А. Т. Асанова, Д. С. Джумабаев, Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 3, 337–346

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 337–346

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.3

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2005 г. **А. Т. Асанова, Д. С. Джумабаев**

В области $\bar{\Omega} = [0,\omega]\times[0,T]$ рассматривается краевая задача с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + P_0(x)u(x,0) + S_2(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial x} +$$
$$+ S_1(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} + S_0(x)u(x,T) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $u = \mathrm{colon}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $n\times n$-матрицы $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_2(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$, n-вектор-функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, $[0,\omega]$ соответственно и n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Через $C(\bar{\Omega}, R^n)$ (соответственно $C([0,\omega], R^n)$, $C([0,T], R^n)$) обозначим пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $u : \bar{\Omega} \to R^n$ ($\varphi : [0,\omega] \to R^n$, $\psi : [0,T] \to R^n$) с нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \|u(x,t)\|$ ($\|\varphi\|_1 = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \|\varphi(x)\|$, $\|\psi\|_2 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|$),

$$\|u(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|, \quad \|A\|_0 = \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \|A(x,t)\| = \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|,$$

$L(X,Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов $H : X \to Y$ с индуцированной нормой, X, Y – банаховы пространства.

Функция $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\partial u(x,t)/\partial x \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\partial u(x,t)/\partial t \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\partial^2 u(x,t)/\partial t\partial x \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Нелокальные краевые задачи для систем гиперболических уравнений изучались многими авторами (отметим лишь работы [1–8], где можно найти библиографию по этим задачам). Различными методами установлены достаточные условия существования, единственности решения таких задач. В работах [9–11] задача (1)–(3) и ее частные случаи исследовались методом введения функциональных параметров. Этот метод является модификацией метода параметризации [12], разработанного для решения двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Методом введения функциональных параметров в терминах специальной матрицы, составляемой по матрицам $A(x,t)$, $P_2(x)$, $S_2(x)$, получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3) и построены примеры, показывающие существенность налагаемых требований на данные задачи. В работе [13] установлено, что эти требования являются также необходимыми для корректной разрешимости задачи (1)–(3), где $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i = 0,1$, – нулевые матрицы. В работе [14] исследована корректность начально-краевой задачи для линейного гиперболического уравнения высших порядков с двумя независимыми переменными, которую путем замены можно привести к системе вида (1). Доказана эквивалентность корректности рассматриваемой задачи единственности тривиального решения соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка, зависящего от параметра. В терминах фундаментальной системы решений обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка получены необходимые и достаточные условия корректности указанной задачи.

В настоящей работе устанавливаются коэффициентные необходимые и достаточные условия корректной, однозначной разрешимости задачи (1)–(3). Необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи (1)–(3) анонсированы в [15].

Введем новые неизвестные функции $v(x,t) = \partial u(x,t)/\partial x$, $w(x,t) = \partial u(x,t)/\partial t$ и задачу (1)–(3) сведем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t,w(x,t),u(x,t)), \tag{4}$$

$$P_2(x)v(x,0) + S_2(x)v(x,T) = \Phi(x,w(x,0),u(x,0),w(x,T),u(x,T)), \quad x \in [0,\omega], \tag{5}$$

$$u(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi, \quad w(x,t) = \dot{\psi}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}\,d\xi, \tag{6}$$

где $(x,t) \in \bar{\Omega}$, $F(x,t,w(x,t),u(x,t)) = B(x,t)w(x,t) + C(x,t)u(x,t) + f(x,t)$,

$$\Phi(x,w(x,0),u(x,0),w(x,T),u(x,T)) =$$
$$= \varphi(x) - P_1(x)w(x,0) - P_0(x)u(x,0) - S_1(x)w(x,T) - S_0(x)u(x,T).$$

В задаче (4)–(6) условие $u(0,t) = \psi(t)$ учтено в соотношениях (6). Тройка непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(x,t),u(x,t),w(x,t)\}$ называется решением задачи (4)–(6), если функция $v(x,t) \in C(\bar{\Omega},R^n)$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5), где функции $u(x,t)$, $w(x,t)$ связаны с $v(x,t)$, $\partial v(x,t)/\partial t$ функциональными соотношениями (6).

