $d(\tau) = 2$:

$k(\tau) = 2$: $R_\tau = 0$, значит, условие $(**)$ всегда выполнено.

$k(\tau) = 3$: $R_\tau = t + 1$, значит, $\operatorname{coef}_{3/2}(Q_\tau R_\tau) = 2\operatorname{coef}_{1/2} Q_\tau$. Таким образом, условие $(**)$ выполнено тогда и только тогда, когда $(\operatorname{Int}\tau) \cap 2\mathbf{Z}^3 = \varnothing$.

• $d(\tau) = 3, k(\tau) = 3$: $R_\tau = 1$, значит, условие $(**)$ равносильно тому, что $\operatorname{coef}_{3/2} Q_\tau = e(\tau)$. Это так, если и только если выполнено одно из следующих условий:

(i) τ примитивен;

(ii) $\tau = [abc]$, причем прямая ac содержит четную точку, и высота h_a равна 1;

(iii) барицентр b симплекса τ четен, и $\tau \cap \mathbf{Z}^3 = \operatorname{Som}\tau \cup \{b\}$.

Анализируя эти условия, можно легко получить

Предложение 9.2 ($n = 3$, m четно). (а) *Любую локально-экстремальную (см. (7.4)) триангуляцию симплекса Δ можно подразбить до примитивной локально-экстремальной триангуляции.*

(б). *Пусть Σ локально-экстремальна и*

$$s(a) = \begin{cases} -1 & \text{при } k(a) = 2 \text{ и } a \notin 2\mathbf{Z}^3, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда в $(*)$ для T-гиперповерхности Виро $X = X_{(\Sigma,s)}$ имеет место „=“.

Примеры (Σ, s), обеспечивающие „=“ в $(*)$, даны на рис. 2 („+“ белый, „−“ черный). Регулярность следует из 10.1, 10.2 с применением гексагонального разбиения, изображенного жирными линиями.

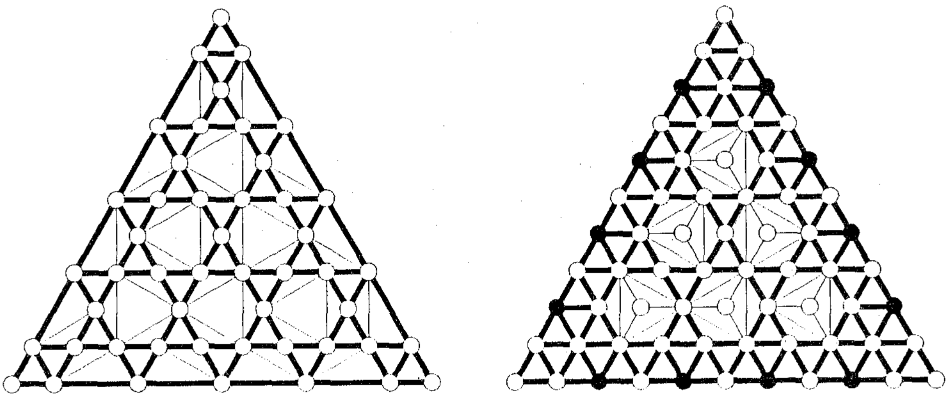

Рис. 2.

Случай $n = 4$

9.3. Локальное условие. Как и в 9.1, мы исследуем условие локальной экстремальности $(**)$ для каждой пары (d, k).

