В. Я. Глизер, М. Г. Дмитриев, Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи, связанной с методом штрафных функций, *Дифференц. уравнения*, 1981, том 17, номер 9, 1574–1580

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СЕНТЯБРЬ 1981 г., ТОМ XVII, № 9

УДК 517.91/94 : 519.3

В. Я. ГЛИЗЕР, М. Г. ДМИТРИЕВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННОЙ С МЕТОДОМ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Метод штрафных функций [1] — один из наиболее простых и распространенных приемов учета ограничений в вариационных задачах — является методом с искусственно вводимым малым параметром (обратная величина коэффициента штрафа). В связи с выяснением скорости сходимости и построения экстраполяционных процедур возникает вопрос об асимптотическом разложении по этому искусственному малому параметру решений «штрафованной» и связанной с ней задач. Ниже на примере одной задачи оптимального управления показано, что возникающая здесь при применении метода штрафных функций задача Коши для соответствующего матричного уравнения Риккати сводится к сингулярно возмущенной [2] и асимптотика решения последней содержит ряд новых моментов.

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной системой с квадратичным функционалом с фиксированным временем и закрепленными концами

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u, \quad x(0)=x_0, \quad x(T)=0, \quad x\in E^n, \quad u\in E^r, \tag{1}$$

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_0^T (x'D(t)x+u'R(t)u)\,dt, \tag{2}$$

$R(t)$ — положительно определенная, а $D(t)$ — положительно полуопределенная на $[0, T]$ матрицы, штрих означает транспонирование, все матрицы непрерывны на $[0, T]$.

Пусть задача (1), (2) имеет решение. Вместо (1), (2) рассмотрим для некоторого $\lambda>0$ задачу оптимального управления

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u, \quad x(0)=x_0, \tag{3}$$

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2\lambda}x'(T)Fx(T)+\frac{1}{2}\int_0^T (x'D(t)x+u'R(t)u)\,dt, \tag{4}$$

F — произвольно выбранная положительно определенная матрица, т. е. применяется один из вариантов метода штрафных функций. Известно [1], что при $\lambda\to 0$ решение задачи (3), (4) (оптимальное управление, оптимальная траектория, минимальное значение функционала) при определенных условиях стремится в соответствующих нормах к решению задачи (1), (2).

Оптимальное управление в задаче (3), (4), согласно результатам Калмана [3], имеет вид $u=-R^{-1}B'Kx$, матрица К является решением задачи Коши для уравнения Риккати

$$\frac{dK}{dt}=-KA-A'K+KSK-D, \quad K(T)=\frac{1}{\lambda}F, \tag{5}$$

где $S=BR^{-1}B'$. Наряду с задачей (5) рассмотрим задачу

$$\frac{dP}{dt}=-PA-A'P+PSP-D, \quad P(T)=Q, \tag{6}$$

Q — произвольно выбранная положительно определенная матрица. Сделав в (5) замену $K=\frac{1}{\lambda}N+P$, придем к

$$\lambda\frac{dN}{dt}=-\lambda N(A-SP)-\lambda(A'-PS)N+NSN, \quad N(T)=F-\lambda Q. \tag{7}$$

Задача (7) нелинейная и сингулярно возмущенная [2].

Якобиан правой части системы в (7), вычисленный при $\lambda=0$, имеет вид $J=E_n\otimes\bar{N}S+\bar{N}S\otimes E_n$, где символ $\otimes$ означает кронекеровское произведение [4].

Если S — положительно определенная матрица, то вырожденная система $\bar{N}S\bar{N}=0$ имеет единственное решение $\bar{N}\equiv0$. В случае положительной полуопределенности матрицы S эта система допускает семейство решений, на котором $\bar{N}S\equiv0$. То есть в обоих случаях все собственные значения Якобиана J на любом решении вырожденной системы тождественно равны нулю.

Первый случай близок к работам [5, 6], в которых, однако, рассматривалась скалярная задача и построение асимптотики проводилось при условии того, что первая отличная от нуля производная по фазовой переменной от правой части на вырожденном решении имеет нечетный порядок.

Второй случай (S — положительно полуопределенная матрица, т. е. имеется неопределенность при вырождении) примыкает к работам [7—9], где существенными предположениями являются, во-первых, наличие, кроме нулевых собственных значений, собственных значений с ненулевой действительной частью, а во-вторых, нулевому собственному значению кратности k отвечает k линейно независимых собственных векторов, что позволяет применять метод пограничных функций [2].