Пусть функция $u(x,t)$ – классическое решение задачи (1)–(3). Составим тройку непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(x,t),u(x,t),w(x,t)\}$, где $v(x,t) = \partial u(x,t)/\partial x$, $w(x,t) = \partial u(x,t)/\partial t$. Тогда

$$u(x,t) = u(0,t) + \int\limits_0^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}d\xi = \psi(t) + \int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi$$

и, учитывая, что $u(x,t)$ – решение задачи (1)–(3), имеем

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x},$$

$$w(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + \int\limits_0^x \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi \partial t}d\xi = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + \int\limits_0^x \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t \partial \xi}d\xi = \dot{\psi}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}d\xi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t) = A(x,t)v + F(x,t,w(x,t),u(x,t)),$$

$$P_2(x)v(x,0) + S_2(x)v(x,T) = P_2(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} + S_2(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial x} =$$
$$= \varphi(x) - P_1(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - P_0(x)u(x,0) - S_1(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} - S_0(x)u(x,T) =$$
$$= \Phi(x,w(x,0),u(x,0),w(x,T),u(x,T)),$$

т.е. составленная таким образом тройка является решением задачи (4)–(6).

Наоборот, если тройка функций $\{v(x,t), u(x,t), w(x,t)\}$ – решение задачи (4)–(6), то из функциональных соотношений (6) следует, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию $u(0,t) = \psi(t)$ и имеет непрерывные частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = v(x,t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t} d\xi = w(x,t),$$

непрерывные смешанные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}.$$

Подставляя их в (4), (5), получаем, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет системе гиперболических уравнений (1), краевым условиям (3) соответственно при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$, $x \in [0,\omega]$. Так как она также удовлетворяет начальному условию (2), то $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(3).

При фиксированных $w(x,t)$, $u(x,t)$ в задаче (4), (5) требуется найти решение из $C(\bar{\Omega}, R^n)$ однопараметрического семейства двухточечных краевых задач систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому рассмотрим задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \tag{7}$$

$$P_2(x)v(x,0) + S_2(x)v(x,T) = \Phi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{8}$$

где $F(x,t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\Phi(x) \in C([0,\omega], R^n)$. Задача (7), (8) при фиксированном $x \in [0,\omega]$ является двухточечной краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изменяя x на интервале $[0,\omega]$, получаем однопараметрическое семейство двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Непрерывная функция $v : \bar{\Omega} \to R^n$, имеющая непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t, называется решением краевой задачи (7), (8), если она удовлетворяет системе (7) и условиям (8) соответственно при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$, $x \in [0,\omega]$.

Используя матрицу $A(x,t)$ и число $h > 0$ такое, что $Nh = T$, построим следующую $nN \times nN$-матрицу

$$Q_\nu(h,x) = \begin{vmatrix} P_2(x)h & 0 & 0 & \ldots & 0 & -S_2(x)[I + D_{\nu,N}(h,x)]h \\ I + D_{\nu,1}(h,x) & -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{\nu,2}(h,x) & -I & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I + D_{\nu,N-1}(h,x) & -I \end{vmatrix},$$

где I – единичная матрица размерности n,

$$D_{\nu,r}(h,x) = \int_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(x,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \int_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1) \ldots$$

$$\ldots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1.$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (7), (8) и оценку решения дает

Теорема 1. *Пусть при некоторых $h > 0$, таких, что $Nh = T$, и ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства*

a) $\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(h,x)$, *b)* $q_\nu(h,x) = \gamma_\nu(h,x)\max(1, h\|S_2(x)\|)\left[e^{\alpha(x)h} - \sum\limits_{j=0}^{\nu}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right] \le \beta < 1$, *где* $\gamma_\nu(h,x)$ *– непрерывная на* $[0,\omega]$ *функция при фиксированных* ν, h, $\alpha(x) = \max\limits_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|$, $\beta = \text{const}$.

Тогда задача (7), (8) имеет единственное решение $v^*(x,t)$ *и для него справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}\|v^*(x,t)\| \le [k_1(x,h,\nu) + k_2(x,h,\nu)]\max(\max_{t\in[0,T]}\|F(x,t)\|, \|\Phi(x)\|), \tag{9}$$

где

$$k_1(x,h,\nu) = \frac{\gamma_\nu(h,x)}{1 - q_\nu(h,x)}\max(1, h\|S_2(x)\|)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}k_0(x,h,\nu) +$$

$$+ h\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1 + h\|S_2(x)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\},$$

$$k_0(x,h,\nu) = [e^{\alpha(x)h} - 1]\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1 + h\|S_2(x)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\}h + he^{\alpha(x)h},$$

$$k_2(x,h,\nu) = \left\{[e^{\alpha(x)h} - 1]\frac{\gamma_\nu(h,x)}{1 - q_\nu(h,x)}\max(1, h\|S_2(x)\|)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!} + 1\right\}k_0(x,h,\nu).$$

Доказательство. Существование, единственность и оценка (9) при фиксированном $x \in [0,\omega]$ следуют из теоремы 1 [12]. Непрерывность решения $v^*(x,t)$ на $\bar\Omega$ вытекает из (9) в силу непрерывности функций $k_i(x,h,\nu)$, $i = 1,2$, $\Phi(x)$ и $F(x,t)$ соответственно на $[0,\omega]$, $\bar\Omega$. Теорема доказана.