$d(\tau) = 0$ (т.е. $\tau = \varnothing$): по определению (см. (3.2))

$$R_{\varnothing}(t) = \sum_{0 \leqslant d \leqslant k} (-1)^{4-k}(t-1)^{k-d} f_{k;d},$$

где

$$f_{k;d} := \#\{\sigma \in \Sigma \mid k(\sigma) = k, d(\sigma) = d\}.$$

Рассмотрим отдельно следующие два случая:

$$R_{\varnothing}(-1) = \operatorname{mcoef} R_{\varnothing}; \tag{9.3.1}$$

$$R_{\varnothing}(-1) = -\operatorname{mcoef} R_{\varnothing}. \tag{9.3.2}$$

Ясно, что

$$\operatorname{coef}_4 R_{\varnothing} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{coef}_3 R_{\varnothing} = f_{4;1} = \#\big(\operatorname{Som}(\Sigma) \cap \operatorname{Int}\Delta\big).$$

Поэтому, как видно из 7.1b, условие 9.3.1 выполнено, если и только если $f_{4;1} = 0$. (Это значит, что все вершины триангуляции Σ лежат на $\partial\Delta$).

Аналогично 9.3.2 эквивалентно тому, что $f_{4;2} = 4f_{4;1} + f_{3;1}$.

- $d(\tau) = 1$: $\tilde{Q}_{\tau} = 0$ и $R_{\tau}(-1) = 0$. Значит, $(**)$ выполнено автоматически.

• $d(\tau) = 2$: $\tilde{Q}_\tau = qt$, где $q = \#(\mathbf{Z}^4 \cap \operatorname{Int}\tau)$. Пусть

$$\hat{\nu} = \#\{\tau < \sigma \in \hat{\Sigma} \mid d(\sigma) = 4\}.$$

$k(\tau) = 2, 3$: $2^{4-k(\tau)}R_\tau = (\hat{\nu}-4)t$, значит, (**) эквивалентно $(\hat{\nu}-4)(q-e(\tau)) = 0$. (Заметим, что $q = e(\tau)$, если и только если $q \leqslant 1$).

$k(\tau) = 4$: $R_\tau = 1+(\hat{\nu}-2)t+t^2$, значит, (**) принимает вид $e(\tau)|4-\hat{\nu}| = q(\hat{\nu}-2)$. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда либо (i) $q = 0$, либо (ii) $\hat{\nu} = 3$ и $q = 1$.

• $d(\tau) = 3$:

$k(\tau) = 3$: $R_\tau = 0$, значит, условие (**) выполнено автоматически.

$k(\tau) = 4$: $R_\tau = 1 + t$, $\tilde{Q}_\tau = q + qt$, где $q = \#(\mathbf{Z}^4 \cap \operatorname{Int}\tau)$. Значит, (**) эквивалентно тому, что $q = 0$.

• $d(\tau) = k(\tau) = 4$: $R_\tau = 1$, значит, условие (**) эквивалентно условию

$$\operatorname{coef}_2 Q_\tau = e(\tau). \tag{9.3.3}$$

Можно перечислить более или менее явно все трехмерные симплексы, удовлетворяющие условию 9.3.3, как мы это сделали для остальных значений (k, d). Однако ответ достаточно сложен, и мы ограничимся тем, что приведем некоторые следствия из 9.3.3.

9.4. Многочлен Пуанкаре внутренности трехмерного симплекса. Пусть $\tau \subset \mathbf{R}^4$ — трехмерный целочисленный симплекс. Обозначим через V, S и l соответственно его целочисленный объем, сумму целочисленных объемов граней и сумму целочисленных длин ребер. Положим $i = \#(\mathbf{Z}^4 \cap \operatorname{Int}\tau)$. Пусть $\tilde{Q}_\tau(t) = c_1 t + c_2 t^2 + c_1 t^3$ будет, как в (7.5).

Предложение 9.4.1. (a) $c_1 = i$; (b) $c_2 = 6V - 2S + l - 2i - 3$.

