Ya. V. Slavolyubova, Application of computer mathematics systems for solving problems of contact geometry, *Comp. nanotechnol.*, 2022, Volume 9, Issue 3, 37–44

DOI: 10.33693/2313-223X-2022-9-3-37-44

1.2.2 ***МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ***

MATHEMATICAL MODELING, NUMERICAL METHODS AND COMPLEX PROGRAMS

DOI: 10.33693/2313-223X-2022-9-3-37-44

Применение систем компьютерной математики при решении задач контактной геометрии

Я.В. Славолюбова ©

Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, г. Кемерово, Российская Федерация

E-mail: slavolubovayav@kuzstu.ru

Аннотация. *Задача.* Развитие исследований в области контактной геометрии невозможно без применения систем компьютерной математики. Проведение вычислительного эксперимента позволяет получить не только численные результаты, аналитические выражения, но и выделить верное и перспективное направление в получении теоретических результатов. Цель работы: рассмотреть применение систем компьютерной математики к решению задач контактной геометрии. Достижение поставленных целей в работе осуществляется на основе комплексного использования методов компьютерной алгебры, математического моделирования, теории дифференциальной геометрии и тензорного анализа. *Выводы.* В данной работе представлены схемы исследований контактных групп Ли произвольной нечетной размерности. Разработаны алгоритм и комплекс программ в системе компьютерной математики Maxima для моделирования доказательства существования сасакиевых структур. *Практическое значение.* Данный алгоритм может быть использован для исследования контактных структур на однородных пространствах. Предложенные схемы представляет научно-практический интерес для специалистов в области дифференциальной геометрии и методов ее применений, а также для решения задач разработки квантовых вычислительных устройств.

Ключевые слова: системы компьютерной математики, контактная геометрия, контактные структуры, группы Ли

ССЫЛКА НА СТАТЬЮ: Славолюбова Я.В. Применение систем компьютерной математики при решении задач контактной геометрии // Computational nanotechnology. 2022. Т. 9. № 3. С. 37–44. DOI: 10.33693/2313-223X-2022-9-3-37-44

DOI: 10.33693/2313-223X-2022-9-3-37-44

Application of Computer Mathematics Systems for Solving Problems of Contact Geometry

Ya.V. Slavolyubova ©

T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russian Federation

E-mail: slavolubovayav@kuzstu.ru

Abstract. *Task.* The development of research in the field of contact geometry is impossible without the use of computer mathematics systems. Carrying out a computational experiment allows not only obtaining numerical results, analytical expressions, but also highlighting the correct and promising direction in obtaining theoretical results. Purpose of the work: to consider the application of computer mathematics systems to solving problems of contact geometry. Achieving the goals set in the work is carried out on the basis of the integrated use of computer algebra methods, mathematical modeling, the theory of differential geometry and tensor analysis. *Findings.* In this paper, we present schemes for studying contact Lie groups of arbitrary odd dimension. An algorithm and a set of programs have been developed in the Maxima computer mathematics system for modeling the proof of the existence of Sasakian structures. *Practical value.* This algorithm can be used to study contact structures on homogeneous spaces. The proposed schemes are of scientific and practical interest for specialists in the field of differential geometry and methods of its applications, as well as for solving the problems of developing quantum computing devices.

Key words: computer mathematics systems, contact geometry, contact structures, Lie groups

FOR CITATION: Slavolyubova Ya.V. Application of Computer Mathematics Systems for Solving Problems of Contact Geometry. *Computational Nanotechnology*. 2022. Vol. 9. No. 3. Pp. 37–44. (In Rus.) DOI: 10.33693/2313-223X-2022-9-3-37-44

ВВЕДЕНИЕ

Современная математика является основой всех точных и прикладных наук. Контактная геометрия имеет общемировое значение, вызывает интерес зарубежных и отечественных ученых [Dacko, 2018; Marín-Salvador, 2021; Becker, Min, Dattin, Teruya, 2022], и применяется при решении задач классической и квантовой механики, гидромеханики, теории сплошных сред, полной интегрируемости уравнений с частными производными, теории относительности, электродинамики, геометродинамики, теории струн и др. Объекты контактной геометрии выступают в качестве геометрического инструментария при решении и исследовании различных прикладных задач. Контактная геометрия позволяет создавать теоретические модели для проектирования множества технологических систем в промышленности. Также в экономических моделях при расчете инфраструктуры туристических комплексов в условиях горной местности при сильно искривленном рельефе используются лежандровы геодезические на трехмерных контактных многообразиях.