Определение 1. Краевая задача (7), (8) называется корректно разрешимой, если для любых функций $F(x,t)$, $\Phi(x)$ она имеет единственное решение $v(x,t)$ и для него справедлива оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(x,t)\| \le K(x)\max(\max_{t\in[0,T]}\|F(x,t)\|, \|\Phi(x)\|), \tag{10}$$

где $K(x)$ – непрерывная на $[0,\omega]$ функция, не зависящая от $F(x,t)$, $\Phi(x)$.

Функция $K(x,h,\nu) = k_1(x,h,\nu) + k_2(x,h,\nu)$ в неравенстве (9) ограничена на $[0,\omega]$ при фиксированных $h > 0$, $\nu = 1,2,\ldots$ и не зависит от функций $F(x,t)$, $\Phi(x)$. Поэтому при условиях теоремы 1 краевая задача (7), (8) корректно разрешима.

Теорема 2. *Задача (7), (8) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некоторых* $h > 0$, *таких, что* $Nh = T$, *и* ν, $\nu = 1,2,\ldots$, *матрица* $Q_\nu(h,x)$ *обратима для всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства a), b) теоремы 1.*

Доказательство. При выполнении условий корректная разрешимость задачи (7), (8) следует из теоремы 1.

Пусть задача (7), (8) корректно разрешима и $K(x)$ – непрерывная на $[0,\omega]$ функция, удовлетворяющая неравенству (10). Переходя в матрице $Q_\nu(h,x)$ к пределу при $\nu \to \infty$, найдем $Q_*(h,x) = \lim\limits_{\nu\to\infty} Q_\nu(h,x)$. Возьмем число $\alpha > 0$, ограниченное сверху $\|A\|_0$, и выберем число $h_0 > 0$, удовлетворяющее неравенству $(\alpha h_0)^{-1}[e^{\alpha h_0} - 1 - \alpha h_0] \le 1/6$. При каждом фиксированном $x \in [0,\omega]$, используя доказательство теоремы 3 из [12], устанавливаем обратимость матрицы $Q_*(h,x)$ для всех $h \in (0,h_0]$ и оценку $\|[Q_*(h,x)]^{-1}\| \le 2K_0/h$, где $K_0 = \max\limits_{x\in[0,\omega]} K(x)$. Принимая во внимание неравенство

$$\|Q_*(h,x) - Q_\nu(h,x)\| \le \max(1, h\|S_2\|_1)\left[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{[\alpha h]^j}{j!}\right]$$

и выбирая $\widetilde{h} \in (0, h_0]$, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{2K_0}{h}\max(1, h\|S_2\|_1)\left[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{[\alpha h]^j}{j!}\right] \le \frac{1}{3},$$

по теореме о малых возмущениях ограниченных обратимых операторов [16, с. 142] для любого $\nu \in N$ имеем $\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\| \le 3K_0/h$, $q_\nu(h,x) \le 1/2 < 1$, т.е. выполнены условия a), b) теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Определение 2. Краевая задача (1)–(3) называется корректно разрешимой, если для любых $f(x,t)$, $\psi(t)$, $\varphi(x)$ она имеет единственное классическое решение $u(x,t)$ и справедливо неравенство

$$\max\left(\|u\|_0, \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_0, \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_0\right) \le K\max(\|f\|_0, \|\psi\|_2, \|\dot{\psi}\|_2, \|\varphi\|_1), \tag{11}$$

где константа K не зависит от $f(x,t)$, $\psi(t)$, $\varphi(x)$.

Теорема 3. *Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда корректно разрешима задача (7), (8).*

Доказательство. Пусть задача (1)–(3) корректно разрешима. Тогда для любых функций $f(x,t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\varphi(x) \in C([0,\omega], R^n)$, $\psi(t) = 0$, $t \in [0,T]$, существует единственное решение задачи (1)–(3) и для него справедливо неравенство

$$\max\left(\|u\|_0, \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_0, \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_0\right) \le K\max(\|f\|_0, \|\varphi\|_1).$$

Из наших предположений следует оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right\|_0 \le K_1\max(\|f\|_0, \|\varphi\|_1),$$

$K_1 = (\|A\|_0 + \|B\|_0 + \|C\|_0)K + 1$. Поэтому существуют операторы $U \in L(C(\bar{\Omega}, R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, $V \in L(C([0,\omega], R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, определяющие решение задачи (1)–(3) – функцию $u(x,t) = Uf(x,t) + V\varphi(x)$, и $U_i \in L(C(\bar{\Omega}, R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, $V_i \in L(C([0,\omega], R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, $i = 1, 2$, где операторы