Доказательство. (a) Очевидно. (b) Заменяя при необходимости $\mathbf{Z}^4$ решеткой, порожденной целыми точками аффинной оболочки симплекса τ, можно считать, что $\operatorname{coef}_\alpha p_\tau = 0$ при $\alpha \notin \mathbf{Z}$ (в частности, $\tilde{Q}_\tau = Q_\tau$). По формуле Эрхарта [5] имеем

$$\operatorname{coef}_k p_\tau = Vk^3 + (S/2)k^2 + \Delta k + 1, \quad k \geqslant 0,$$

где $\Delta = i - V + (S/2) + 1$. Суммирование $t^k \operatorname{coef}_k p_\tau$ по $k \geqslant 0$ дает

$$p_\tau = V \cdot \frac{t^3 + 4t^2 + t}{(1-t)^4} + \frac{S}{2} \cdot \frac{t^2 + t}{(1-t)^3} + \frac{\Delta t}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t}.$$

Аналогично найдем $p_{\tau,d} := \sum_{\sigma \leqslant \tau, d(\sigma)=d} p_\sigma$ суммированием выражений

$$\operatorname{coef}_k p_{\tau,3} = Sk^2 + lk + 4, \qquad \operatorname{coef}_k p_{\tau,2} = lk + 6, \qquad \operatorname{coef}_k p_{\tau,1} = 4$$

и применим равенство $Q_\tau = \sum_{d=0}^4 (t-1)^d p_{\tau,d}$ (см. 5.3d, 5.4). •

Лемма. *Существует триангуляция симплекса τ с вершинами в* $\mathrm{Som}(\tau) \cup (\mathbf{Z}^4 \cap \mathrm{Int}\,\tau)$, *имеющая* $\geqslant 3i+1$ *тетраэдров.*

Доказательство. Обозначим точки из $\mathbf{Z}^4 \cap \mathrm{Int}\,\tau$ через $p_1, \ldots, p_i$. Пусть $\Sigma_0 = \{\tau\}$ и пусть Σ_j получен из Σ_{j-1} добавлением точки p_j и подразбиением содержащих ее симплексов. Ясно, что каждый раз мы добавляем $\geqslant 3$ тетраэдров. •

Следствие 9.4.2.

(a) *Если* $i > 0$, *то* $6V \geqslant 2S + 3(i-1)$.

(b) *Если* $i > 0$, *то* $c_2 \geqslant i + l - 6$;

(c) $c_2 \geqslant c_1$.

Доказательство. (a) В триангуляции из леммы объем четырех тетраэдров, имеющих общую грань с τ, $\geqslant S/3$. Объем остальных $\geqslant (\#\text{тетраэдров}-4)/6 \geqslant (3i+1-4)/6$.

(b) Подставим (a) в 9.4.1b.

(c) Положим $c_1 = i$ и $l \geqslant 6$ в (b). •

Гипотеза. Многочлен Q_τ унимодален для любого многогранника τ с вершинами в целых точках.

Замечание. Рассуждения, как выше, доказывают эту гипотезу при $d(\tau) = 4$.

Следствие 9.4.3. *Если симплекс* τ *минимален (см.* 8.1), *то* $c_2 = 6V - 1$.

Доказательство. Положим $i = 0$, $l = 6$, $S = 2$ в 9.4.1b. •

Предложение 9.4.4. *Если* τ *минимален, то следующие условия равносильны:*

(a) τ *удовлетворяет* 9.3.3,

(b) $V = (1 + e(\tau))/6$,

(c) $V = 1/6$ *или* $1/3$.

Доказательство. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) по 9.4.3; (b) $\Longrightarrow$ (c) очевидно.

(c) $\Longrightarrow$ (b). При $V = 1/6$ это следует из леммы 8.1a. Предположим, что $V = 1/3$, и докажем, что $e(\tau) = 1$. Пусть $v_0, \ldots, v_3$ — вершины симплекса τ. Положим $e_j = v_j - v_0$, $j = 1, 2, 3$. Обозначим через M решетку, порожденную e_1, e_2, e_3. Пусть $M' = \mathbf{Z}^4 \cap (M \otimes \mathbf{R})$. Тогда $[M' : M] = 2$. Значит, M' порождена e_1, e_2, e_3', и $e_3 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + 2e_3'$. Поскольку

$$v_0 + \cdots + v_4 = 4v_0 + (a_1+1)e_1 + (a_2+1)e_2 + 2e_3',$$

достаточно показать, что a_1 и a_2 нечетны. Действительно, если $a_1 \equiv a_2 \equiv 0 \bmod 2$, то отрезок $[v_0 v_3]$ не был бы минимальным; если $a_1 + 1 \equiv a_2 \equiv 0 \bmod 2$, то $[v_2 v_3]$ не был бы минимальным. •