Здесь же задача (7) в общем случае матричная, все собственные значения нулевые, причем этому собственному значению может отвечать неполный набор собственных векторов и в случае скалярной задачи (7), порядок первой отличной от нуля производной равен двум. Отметим также, что система (7) в скалярном случае является полуустойчивой в терминологии [10]. Используя свойства уравнения Риккати, удалось построить асимптотику решения задачи (7), которую нельзя представить в виде ряда по степеням λ с коэффициентами, непрерывно зависящими от t.

Решения задач (5), (6) при любых $\lambda>0$ и (7) при достаточно малых $\lambda>0$ существуют, единственны и являются положительно определенными матрицами на $[0, T]$ [3].

Построим асимптотику решения задачи (7). Как и в [11], решение задачи (7) ищем в виде $N=W'M^{-1}W$, где матрица W удовлетворяет задаче

$$dW/dt=-W(A-SP), \quad W(T)=E_n,$$

E_n — единичная матрица размерности n, а матрица M удовлетворяет задаче

$$\lambda \frac{dM}{dt} = -WSW', \quad M(T) = (F-\lambda Q)^{-1}. \tag{8}$$

Асимптотическое разложение решения $M(t, \lambda)$ задачи (8) ищем в виде

$$M(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} M_{-1}(t) + M_0(t) + \lambda M_1(t) + \dots \tag{9}$$

Уравнения и условия для определения коэффициентов разложения (9) получаются подстановкой этого разложения в (8) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях λ. Имеем

$$\frac{dM_{-1}}{dt} = -WSW', \quad M_{-1}(T) = 0, \quad \frac{dM_0}{dt} = 0, \quad M_0(T) = F^{-1},$$

$$\frac{dM_i}{dt} = 0, \quad M_i(T) = (F^{-1}Q)^i F^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Определим коэффициенты асимптотических разложений до номера m включительно и составим матрицу

$$N_m(t, \lambda) = W'(t) \tilde{M}_m^{-1}(t, \lambda) W(t),$$

где $\tilde{M}_m(t, \lambda) = \sum_{i=-1}^{m} \lambda^i M_i(t)$.

Теорема 1 [13]. *Пусть* $\det \left\{ \int_T^t W(\tau) S(\tau) W'(\tau) d\tau \right\} \neq 0 \quad \forall t \in [0, T)$, *тогда найдутся такие постоянные числа* $c > 0$, $\lambda_0 > 0$, *что при всех* $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$ *решение задачи (7) удовлетворяет неравенству* $\|N(t, \lambda) - N_m(t, \lambda)\| \leqslant c\lambda^{m+1}$, $t \in [0, T]$.

Доказательство. Очевидно имеем

$$\|M(t, \lambda) - \tilde{M}_m(t, \lambda)\| \leqslant c\lambda^{m+1}, \quad t \in [0, T]. \tag{10}$$

Покажем, что $\tilde{M}_m^{-1}(t, \lambda)$ существует и равномерно ограничена по $t \in [0, T]$ и достаточно малых $\lambda > 0$. Имеем

$$M(t, \lambda) = (F - \lambda Q)^{-1} - \frac{1}{\lambda} \int_T^t W(\tau) S(\tau) W'(\tau) d\tau.$$

В силу неравенства Минковского для определителя суммы положительно определенных матриц [4]

$$\det M(t, \lambda) \geqslant \det (F - \lambda Q) + \det \left(-\frac{1}{\lambda} \int_T^t W(\tau) S(\tau) W'(\tau) d\tau \right) \tag{11}$$

или $\det M(t, \lambda) \geqslant \frac{1}{2} \det F^{-1}$. Далее из (11) следует равномерная ограниченность матрицы $M^{-1}(t, \lambda)$ при $t \in [0, T]$ и $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0]$, $0 < \lambda_1 < \lambda_0$. Матрица $M^{-1}(t, \lambda)$ также равномерно ограничена при $t \in [0, T_1]$, $T_1 < T$ и $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Покажем, что $\|M^{-1}(t, \lambda)\| \leqslant \text{const}$ при $t \in [T_1, T]$, $\lambda \in (0, \lambda_1]$.