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x}\circ U, \quad U_2 = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\circ U, \quad V_1 = \frac{\partial}{\partial x}\circ V, \quad V_2 = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\circ V$$

являются суперпозицией операторов дифференцирования и U, V. Возьмем пару функций $(F(x,t), \Phi(x))$, принадлежащих прямой сумме двух пространств $Z_1 = C(\bar{\Omega}, R^n) \dot{+} C([0,\omega], R^n)$ [16, с. 162] с нормой $\|(F,\Phi)\|_{Z_1} = \max(\|F\|_0, \|\Phi\|_1)$. Пару функций $(f(x,t), \varphi(x))$ из Z_1 определим из систем функциональных уравнений

$$B(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + C(x,t)u(x,t) + f(x,t) = F(x,t), \tag{12}$$

$$\varphi(x) - P_1(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - P_0(x)u(x,0) - S_1(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} - S_0(x)u(x,T) = \Phi(x), \tag{13}$$

где $u(x,t)$ – решение задачи (1)–(3) при функциях $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(t) = 0$. Так как

$$u(x,t) = 0 + \int_0^x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}d\xi = \int_0^x [U_1 f(\xi,t) + V_1\varphi(\xi)]d\xi,$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 + \int_0^x \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi \partial t}d\xi = \int_0^x \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t \partial \xi}d\xi = \int_0^x [U_2 f(\xi,t) + V_2\varphi(\xi)]d\xi,$$

то, подставляя их в (5), (6), получаем систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно пары функций $(f(x,t),\varphi(x))$

$$f(x,t)+B(x,t)\int_0^x[U_2f(\xi,t)+V_2\varphi(\xi)]d\xi+C(x,t)\int_0^x[U_1f(\xi,t)+V_1\varphi(\xi)]d\xi=F(x,t), \tag{14}$$

$$\varphi(x)-P_1(x)\int_0^x[U_2f(\xi,t)+V_2\varphi(\xi)]|_{t=0}d\xi-S_1(x)\int_0^x[U_2f(\xi,t)+V_2\varphi(\xi)]|_{t=T}d\xi-$$

$$-P_0(x)\int_0^x[U_1f(\xi,t)+V_1\varphi(\xi)]|_{t=0}d\xi-S_0(x)\int_0^x[U_1f(\xi,t)+V_1\varphi(\xi)]|_{t=T}d\xi=\Phi(x), \tag{15}$$

$(x,t)\in\bar\Omega$, $x\in[0,\omega]$. При изменении $t\in[0,T]$ получаем однопараметрическое семейство систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Взяв за начальное приближение пару $(F(x,t),\Phi(x))\in Z_1$, последующие приближения определим из систем уравнений

$$f^{(k)}(x,t)=$$

$$=F(x,t)-B(x,t)\int_0^x[U_2f^{(k-1)}(\xi,t)+V_2\varphi^{(k-1)}(\xi)]d\xi-C(x,t)\int_0^x[U_1f^{(k-1)}(\xi,t)+V_1\varphi^{(k-1)}(\xi)]d\xi,$$

$$\varphi^{(k)}(x)=\Phi(x)+P_1(x)\int_0^x[U_2f^{(k-1)}(\xi,t)+V_2\varphi^{(k-1)}(\xi)]|_{t=0}d\xi+$$

$$+S_1(x)\int_0^x[U_2f^{(k-1)}(\xi,t)+V_2\varphi^{(k-1)}(\xi)]|_{t=T}d\xi+P_0(x)\int_0^x[U_1f^{(k-1)}(\xi,t)+V_1\varphi^{(k-1)}(\xi)]|_{t=0}d\xi+$$

$$+S_0(x)\int_0^x[U_1f^{(k-1)}(\xi,t)+V_1\varphi^{(k-1)}(\xi)]|_{t=T}d\xi,\quad k=1,2,\ldots$$

Несложно установить, что последовательность пар $(f^{(k)}(x,t),\varphi^{(k)}(x))$ при $k\to\infty$ в норме Z_1 сходится к единственному решению системы (14), (15) – паре $(f(x,t),\varphi(x))\in Z_1$ – и справедлива оценка

$$\max(\|f\|_0,\|\varphi\|_1)\le K_2\max(\|F\|_0,\|\Phi\|_1), \tag{16}$$

где $K_2=\exp\{2\max(\|B\|_0K_1+\|C\|_0K,\ [\|P_1\|_1+\|S_1\|_1]K_1+[\|P_0\|_1+\|S_0\|_1]K)\omega\}$.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1)–(3) при найденной паре функций $(f(x,t),\varphi(x))$. Тогда функция $v(x,t)=\partial u(x,t)/\partial x$ будет решением задачи (7), (8) при выбранной паре $(F(x,t),\Phi(x))$. Действительно, в силу (3), (12), (13) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}=A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+C(x,t)u+f(x,t)=A(x,t)v+F(x,t),$$

$$P_2(x)v(x,0)+S_2(x)v(x,T)=P_2(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}+S_2(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial x}=\Phi(x)$$