§10. Критерии регулярности

10.1. Регулярное полиэдральное разбиение. Для многогранника $\Delta \in \mathbf{R}^n$ определим его (*регулярное*) *полиэдральное разбиение*, заменяя всюду в (1.2) и (2.1):

„симплекс“	$\longrightarrow$	„выпуклый многогранник“,
„симплициальный комплекс“	$\longrightarrow$	„полиэдральный комплекс“,
„триангуляция“	$\longrightarrow$	„полиэдральное разбиение“.

Предложение. *Пусть* Σ — *полиэдральное разбиение некоторого выпуклого n-мерного многогранника* $\Delta \subset \mathbf{R}^n$. *Предположим, что (возможно, после аффинной замены координат) каждую грань* $\sigma \in \Sigma$ *можно вписать в сферу, центр которой лежит либо в* $\operatorname{Int}\sigma$, *либо в* $\operatorname{Int}(\sigma \cap \Delta')$ *для некоторой грани* Δ' *многогранника* Δ. *Тогда* Σ *разбиение регулярно.*

Доказательство. Положим $\varphi(x) = \sum x_i^2$ при $x \in \operatorname{Som}\Sigma$ и продолжим φ линейно на каждую грань. •

10.2. Полиэдральные подразделения. Пусть Σ, Σ' — полиэдральные разбиения выпуклого многогранника Δ. При $\sigma \in \Sigma$ положим $\Sigma'_\sigma = \{\sigma' \in \Sigma' \mid \sigma' \subset \sigma\}$. Скажем, что Σ' является *полиэдральным подразделением* разбиения Σ, если при всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место $[\Sigma'_\sigma] = \sigma$.

Предложение. *Пусть* Σ — *регулярное полиэдральное разбиение некоторого выпуклого многогранника* Δ *и* Σ' — *полиэдральное подразделение разбиения* Σ. *Предположим, что существует непрерывная функция* $\psi : \Delta \to \mathbf{R}$ *такая, что при всех* $\sigma \in \Sigma$ *ограничение* $\psi|_\sigma$ *является* (Σ'_σ)*-выпуклым (т.е. разбиения* Σ'_σ *„согласованно регулярны“). Тогда* Σ' *регулярно.*

Доказательство. Если функция φ является Σ-выпуклой и $0 < \varepsilon \ll 1$, то функция $\varphi + \varepsilon\psi$ является Σ'-выпуклой. •

Приложение

Relative MacMullen inequalities

by R. MacPherson and S. Orevkov

Let P be a simplicial convex polytope in $\mathbf{R}^n$. Define its *Poincaré polynomial* H_P as

$$H_P(t) = (t-1)^n + \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(t-1)^{n-i},$$

where f_i is the number of i-dimensional simplices of P.

Necessary and sufficient conditions on a polynomial

$$h_n t^n + h_{n-1} t^{n-1} + \cdots + h_1 t + h_0 \tag{1}$$

with $h_n = 1$ for it to be a Poincaré polynomial of a simplicial convex polytope, are

$$h_i = h_{n-i}, \qquad i = 0, \ldots, [n/2] \quad \text{(Dehn–Sommerville equations)}; \tag{2}$$

$$h_i \leqslant h_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, [n/2]; \tag{3}$$

$$h_{i+1} - h_i \leqslant (h_i - h_{i-1})^{\langle i \rangle}, \quad i = 1, \ldots, [n/2] - 1; \tag{4}$$

where $m^{\langle k \rangle}$ is some explicitly defined function of the integers m and k.