1. ОБЗОР СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Развитие исследований в области контактной геометрии, и любой другой науки, невозможно без применения систем компьютерной математики [Славолюбова, 2014, 2018; Киренберг, Славолюбова, 2019]. Проведение вычислительного эксперимента позволяет получить не только численные результаты, аналитические выражения, но и выделить верное и перспективное направление в получение теоретических результатов. Наиболее распространенными системами компьютерной математики являются следующие: Matlab, Mathcad, Maple, Maxima и Mathematica. Выбор одной из указанных систем осуществляется в зависимости от круга решаемых задач. Выполним их краткий обзор.

Система Matlab в большей мере имеет популярность в области решений задач технических вычислений, численных решений дифференциальных уравнений, визуализации полученных результатов.

Система Maple позволяет проводить аналитические (символьные) вычисления. Инструменты системы Maple ориентированы в основном на профессиональных математиков ввиду того, что требуются знания методов решения, заложенных в используемых функциях. Кроме средств символьных вычислений Maple содержит немало средств для численных решений прикладных задач, включающих в себя более 4000 специализированных процедур и функций.

Система Mathematica, как и Maple, также позволяет проводить аналитические вычисления, решать разный спектр прикладных задач и визуализировать полученные результаты. Функциональные возможности системы включают даже синтезирование звука. К недостаткам системы можно отнести требование от пользователя знания достаточно необычного языка программирования.

Система Mathcad применима в основном для численного решения математических задач, для решения задач инженерного характера. На основе данной системы можно получить результат без углубления в математическую суть задач.

Система Maxima позволяет проводить, как численные, так и аналитические расчеты. Данная система полезна в компьютерных исследованиях и разработке алгоритмов, наделена средствами визуализации [Дьяконов, 2014].

При решении задач контактной геометрии наиболее лучшими вариантами являются системы Maxima и Maple.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ КОНТАКТНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В основе методов исследования лежат теоретические положения, приведенные в работах [Diatta, 2008; Blair, 2010]. Напомним определение контактного многообразия [Blair, 2010]. Контактным многообразием называют многообразие M^{2n+1} класса гладкости C^{∞}, если на нем определена дифференциальная 1-форма η: $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ для всех векторных полей X на M^{2n+1}. Форму η называют контактной формой или контактной структурой. Контактное многообразие имеет поле Риба ξ: $\eta(\xi) = 1$, $d\eta(\xi, X) = 0$, $\forall X \in TM^{2n+1}$. Исследование контактных многообразий связано с изучением следующих тензоров:

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi;$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi X}\eta)X - (L_{\varphi Y}\eta)Y;$$

$$N^{(3)}(X) = (L_{\xi}\varphi)X; \quad N^{(4)}(X, Y) = (L_{\xi}\eta)X.$$

В случае рассмотрения в качестве многообразия группы Ли естественным является рассмотрение левоинвариантных контактных структур. В ходе изучения свойств и геометрических характеристик левоинвариантных контактных структур используется пакет Maxima, который позволяет оперировать матрицами и тензорами, решать задачи линейной алгебры.

3. РАЗРАБОТАННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТАКТНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В работе [Diatta, 2008] приведены методы контактизации и классификация контактных групп Ли (G, η), G – группа Ли нечетной размерности, η – левоинвориантная контактная структура. Примером контактной структуры на 3-мерном евклидовом пространстве является 1-форма $\eta = dz - x\,dy$ [Blair, 2010]. На контактных группах Ли [Славолюбова, 2018] можно задать левоинвариантные контактные метрические структуры (η, ξ, φ, g), которые могут принадлежать одному или нескольким классам контактных структур: эйнштейновым, η-эйнштейновым, K-контактным, сасакиевым структурам, или не принадлежать ни оному из перечисленных классов. В случае групп Ли касательное пространство в единице группы Ли G изоморфно ее алгебре Ли $L(G)$. Любая левоинвариантная 1-форма η на группе Ли определена своим значением в единице группы Ли. Поэтому достаточно рассмотреть контактную форму на касательном пространстве в единице к группе Ли, а именно на алгебре Ли. То есть проводить исследование контактных структур можно на уровне алгебр Ли, а результаты для групп Ли получаются левыми сдвигами данных структур из единицы по соответствующим группам Ли. Наибольший интерес вызывают класс структур Сасаки, т.к. они непосредственно связаны с интегрируемыми почти комплексными структурами.