при всех $(x,t)\in\bar\Omega$, $x\in[0,\omega]$, причем из корректной разрешимости задачи (1)–(3) и неравенства (16) следует оценка

$$\|v\|_0=\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_0\le K\max(\|f\|_0,\|\varphi\|_1)\le KK_2\max(\|F\|_0,\|\Phi\|_1). \tag{17}$$

Установим единственность решения задачи (7), (8). Пусть $v(x,t)$ – решение задачи (7), (8) при $F(x,t)=0$, $\Phi(x)=0$. С помощью функции $v(x,t)$ и матриц $B(x,t)$, $C(x,t)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$ построим функции

$$\widetilde{u}(x,t)=\int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi,\quad \widetilde{f}(x,t)=-B(x,t)\int\limits_0^x \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}d\xi-C(x,t)\int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi,$$

$$\widetilde{\varphi}(x)=P_1(x)\int\limits_0^x \frac{\partial v(\xi,0)}{\partial t}d\xi+S_1(x)\int\limits_0^x \frac{\partial v(\xi,T)}{\partial t}d\xi+P_0(x)\int\limits_0^x v(\xi,0)d\xi+S_0(x)\int\limits_0^x v(\xi,T)d\xi.$$

Покажем, что функция $\widetilde{u}(x,t)$ является решением задачи (1)–(3) при $f(x,t)=\widetilde{f}(x,t)$, $\varphi(x)=\widetilde{\varphi}(x)$, $\psi(t)=0$. Из определения функции $\widetilde{u}(x,t)$ следует существование непрерывных частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial x}=v(x,t),\quad \frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial t}=\int\limits_0^x \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}d\xi \quad \text{для всех } (x,t)\in\bar{\Omega} \text{ и } \widetilde{u}(0,t)=0 \text{ при } t\in[0,T].$$

Учитывая, что $v(x,t)$ – решение задачи (7), (8) при $F(x,t)=0$, $\Phi(x)=0$, имеем

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}(x,t)}{\partial t\partial x}=\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=A(x,t)v(x,t)=$$

$$=A(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial x}+B(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial t}+C(x,t)\widetilde{u}(x,t)-B(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial t}-C(x,t)\widetilde{u}(x,t)=$$

$$=A(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial x}+B(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial t}+C(x,t)\widetilde{u}(x,t)-B(x,t)\int\limits_0^x \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}d\xi-C(x,t)\int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi=$$

$$=A(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial x}+B(x,t)\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial t}+C(x,t)\widetilde{u}(x,t)+\widetilde{f}(x,t),$$

$$P_2(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,0)}{\partial x}+S_2(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,T)}{\partial x}=P_2(x)v(x,0)+S_2(x)v(x,T)=0=-P_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,0)}{\partial t}-$$

$$-S_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,T)}{\partial t}-P_0(x)\widetilde{u}(x,0)-S_0(x)\widetilde{u}(x,T)+P_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,0)}{\partial t}+S_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,T)}{\partial t}+P_0(x)\widetilde{u}(x,0)+$$

$$+S_0(x)\widetilde{u}(x,T)=-P_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,0)}{\partial t}-S_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,T)}{\partial t}-P_0(x)\widetilde{u}(x,0)-S_0(x)\widetilde{u}(x,T)+$$

$$+P_1(x)\int\limits_0^x \frac{\partial v(\xi,0)}{\partial t}d\xi+S_1(x)\int\limits_0^x \frac{\partial v(\xi,T)}{\partial t}d\xi+P_0(x)\int\limits_0^x v(\xi,0)d\xi+S_0(x)\int\limits_0^x v(\xi,T)d\xi=$$

$$=-P_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,0)}{\partial t}-S_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(x,T)}{\partial t}-P_0(x)\widetilde{u}(x,0)-S_0(x)\widetilde{u}(x,T)+\widetilde{\varphi}(x),$$

т.е. функция $\widetilde{u}(x,t)$ является решением задачи (1)–(3) при $f(x,t)=\widetilde{f}(x,t)$, $\varphi(x)=\widetilde{\varphi}(x)$, $\psi(t)=0$.