Предположим противное, т. е. что существуют $\bar{T}$ и $\bar{\lambda}$ такие, что при

$t \to \bar{T}$, $\lambda \to \bar{\lambda}$ по крайней мере один из пределов $\lim\limits_{\lambda\to\bar{\lambda}} \lim\limits_{t\to\bar{T}} \|M^{-1}(t, \lambda)\|$ и $\lim\limits_{t\to\bar{T}} \lim\limits_{\lambda\to\bar{\lambda}} \|M^{-1}(t, \lambda)\|$ не ограничен. Заметим, что $\bar{T}$ и $\bar{\lambda}$ могут принимать только значения T и 0 соответственно в силу произвольности выбора T_1 и λ_1. Покажем, что каждый из этих пределов существует и ограничен. Действительно, имеем

$$M^{-1}(t, \lambda) = \left[(F-\lambda Q)^{-1} - \frac{1}{\lambda} \int\limits_T^t W(\tau)S(\tau)W'(\tau)d\tau \right]^{-1} =$$

$$=\lambda \left[\lambda(F-\lambda Q)^{-1} - \int\limits_T^t W(\tau)S(\tau)W'(\tau)d\tau \right]^{-1}$$

и таким образом в силу условия $\det\left\{ \int\limits_T^t W(\tau)S(\tau)W'(\tau)d\tau \right\} \neq 0$ $\forall t \in [0, T)$

$$\lim_{\lambda\to 0} \lim_{t\to T} \|M^{-1}(t, \lambda)\| = \lim_{\lambda\to 0} \|F-\lambda Q\| = \|F\|, \quad \lim_{t\to T} \lim_{\lambda\to 0} \|M^{-1}(t, \lambda)\| = 0.$$

Далее, из существования и равномерной ограниченности $M^{-1}(t, \lambda)$ вытекают в силу (10) существование и равномерная ограниченность $\tilde{M}_m^{-1}(t, \lambda)$. Теперь доказательство теоремы непосредственно следует из (10) и равномерной ограниченности $\tilde{M}_m^{-1}(t, \lambda)$. Действительно,

$$(M^{-1}-\tilde{M}_m^{-1}) = M^{-1}M(M^{-1}-\tilde{M}_m^{-1}) = M^{-1}(E_n - M\tilde{M}_m^{-1}) = M^{-1}[E_n -$$

$$-(\tilde{M}_m + O(\lambda^{m+1}))\tilde{M}_m^{-1}] = M^{-1}(E_n - E_n - O(\lambda^{m+1})\tilde{M}_m^{-1}) = O(\lambda^{m+1}),$$

что и требовалось доказать.

Приведем пример, показывающий, что асимптотическое разложение решения задачи (7) нельзя представить в виде ряда по степеням λ с коэффициентами, непрерывно зависящими от t. Для простоты возьмем скалярный пример с постоянными коэффициентами

$$\lambda\dot{N} = -2a\lambda N + sN^2, \quad N(T) = f - \lambda q, \quad s>0, \quad f>0, \quad q>0. \tag{12}$$

Легко проверить, что единственное решение задачи (12) есть

$$N(t, \lambda) = \frac{\lambda \exp(-2a(t-T))}{-\frac{s}{2a} + \frac{s}{2a}\exp(-2a(t-T)) + \lambda(f-\lambda q)^{-1}}. \tag{13}$$

Отсюда видно, что $N(t, \lambda)$ представляет собой формулу нулевого приближения асимптотики решения задачи (7). Теперь попытаемся разложить $N(t, \lambda)$ в ряд по степеням λ. Это разложение будет иметь вид $N(t, \lambda) = N_0(t) + \lambda N_1(t) + \ldots$, где, в частности,

$$N_0(t) = \begin{cases} f, & t=T, \\ 0, & 0 \leq t < T, \end{cases} \quad N_1(t) = \begin{cases} -q, & t=T, \\ \tilde{N}_1(t), & 0 \leq t < T, \end{cases}$$

$$\tilde{N}_1(t) = \frac{\exp(-2a(t-T))}{-\frac{s}{2a} + \frac{s}{2a}\exp(-2a(t-T))}.$$

Таким образом, коэффициенты $N_0(t)$ и $N_1(t)$ терпят разрыв I и II рода соответственно в точке $t=T$.