Рассмотрим применение систем компьютерной математики к решению задач контактной геометрии.

Для решения задачи о существовании структуры Сасаки на группе Ли G необходимо реализовать схему (рис. 1), содержащую описание *математической модели* задачи, *метода решения* и *техники проведения расчетов*.

Чтобы решить задачу исследования (η, ξ, φ, g)-структур Сасаки необходимо реализовать схему (рис. 2), содержащую описание *математической модели* задачи, *метода решения* и *техники проведения расчетов*.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Приведем основные результаты вычислений и проведем их анализ.

Р е з у л ь т а т 1. В качестве объекта исследования рассмотрим контактную алгебру Ли $L(G) = \nu_{4,1} \times \mathbf{R}$ [Diatta, 2008] с контактной формой в адаптированном базисе $\{E_i\}$ $(i = 1, \dots, 5)$: $\eta = E^5$. Ненулевые структурные константы алгебры в базисе $\{E_i\}$: $C^3_{12} = 1$, $C^5_{12} = -1$, $C^1_{14} = -1$, $C^3_{34} = -1$, $C^5_{34} = 1$.

Параметры b_{ij} при выполнении условий ассоциированности и почти комплексности (в ходе применения схемы рис. 1) ассоциированного аффинора

$$\varphi = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 \\ b_{21} & -b_{11} & b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{24} & -b_{14} & b_{33} & b_{34} & 0 \\ -b_{23} & b_{13} & b_{43} & -b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют системе уравнений (1):

$$\begin{cases} b_{11}^2 + b_{12}b_{21} + b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23} = -1; \\ b_{12}b_{23} + b_{13}\left(b_{11} + b_{33}\right) + b_{14}b_{43} = 0; \\ b_{12}b_{24} + b_{13}b_{34} + b_{14}\left(b_{11} - b_{33}\right) = 0; \\ b_{13}b_{21} - b_{23}\left(b_{11} - b_{33}\right) + b_{24}b_{43} = 0; \\ b_{14}b_{21} + b_{23}b_{34} - b_{24}\left(b_{11} + b_{33}\right) = 0; \\ b_{33}^2 + b_{34}b_{43} + b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23} = -1. \end{cases} \quad (1)$$

Задача
[A task]:

Решить вопрос существования структуры Сасаки на нечетномерной группе Ли G
[Solve the question of the existence of a Sasaki structure on an odd-dimensional Lie group G]

Математическая модель
[Mathematical model]:

G – контактная группа Ли произвольной нечетной размерности n с контактной формой η
[G *is* a Lie contact group of arbitrary odd dimension n with contact form η];

J – ассоциированная почти комплексная структура на симплектической алгебре Ли $L(G)\times\mathbf{R}$
[J is the associated almost complex structure on the symplectic Lie algebra Ли $L(G)\times\mathbf{R}$];

$\varphi = J_G$, φ – ассоциированный аффинор на группе Ли G
[$\varphi = J_G$, φ is the associated affinor on the Lie group G];

C_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $L(G)$, $i, j, k = 1, \ldots, n$
[C_{ij}^k are the structure constants of the Lie algebra $L(G)$, $i, j, k = 1, \ldots, n$].

Требование условия Сасаки: обращение в нуль всех компонентов тензора Нейенхейса, $N_{Jij}^k = 0$, $i, j, k = 1, \ldots, n$
[Requirement of the Sasaki condition: vanishing of all components of the Nijenhuis tensor, $N_{Jij}^k = 0$, $i, j, k = 1, \ldots, n$].