Так как

$$v(\xi,t)=\frac{\partial\widetilde{u}(\xi,t)}{\partial\xi}=U_1\widetilde{f}(\xi,t)+V_1\widetilde{\varphi}(\xi),\qquad \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2\widetilde{u}(\xi,t)}{\partial t\partial\xi}=U_2\widetilde{f}(\xi,t)+V_2\widetilde{\varphi}(\xi),$$

то пара функций $(\widetilde{f}(x,t),\widetilde{\varphi}(x))$, по построению принадлежащих Z_1, является решением однородной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\widetilde{f}(x,t)+B(x,t)\int\limits_0^x[U_2\widetilde{f}(\xi,t)+V_2\widetilde{\varphi}(\xi)]d\xi+C(x,t)\int\limits_0^x[U_1\widetilde{f}(\xi,t)+V_1\widetilde{\varphi}(\xi)]d\xi=0,\quad (x,t)\in\bar{\Omega},\tag{18}$$

$$\widetilde{\varphi}(x)-P_1(x)\int\limits_0^x[U_2\widetilde{f}(\xi,t)+V_2\widetilde{\varphi}(\xi)]|_{t=0}d\xi-S_1(x)\int\limits_0^x[U_2\widetilde{f}(\xi,t)+V_2\widetilde{\varphi}(\xi)]|_{t=T}d\xi-$$

$$-P_0(x)\int\limits_0^x[U_1\widetilde{f}(\xi,t)+V_1\widetilde{\varphi}(\xi)]|_{t=0}d\xi-S_0(x)\int\limits_0^x[U_1\widetilde{f}(\xi,t)+V_1\widetilde{\varphi}(\xi)]|_{t=T}d\xi=0,\quad x\in[0,\omega].\tag{19}$$

Поскольку система уравнений (18), (19) в пространстве Z_1 имеет только нулевое решение, получаем, что $\widetilde{f}(x,t)=0$, $\widetilde{\varphi}(x)=0$ и

$$v(x,t)=\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial\xi}=U_1\widetilde{f}(x,t)+V_1\widetilde{\varphi}(x)=U_10+V_10=0$$

для всех $(x,t)\in\bar{\Omega}$. Таким образом, из корректной разрешимости задачи (1)–(3) следует корректная разрешимость задачи (7), (8). Теперь предположим, что задача (7), (8) корректно разрешима. В силу эквивалентности задач (1)–(3) и (4)–(6) достаточно показать корректную разрешимость задачи (4)–(6).

Решение задачи (4)–(6) – тройку функций $\{v(x,t),u(x,t),w(x,t)\}$ – найдем методом последовательных приближений. За нулевое приближение по $u(x,t)$, $w(x,t)$ возьмем соответственно $\psi(t)$, $\dot{\psi}(t)$, а $v^{(0)}(x,t)$ найдем как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(x,t)v+B(x,t)\dot{\psi}(t)+C(x,t)\psi(t)+f(x,t),\quad (x,t)\in\bar{\Omega},\tag{20}$$

$$P_2(x)v(x,0)+S_2(x)v(x,T)=\varphi(x)-P_1(x)\dot{\psi}(0)-P_0(x)\psi(0)-S_1(x)\dot{\psi}(T)-S_0(x)\psi(T),\quad x\in[0,\omega].\tag{21}$$

По предположению задача (20), (21) имеет единственное решение $v^{(0)}(x,t)$ и

$$\|v^{(0)}\|_0\le K_0\max\{\|B\dot{\psi}+C\psi+f\|_0,\|\varphi-P_1\dot{\psi}(0)-P_0\psi(0)-S_1\dot{\psi}(T)-S_0\psi(T)\|_1\},$$

$$\|\partial v^{(0)}/\partial t\|_0\le(\|A\|_0K_0+1)\max\{\|B\dot{\psi}+C\psi+f\|_0,\|\varphi-P_1\dot{\psi}(0)-P_0\psi(0)-S_1\dot{\psi}(T)-S_0\psi(T)\|_1\}.$$

Если известны $u^{(k-1)}(x,t)$, $w^{(k-1)}(x,t)$, то $v^{(k)}(x,t)$ найдем, решая задачу (4), (5), где в правых частях уравнения $w(x,t)=w^{(k-1)}(x,t)$, $u(x,t)=u^{(k-1)}(x,t)$, $k=1,2,\ldots$ При найденном $v^{(k)}(x,t)$ следующие приближения по $u(x,t)$, $w(x,t)$ определим из соотношений (6)

$$u^{(k)}(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x v^{(k)}(\xi,t)d\xi,\quad w^{(k)}(x,t)=\dot{\psi}(t)+\int\limits_0^x\frac{\partial v^{(k)}(\xi,t)}{\partial t}d\xi.$$