These conditions were conjectured by MacMullen [11] and proved by Stanley [13] (necessity) and Billera and Lee [3] (sufficiency). The proof of the necessity uses toric varieties and the hard Lefschetz theorem.

A polynomial (1) is said to be *symmetric* and *unimodal* if $h_n \geqslant 0$ and the conditions (2), (3) are satisfied.

Here we give a relative version of the inequality (3) (Theorem 1 below) for coefficients of Poincaré polynomials of a polytope and its intersections with hyperplanes in general position. The proof is based on the relative hard Lefschetz theorem of Beilinson, Bernstein, Deligne, and Gabber.

Let P be a convex simplicial polytope in $\mathbf{R}^n$ and let $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, k \leqslant n$, be a set of hyperplanes in general position. Denote $\{1, \ldots k\}$ by $\bar{k}$. For $I \subset \bar{k}$, let $\alpha_I = \bigcap_{i \in I} \alpha_i$, $P_I = P \cap \alpha_I$ (by convention, $\alpha_\varnothing = \mathbf{R}^n$ and $P_\varnothing = P$). Say that P *agrees* with α if any α_I intersects $\operatorname{Int} P$ and each face of P_I is a face of P. If P agrees with α, we define the *relative Poincaré polynomial of P with respect to α* as

$$H^{rel}_{P,\alpha}(t) = \sum_{I \subset \bar{k}} (-1)^{|I|} (t+1)^{|I|} H_{P_I}(t).$$

Theorem 1. *The polynomial $H^{rel}_{P,\alpha}(t)$ is symmetric and unimodal.*

Proof. Since the hyperplanes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ are in general position, we can chose coordinates $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbf{R}^n$ so that α_i is defined by $x_i = 0$. The condition that P agrees with α implies that the origin can be chosen inside P. Since P is simplicial, we may perturb it so that all its vertices are rational. The perturbation can be chosen so that all the incidence relations are preserved.

For any face σ of P, consider the cone obtained as the union of all rays with vertex at the origin, which intersect σ. All such cones define a fan Σ in $\mathbf{R}^n$, and let X be the toric variety over $\mathbf{C}$ associated to Σ (see [4]). Let Y be $(\mathbf{CP}^1)^k$, which we shall consider as the toric variety associated to the fan Σ_Y consisting of all coordinate octants in $\mathbf{R}^k$.

The mapping $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ defined by $y_i = x_i$ (where $(y_1, \dots, y_k)$ are coordinates in $\mathbf{R}^k$) is simplicial (sends any cone of Σ to a cone of Σ_Y). Hence, it defines a toric morphism $f : X \to Y$ (see [4]).

The structure of toric variety defines the following stratification of Y. Let $Y_0 = \mathbf{C} - \{0\}$ be the 1-dimensional and $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = \{\infty\}$ the 0-dimensional strata of $\mathbf{CP}^1$. Denote by M the set of all k-tuples $(m_1, \dots, m_k)$ where $m_i = 0, 1, 2$. For $m \in M$, we define

$$Y_m = \{(y_1, \dots, y_k\} \in Y \mid y_j = Y_{m_j} \text{ if } m_j > 0\}.$$

We apply the Decomposition theorem [2, Section 5.4.5] (cf. [9, Section 12]) to the map f. It expresses the pushforward of the intersection complex of X as the direct sum of intersection complexes of subvarieties of Y. Since P is simplicial, it follows X is rationally smooth and the intersection complex of X is the constant sheaf. By directly examining the map f, one can see that only subvarieties Y_m of Y occur, and that all the intersection complexes involved have un-twisted coefficients. Taking Poincare polynomials, we get the following statement (where the unimodality comes from the relative hard Lefschetz theorem, [see 2, Section 5.4.10]).