Применение систем аналитических вычислений
[Application of systems of analytical calculations]:

1. Загрузить массивы: структурных констант C_{ij}^k, начальной естественной почти комплексной структуры J_0, многопараметрического семейства ассоциированных почти комплексных структур J_b общего вида
[Load arrays: structural constants C_{ij}^k, initial natural almost complex structure J_0, multiparameter family of associated almost complex J_b general structures].
2. Определить параметры b_{ij} из условия ассоциированности
[Determine the parameters b_{ij} from the association condition]:
$$d\eta J_{ij} = J_i^k d\eta_{kj} + d\eta_{is} J_j^s = 0, \quad i, j, k, s = 1, \ldots, n.$$
3. Определить параметры b_{ij} из условий интегрируемости и почти комплексности
[Determine the parameters b_{ij} from the conditions of integrability and almost complexity]:
$$N_{ij}^k = J_i^l J_j^m C_{lm}^k - J_j^m C_{im}^l J_l^k - J_i^l C_{lj}^m J_m^k - C_{ij}^k = 0, \quad i, j, k, l, m = 1, \ldots, n.$$
$$J^2 = -I\colon b_i^p b_s^i = -\delta_s^p, \quad p, s = 1, \ldots, n-1, \quad i = 1, \ldots, n.$$
4. Вывести матрицу J, в случае ее существования существует структура Сасаки
[Output the matrix J, if it exists, there is a Sasaki structure].

Рис. 1. Схема исследования группы Ли G^{2n+1}
Fig. 1. Scheme of studying the Lie group G^{2n+1}

ISSN 2313-223X Print
ISSN 2587-9693 Online

Задача
[A task]:

Определить геометрические характеристики (η, ξ, φ, g)-структуры Сасаки
[Determine the geometric characteristics of the Sasaki (η, ξ, φ, g)-structure]

Математическая модель
[Mathematical model]:

(G, η) – n-мерная контактная группа Ли с наделенной (η, ξ, φ_p, g_p)-структурой Сасаки, где η – контактная форма, ξ – поле Риба, φ_p, g_p – ассоциированные аффинор и метрика
[(G, η) is an n-dimensional Lie contact group with a Sasaki (η, ξ, φ_p, g_p)-structure, where η is the contact form, ξ is the Reeb field, φ_p, g_p are the associated affinor and metric].

Применение систем аналитических вычислений
[Application of systems of analytical calculations]:

1. Загрузить массив ассоциированного аффинора φ_p [Load the associated affinor array φ_p].
2. Загрузить массив структурных констант C_{ij}^k, $i, j, k = 1, \dots, n$ [Load the array of structural constants C_{ij}^k, $i, j, k = 1, \dots, n$].
3. Вычислить дифференциал контактной формы dη [Calculate the contact form differential dη]:

$$\mathrm{d}E^k = -\sum_{i<j} C_{ij}^k E^i \wedge E^j, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Применение систем аналитических вычислений:
Application of systems of analytical calculations:

4. Вычислить ассоциированную метрику g_p [Calculate the associated metric g_p]:

$$g_{ij} = \mathrm{d}\eta_{ik}\varphi_j^k + \eta_i\eta_j, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

5. Вычислить компоненты связности Γ_{ij}^p [Calculate the connectivity components Γ_{ij}^p]:

$$\Gamma_{ij}^p = 1/2(C_{ij}^k + g^{lp} g_{ik} C_{li}^k + g^{lp} g_{jk} C_{li}^k), \quad i, j, k, l, p = 1, \dots, n.$$

6. Вычислить компоненты тензора кривизны R_{ijk}^s [Calculate the connectivity components R_{ijk}^s]:

$$R_{ijk}^s = \Gamma_{ip}^s \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^s \Gamma_{ik}^p - C_{ip}^p \Gamma_{pk}^s, \quad i, j, k, p, s = 1, \dots, n.$$

7. Вычислить квадрат нормы тензора кривизны $||R||^2$ [Calculate the squared norm of the curvature tensor $||R||^2$]:

$$||R||^2 = g^{ip} g^{jr} g^{ks} g_{it} R_{ijk}^l R_{prs}^t, \quad i, j, k, l, p, r, s, t = 1, \dots, n.$$

8. Вычислить компоненты секционной кривизны K_{ij} [Calculate the components of the sectional curvature K_{ij}]:

$$K_{ij} = \frac{R_{ijj}^k g_{ki}}{g_{ii} g_{jj} - g_{ij}^2}, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Применение систем аналитических вычислений
[Application of systems of analytical calculations]:

9. Вычислить тензор Риччи Ric и его матрицу [Calculate the Ricci tensor Ric and its matrix]:

$$\mathrm{Ric}_{qm} = R_{iqm}^i, \quad i, q, m = 1, \dots, n.$$

10. Вычислить оператор Риччи RIC [Calculate the Ricci operator RIC]:

$$\mathrm{RIC}_{qm} = \mathrm{Ric}_{qi} g^{im}, \quad i, q, m = 1, \dots, n.$$

11. Вычислить главные кривизны Риччи K_{Ric} [Calculate the principal Ricci curvatures K_{Ric}]:

$$K_{\mathrm{Ric}i} = \mathrm{Ric}_{ii}/g_{ii}; \quad K_{\mathrm{Ric}i} = \lambda_i: |\mathrm{RIC} - \lambda E| = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

12. Вычислить квадрат нормы тензора Риччи [Calculate the squared norm of the Ricci tensor]:

$$||\mathrm{Ric}||^2 = g^{ik} g^{jl} \mathrm{Ric}_{ij} \mathrm{Ric}_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n.$$

13. Вычислить скалярную кривизну S ассоциированной метрики g_p
[Calculate the scalar curvature S of the associated metric g_p]:

$$S = g^{qm} \mathrm{Ric}_{iqm}, \; i, q, m = 1, \dots, n.$$

Рис. 2. Схема исследования (η, ξ, φ, g)-структуры Сасаки

Fig. 2. Scheme of the study of the Sasaki (η, ξ, φ, g)-structure

В результате применения схемы (см. рис. 1), реализующей выполнение всех условий (ассоциированности, почти комплексности, интегрируемости) получена матрица J_G:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \frac{b_{11}^2+1}{b_{23}} & 0 \\ b_{21} & -b_{11} & b_{23} & \frac{b_{21}\left(b_{11}^2+1\right)+b_{23}^2 b_{34}}{2b_{23}b_{11}} & 0 \\ \frac{b_{21}\left(b_{11}^2+1\right)+b_{23}^2 b_{34}}{2b_{23}b_{11}} & -\frac{b_{11}^2+1}{b_{23}} & b_{11} & b_{34} & 0 \\ -b_{23} & 0 & 0 & -b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_{23} \neq 0, \quad b_{11} \neq 0. \qquad (2)$$

Из существования матрицы (2) следует существование структуры Сасаки.

По результатам применения схемы, показанной на рис. 2, приведены основные геометрические характеристики (η, ξ, φ, g)-структуры Сасаки на группе, соответствующей алгебре Ли $L(D_{4,1}) \times \mathbf{R}$.

1. Выражения многопараметрических семейств ассоциированного аффинора и метрики:

$$\varphi = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \frac{b_{11}^2+1}{b_{23}} & 0 \\ b_{21} & -b_{11} & b_{23} & \frac{b_{21}\left(b_{11}^2+1\right)+b_{23}^2 b_{34}}{2b_{23}b_{11}} & 0 \\ \frac{b_{21}\left(b_{11}^2+1\right)+b_{23}^2 b_{34}}{2b_{23}b_{11}} & -\frac{b_{11}^2+1}{b_{23}} & b_{11} & b_{34} & 0 \\ -b_{23} & 0 & 0 & -b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$g = \begin{pmatrix} b_{21} & -b_{11} & b_{23} & \frac{b_{21}\left(b_{11}^2+1\right)+b_{23}^2 b_{34}}{2b_{23}b_{11}} & 0 \\ -b_{11} & 0 & 0 & -\frac{b_{11}^2+1}{b_{23}} & 0 \\ b_{23} & 0 & 0 & b_{11} & 0 \\ \frac{b_{21}\left(b_{11}^2+1\right)+b_{23}^2 b_{34}}{2b_{23}b_{11}} & -\frac{b_{11}^2+1}{b_{23}} & b_{11} & b_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $b_{23} \neq 0$, $b_{11} \neq 0$;

2. Выражения матрицы оператора Риччи, скалярной и секционных кривизн, квадратов норм тензоров Римана и Риччи:

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -2b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2b_{23} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = -1, \quad K_{1,2} = \frac{3}{4b_{11}^2}, \quad K_{1,3} = K_{2,4} = 0;$$

$$K_{1,4} = \frac{4b_{23}^2 b_{11}^2 b_{21}}{b_{21}^2\left(b_{11}^2+1\right)^2 + b_{23}^2 b_{34}\left(b_{23}^2 b_{34} - 2b_{21}\left(b_{11}^2-1\right)\right)},$$

$$K_{3,4} = \frac{3}{4b_{11}^2};$$

$$K_{1,5} = K_{4,5} = \frac{1}{4}, \quad \|R\|^2 = \frac{17}{2}, \quad \|\mathrm{Ric}\|^2 = 2.$$

На основе полученных выражений видим, что исследуемая (η, ξ, φ, g)-структура Сасаки ни при каких значениях параметров b_{ij} не относится к классам эйнштейновых, η-эйнштейновых и K-контактных структур.

Р е з у л ь т а т 2. В качестве объекта исследования рассмотрим другую контактную алгебру Ли $L(G) = \tau_2\tau_2 \times \mathbf{R}$ [Diatta, 2008] с контактной формой в адаптированном базисе $\{E_i\}$ ($i = 1, \dots, 5$): $\eta = E^5$. Ненулевые структурные константы алгебры в базисе $\{E_i\}$: $C_{12}^2 = 1$, $C_{12}^5 = -1$, $C_{34}^4 = 1$, $C_{34}^5 = -1$.

В результате применения схем, представленных на рис. 1 и 2, получили следующий результат.

Т е о р е м а 1. Левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на алгебре Ли $L(G) = \tau_2\tau_2 \times \mathbf{R}$ является структурой Сасаки при аффиноре вида:

$$\varphi = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_{11}^2+1}{b_{12}} & -b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_{33}^2+1}{b_{34}} & -b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_{12} \neq 0, \quad b_{34} \neq 0.$$

Выражение многопараметрического семейства ассоциированной метрики:

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{b_{11}^2+1}{b_{12}} & -b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{11} & -b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_{33}^2+1}{b_{34}} & -b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{33} & -b_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b_{12} \neq 0, \quad b_{34} \neq 0.$$

Построенная (η, ξ, φ, g)-структура Сасаки при всех значениях параметров относится к классам эйнштейновых и K-контактных структур.

Результат 3. Рассмотрим контактную алгебру Ли $L(G) = \tau_2\tau_{3,\,-1} \times \mathbf{R}$ [Diatta, 2008]. В результате применения схем, представленных на рисунках 1 и 2, получили следующий результат:

Теорема 2. Левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на алгебре Ли $L(G) = \tau\tau_{3,\,-1} \times \mathbf{R}$ не является структурой Сасаки ни при каких значениях параметров.

Таким образом, приведены результаты нескольких вычислительных экспериментов. Каждый эксперимент проводится на конкретной алгебре Ли классификационного списка, приведенного в работе [Diatta, 2008]. Количество проведенных экспериментов соответствует количеству контактных алгебр Ли соответствующей размерности классификационного списка. Проведенные компьютерные исследования позволили получить теоретические результаты в области контактной геометрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанные схемы, алгоритмы и комплекс программ в системе компьютерной математики Maxima позволили смоделировать доказательство существования сасакиевых структур и провести их исследование. Данный алгоритм может быть использован для исследования однородных пространств. Предложенные схемы представляет научно-практический интерес для специалистов в области дифференциальной геометрии и методов ее применений, а также для решения задач разработки квантовых вычислительных устройств.

Литература

1. *Blair D.E.* Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. In: Progress in Math. Birkhauser, 2010. 203 p.
2. *Becker T.* Geodesic and conformally Reeb vector fields on flat 3-manifolds [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2207.03274 (data of accesses: 12.07.2022).
3. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. Vol. 26. Iss. 5. Pp. 544–552. DOI: https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
4. *Marín-Salvador A.* On the canonical contact structure of the space of null geodesics of a spacetime [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2109.03656 (data of accesses: 12.07.2022).
5. *Min H.* The contact mapping class group and rational unknots in lens spaces [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2207.03590 (data of accesses: 12.07.2022).
6. *Dacko P.* Rank of Jacobi operator and existence of quadratic parallel differential form, with applications to geometry of almost Para-contact metric manifolds [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/1806.05604 (data of accesses: 12.07.2022).
7. *Dattin C.* Sutured contact homology, conormal stops and hyperbolic knots [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2206.07782 (data of accesses: 12.07.2022).
8. *Teruya M.* Almost contact structures on the deformation space of rational curves in a 4-dimensional twistor space [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2206.13151 (data of accesses: 12.07.2022).
9. *Дьяконов В.П.* Новые системы компьютерной алгебры MAXIMA и wxMAXIMA // Компоненты и технологии. 2014. № 2. С. 117–126.