Составим разности $\Delta v^{(k)}(x,t)=v^{(k)}(x,t)-v^{(k-1)}(x,t)$, $\Delta u^{(k)}(x,t)=u^{(k)}(x,t)-u^{(k-1)}(x,t)$, $\Delta w^{(k)}(x,t)=w^{(k)}(x,t)-w^{(k-1)}(x,t)$ и для них с помощью корректной разрешимости задачи (7), (8) установим оценки

$$\max(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta v^{(k+1)}(x,t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\partial\Delta v^{(k+1)}(x,t)/\partial t\|)\le$$

$$\leq \max(K_0, \|A\|_0 K_0 + 1)(\|B\|_0 + \|C\|_0) \max(\max_{t\in[0,T]} \|\Delta w^{(k)}(x,t)\|, \max_{t\in[0,T]} \|\Delta u^{(k)}(x,t)\|), \tag{22}$$

$$\max(\max_{t\in[0,T]} \|\Delta w^{(k)}(x,t)\|, \max_{t\in[0,T]} \|\Delta u^{(k)}(x,t)\|) \leq$$

$$\leq \int_0^x \max(\max_{t\in[0,T]} \|\Delta v^{(k)}(\xi,t)\|, \max_{t\in[0,T]} \|\partial \Delta v^{(k)}(\xi,t)/\partial t\|)\, d\xi. \tag{23}$$

Отсюда следует основное неравенство

$$\max(\max_{t\in[0,T]} \|\Delta v^{(k+1)}(x,t)\|, \max_{t\in[0,T]} \|\partial \Delta v^{(k+1)}(x,t)/\partial t\|) \leq$$

$$\leq \max(K_0, \|A\|_0 K_0 + 1)(\|B\|_0 + \|C\|_0) \int_0^x \max(\max_{t\in[0,T]} \|\Delta v^{(k)}(\xi,t)\|, \max_{t\in[0,T]} \|\partial \Delta v^{(k)}(\xi,t)/\partial t\|) d\xi. \tag{24}$$

Из (24) вытекает равномерная сходимость последовательностей $\{v^{(k)}(x,t)\}$, $\{\partial v^{(k)}(x,t)/\partial t\}$ в норме пространства $C(\bar{\Omega}, R^n)$ при $k \to \infty$. Тогда равномерная сходимость последовательностей $\{u^{(k)}(x,t)\}$, $\{w^{(k)}(x,t)\}$ вытекает из оценки (23). При этом предельные функции $v^*(x,t)$, $\{\partial v^*(x,t)/\partial t\}, u^*(x,t), w^*(x,t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$ и тройка функций $\{v^*(x,t), u^*(x,t), w^*(x,t)\}$ является решением задачи (4)–(6). Используя оценки (22)–(24), получаем

$$\max(\|v^*\|_0, \|u^*\|_0, \|w^*\|_0) \leq \widetilde{K} \max(\|f\|_0, \|\psi\|_2, \|\dot{\psi}\|_2, \|\varphi\|_1), \tag{25}$$

где

$$\widetilde{K} = \max(1 + e^{\widetilde{K}_0}[\widetilde{K}_0 + \omega \max(K_0, \alpha K_0 + 1)], e^{\widetilde{K}_0}),$$

$$\widetilde{K}_0 = \omega \max(K_0, \alpha K_0 + 1) \max[\|B\|_0 + \|C\|_0, \|P_1\|_1 + \|S_1\|_1 + \|P_0\|_1 + \|S_0\|_1]$$

и не зависит от f, ψ, φ.

Пусть теперь тройка $\{\widetilde{v}(x,t), \widetilde{u}(x,t), \widetilde{w}(x,t)\}$ – решение задачи (4)–(6), где $f(x,t) = 0$, $\psi(t) = 0$, $\varphi(x) = 0$ для всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$. Тогда из корректной разрешимости задачи (7), (8) и соотношений (6) вытекают равенства $\widetilde{v}(x,t) = 0$, $\widetilde{u}(x,t) = 0$, $\widetilde{w}(x,t) = 0$ для всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$. Отсюда и из оценки (25) следует корректная разрешимость задачи (1)–(3). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некоторых* $h > 0$, *таких, что* $Nh = T$, *и* ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, *матрица* $Q_\nu(h,x)$ *обратима для всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства a), b) теоремы 1.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (1)–(3) корректно разрешима. Тогда из теоремы 3 следует корректная разрешимость задачи (7), (8). Используя теорему 2, устанавливаем существование чисел $h > 0$, ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, при которых матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства a), b) теоремы 1.

Достаточность следует из теорем 2 и 3. Теорема 4 доказана.