Lemma. *There exist symmetric unimodal polynomials φ_m with integral coefficients such that for any open $V \subset Y$,*

$$H(f^{-1}(V)) = \sum_m \varphi_m H(V \cap Y_m).$$

See [10] for a fuller exposition of the Decomposition theorem from this point of view.

Let $U \subset Y_0$ be an open disk. For $I \subset \bar{k}$, put

$$U_I = \{(y_1, \dots, y_k) \in Y \mid y_i \in U \text{ if } i \in I\}$$

Define $J(m)$ as $\{j \mid m_j = 0\}$.

Then

$$U_I \cap Y_m = \begin{cases} (\mathbf{CP}^1)^{|J(m)-I|} \times U^{|I|} & \text{if } I \subset J(m), \\ \varnothing, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The lemma applied to U_I gives us

$$H_{P_I} = H(f^{-1}(U_I)) = \sum_{m \in M} \varphi_m(t) H(U_I \cap Y_m) = \sum_{m \in M, I \subset J(m)} \varphi_m(t)(t+1)^{|J(m)-I|}.$$

For $J \in \bar{k}$, put $\varphi_J(t) = \sum_{m \in M, J(m)=J} \varphi_m(t)$. Then $H_{P_I} = \sum_{I \subset J} \varphi_J(t)(t+1)^{|J|-|I|}$, and

$$H^{\mathrm{rel}}_{P,\alpha} = \sum_{I \subset \bar{k}} (-1)^{|I|} \sum_{I \subset J \subset \bar{k}} \varphi_J(t)(t+1)^{|J|} = \sum_{J \subset \bar{k}} \varphi_J(t)(t+1)^{|J|} \sum_{I \subset J} (-1)^{|I|} = \varphi_{\varnothing}(t). \quad \bullet$$

Список литературы

[1] Арнольд В. И., *Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского – Олейник и смешанные структуры Ходжа*, Функц. анал. и его прил. **12** (1978), 1–14.

[2] Beilinson A., Bernstein J., Deligne P., *Faisceaux pervers*, Analysis and Topology on Singular Spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque **100** (1982), 5–171.

[3] Billera L. J., Lee C. W., *Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **2** (1980), 181–185.

[4] Данилов В. И., *Геометрия торических многообразий*, Успехи мат. наук **33** (1978), 85–134.

[5] Ehrhart E., *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*, Internat. Ser. Numer. Math., vol. 35, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1977.

[6] Haas B., *Real algebraic curves and combinatorial constructions*, Ph. D. Thesis, 1997.

[7] Itenberg I., *Counter-examples to Ragsdale conjecture and T-curves*, Real Algebraic Geometry and Topology (East Lansing, MI, 1993), Contemp. Math., vol. 182, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 55–72.

[8] Itenberg I., Viro O. Ya., *Готовится к печати.*

[9] MacPherson R., *Global questions in the topology of singular spaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warsaw, 1983). Vol. 1, PWN, Warsaw; North-Holland, Amsterdam etc., 1984, pp. 213–235.

[10] MacPherson R., *Intersection homology and perverse sheaves* (в печати).

[11] McMullen P., *The numbers of faces of simplicial polytopes*, Israel J. Math. **9** (1971), 559–570.

[12] Оревков С. Ю., Харламов В. М., *Порядок роста числа классов вещественных плоских алгебраических кривых при возрастании степени*, Зап. науч. семин. ПОМИ **266** (2000), 218–233.

[13] Stanley R. P., *The number of faces of a simplicial convex polytope*, Adv. in Math. **35** (1980), no. 3, 236–238.

[14] Виро О. Я., *Построение М-поверхностей*, Функц. анал. и его прил. **13** (1979), 71–72.

[15] Viro O. Ya., *Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7*, Topology (Leningrad, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1060, Springer, Berlin-New-York, 1984, pp. 187–200.

Математический институт РАН
им. В. А. Стеклова

Поступило 27 марта 2001 г.

Университет им. Поля Сабатье (Тулуза)