References

1. *Blair D.E.* Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. In: Progress in Math. Birkhauser, 2010. 203 p.
2. *Becker T.* Geodesic and conformally Reeb vector fields on flat 3-manifolds [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2207.03274 (data of accesses: 12.07.2022).
3. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups. *Diff. Geom. and its Appl*. Vol. 26. Iss. 5. Pp. 544–552. DOI: https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
4. *Marín-Salvador A.* On the canonical contact structure of the space of null geodesics of a spacetime [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2109.03656 (data of accesses: 12.07.2022).
5. *Min H.* The contact mapping class group and rational unknots in lens spaces [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2207.03590 (data of accesses: 12.07.2022).
6. *Dacko P.* Rank of Jacobi operator and existence of quadratic parallel differential form, with applications to geometry of almost Para-contact metric manifolds [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/1806.05604 (data of accesses: 12.07.2022).
7. *Dattin C.* Sutured contact homology, conormal stops and hyperbolic knots [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2206.07782 (data of accesses: 12.07.2022).
8. *Teruya M.* Almost contact structures on the deformation space of rational curves in a 4-dimensional twistor space [Electronic resource]. URL: https://arxiv.org/abs/2206.13151 (data of accesses: 12.07.2022).
9. *Dyakonov V.P.* New computer algebra systems MAXIMA and wxMAXIMA. *Components and Technologies*. 2014. No. 2. Pp. 117–126. (In Rus.)

10. *Киренберг А.Г.*, *Славолюбова Я.В.* Реальная и прогнозная оценка степени влияния зашумленности радиоканала на скорость передачи данных в беспроводных сетях Wi-Fi // Comp. Nanotechnol. 2019. Т. 6. № 1. С. 53–59.
11. *Славолюбова Я.В.* Ассоциированные левоинвариантные контактные метрические структуры на семимерной группе Гейзенберга H7 // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2018. № 54. С. 34–45.
12. *Славолюбова Я.В.* Контактные метрические структуры на нечетномерных единичных сферах // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2014. № 6. С. 46–54.

10. *Kirenberg A.G.*, *Slavolyubova Ya.V.* Real and predictive assessment of the degree of influence of radio channel noise on the data transfer rate in Wi-Fi wireless networks. *Comp. Nanotechnol*. 2019. Vol. 6. No. 1. Pp. 53–59. (In Rus.)
11. *Slavolyubova Ya.V.* Associated left-invariant contact metric structures on the 7-dimensional Heisenberg group H7. *Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 2018. No. 54. Pp. 34–45. (In Rus.)
12. *Slavolyubova Y.V.* Contact metric structures on odd-dimensional unit spheres. *Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 2014. No. 6. Pp. 46–54. (In Rus.)

Статья проверена программой Антиплагиат. Оригинальность – 89,13%

Рецензент: *Хромова О.П.*, кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий Алтайского государственного университета

Статья поступила в редакцию 22.07.2022, принята к публикации 26.08.2022
The article was received on 22.07.2022, accepted for publication 26.08.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Славолюбова Ярославна Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры прикладных информационных технологий Кузбасского государственного технического университета имени Т.Ф. Горбачева. Кемерово, Российская Федерация. РИНЦ Author ID: 591047; Web of Science Researcher ID: Q-6998-2017; E-mail: slavolubovayav@kuzstu.ru

ABOUT THE AUTHOR

Slavolyubova Yaroslavna Viktorovna, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor; associate professor at the Department of Applied Information Technologies of the T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University. Kemerovo, Russian Federation. Author ID: 591047; Web of Science Researcher ID: Q-6998-2017; E-mail: slavolubovayav@kuzstu.ru