Через $C^{(1+1)}(\bar{\Omega}, R^n)$ обозначим пространство функций $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющих непрерывные на $\bar{\Omega}$ частные производные $\partial u(x,t)/\partial x$, $\partial u(x,t)/\partial t$, $\partial^2 u(x,t)/\partial t \partial x$ с нормой

$$\|u\|_{(1+1)} = \max(\|u\|_0, \|\partial u/\partial x\|_0, \|\partial u/\partial t\|_0, \|\partial^2 u/\partial t \partial x\|_0),$$

а через $C^{(1)}([0,T], R^n)$ – пространство дифференцируемых функций $\psi : [0,T] \to R^n$, принадлежащих $C([0,T], R^n)$ вместе со своей производной $\dot{\psi}(t)$, и с нормой $\|\psi\|_{(1)} = \max(\|\psi\|_2, \|\dot{\psi}\|_2)$.

Лемма. *Если краевая задача (1)–(3) для любых функций* $f(x,t)$, $\psi(t)$, $\varphi(x)$ *имеет единственное решение, то она корректно разрешима.*

Доказательство. Если функция $u(x,t) \in C^{(1+1)}(\bar{\Omega}, R^n)$ удовлетворяет краевой задаче (1)–(3), то из наших предположений следует, что ее частные производные $\partial u(x,t)/\partial x$,

$\partial u(x,t)/\partial t$, $\partial^2 u(x,t)/\partial t\partial x$ принадлежат $C(\bar{\Omega}, R^n)$. Поэтому краевая задача (1)–(3) эквивалентна операторному уравнению $U_3 u = \tilde{F}$, где $U_3 : C^{(1+1)}(\bar{\Omega}, R^n) \to Z_3$, $Z_3 = Z_2 \dot{+} C([0,\omega], R^n)$, $Z_2 = C(\bar{\Omega}, R^n) \dot{+} C^{(1)}([0,T], R^n)$, и определяется равенством

$$U_3 = \begin{bmatrix} I\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial x} - A(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x} - B(x,t)\dfrac{\partial}{\partial t} - C(x,t) \\ J^0 \\ P_2(x)J_0\dfrac{\partial}{\partial x} + P_1(x)J_0\dfrac{\partial}{\partial t} + P_0(x)J_0 + S_2(x)J_T\dfrac{\partial}{\partial x} + S_1(x)J_T\dfrac{\partial}{\partial t} + S_0(x)J_T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{F}(x,t) = [f(x,t), \psi(t), \varphi(x)]^{\mathrm{T}}.$$

Здесь

$$J^0 : C(\bar{\Omega}, R^n) \to C([0,T], R^n), \quad J_0 : C(\bar{\Omega}, R^n) \to C([0,\omega], R^n), \quad J_T : C(\bar{\Omega}, R^n) \to C([0,\omega], R^n)$$

и определяются равенствами $J^0 u(x,t) = u(0,t)$, $J_0 u(x,t) = u(x,0)$, $J_T u(x,t) = u(x,T)$. По условию леммы оператор U_3 имеет обратный U_3^{-1} и этот оператор определен на всем банаховом пространстве Z_3. Применяя теорему Банаха [16, с. 134], устанавливаем ограниченность оператора $U_3^{-1} : Z_3 \to C^{(1+1)}(\bar{\Omega}, R^n)$, откуда следует корректная разрешимость задачи (1)–(3). Лемма доказана.

Имеет место

Следствие. *Условия теоремы 4 необходимы и достаточны для однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(3).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cesari L.* // Тр. междунар. симп. по нелинейным колебаниям. Т. 2. Киев, 1961. С. 440–457.
2. *Aziz A.K.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. № 3. P. 557–566.
3. *Vejvoda O., Herrmann L., Lovicar V.* et al. Partial differential equations: time – periodic solutions. Hague; Boston; London, 1982.
4. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984.
5. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев, 1991.
6. *Кигурадзе Т.И.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 281–297.
7. *Kiguradze T.* // Memoirs Differential Equations and Mathematical Physics. 1994. V. 1. P. 1–144.
8. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 1998. Т. 222.
9. *Джумабаев Д.С., Асанова А.Т.* // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2001. № 1. С. 23–29.
10. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 11. С. 1673–1685.
11. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1343–1354.
12. *Джумабаев Д.С.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 1. С. 50–66.
13. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2002. № 3. С. 20–26.
14. *Кигурадзе Т.И., Кусано Т.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 4. С. 516–526.
15. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 3. С. 295–297.
16. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.

Институт математики Министерства образования и науки
Республики Казахстан, г. Алматы

Поступила в редакцию
05.09.2003 г.