Следствие 1. *В условиях теоремы при $\lambda\to0$ решение $N(t,\lambda)$ задачи (7) стремится к решению $\bar N\equiv0$ вырожденной задачи $\bar NS\bar N=0$ равномерно по $t\in[0,T_1]\subset[0,T]$.*

Доказательство. Так как $M_{-1}(t)$ не вырождена для $t\in[0,T_1]\subset\subset[0,T]$, то $\lim\limits_{\lambda\to0}N(t,\lambda)=0$ равномерно по $t\in[0,T_1]$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *В условиях теоремы найдутся такие постоянные числа $c>0$, $\lambda_0>0$, что при всех $0<\lambda\leqslant\lambda_0$ решение $K(t,\lambda)$ задачи (5) удовлетворяет неравенству $\|K(t,\lambda)-K_m(t,\lambda)\|\leqslant c\lambda^m$ при $t\in[0,T]$, где $K_m(t,\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}N_m(t,\lambda)+P(t)$.*

Доказательство вытекает из теоремы и равенства

$$\|K(t,\lambda)-K_m(t,\lambda)\|=\frac{1}{\lambda}\|N(t,\lambda)-N_m(t,\lambda)\|.$$

Следствие 3. *В условиях теоремы при $\lambda\to0$ решение $K(t,\lambda)$ задачи (5) стремится к решению задачи*

$$\dot{\bar K}=-\bar KA-A'\bar K+\bar KS\bar K-D,\quad \bar K^{-1}(T)=0$$

равномерно по $t\in[0,T_1]\subset[0,T]$.

Доказательство.

$$\lim_{\lambda\to0}K(t,\lambda)=\lim_{\lambda\to0}\left(\frac{N(t,\lambda)}{\lambda}+P(t)\right)=W'(t)M_{-1}^{-1}(t)W(t)+P(t)=\bar K(t)$$

равномерно по $t\in[0,T_1]$. Убедимся, что $\bar K(t)$ есть решение уравнения (5) и удовлетворяет условию $\bar K^{-1}(T)=0$. Имеем

$$\dot{\bar K}=\dot W'M_{-1}^{-1}W-W'M_{-1}^{-1}\dot M_{-1}M_{-1}^{-1}W+W'M_{-1}^{-1}\dot W+\dot P=$$
$$=-(A'-PS)W'M_{-1}^{-1}W+W'M_{-1}^{-1}WSW'M_{-1}^{-1}W-W'M_{-1}^{-1}W(A-SP)-$$
$$-PA-A'P+PSP-D=-\bar KA-A'\bar K+\bar KS\bar K-D.$$

Далее

$$\bar K^{-1}(t)=(W'M_{-1}^{-1}W+P)^{-1}=[W'M_{-1}^{-1}W(E_n+W^{-1}M_{-1}(W')^{-1}P)]^{-1}=$$
$$=(E_n+W^{-1}M_{-1}(W')^{-1}P)^{-1}W^{-1}M_{-1}(W')^{-1},$$

т. е. $\bar K^{-1}(T)=0$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Отметим, что последнее утверждение позволяет построить оптимальный синтез управления в задаче (1), (2).

Замечание 2. В случае $D(t)\equiv0$ можно взять $Q=0$. При этом $P(t)\equiv0$, т. е. $K(t,\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}N(t,\lambda)$. Результаты в этом случае не изменяются и рассуждения аналогичны очевидным изменениям.

Замечание 3. Покажем, что условие $\det\{M_{-1}(t)\}\neq0$ $\forall t\in[0,T)$ совпадает с критерием полной управляемости [11] системы (1) на любом отрезке $[t_0,T]\subseteq[0,T]$.

Действительно, пусть система (1) вполне управляема на отрезке $[t_0,T]$, тогда [12] на этом отрезке для любых x_0, x_1 найдется такое кусочно-непрерывное управление $u_1(t)$, что $x(T)=x_1$, где

$$x(t)=\Phi(t,\ t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\ s)B(s)u_1(s)ds \tag{14}$$

и $\Phi(t,\ s)$ — матрица Коши для системы (1). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что (14) является решением задачи

$$\dot{y}=(A-SP)y+Bu_2,\quad y(t_0)=x_0 \tag{15}$$

с $u_2=u_1+R^{-1}B'Px(t)$, т. е. система (15) вполне управляема на $[t_0,\ T]$. В силу положительной определенности матрицы R критерий полной управляемости системы (15) имеет вид

$$\det\left\{\int_{T}^{t_0}\Psi^{-1}(\tau)S(\tau)(\Psi^{-1}(\tau))'d\tau\right\}\neq 0, \tag{16}$$

где матрица $\Psi(\tau)$ есть решение задачи

$$\dot{\Psi}=(A-SP)\Psi,\quad \Psi(t_0)=E_n.$$

Нетрудно видеть, что $W(t)=\Psi^{-1}(t)$. Таким образом из (16) следует, что $\det\{M_{-1}(t_0)\}\neq 0$. Аналогично можно показать обратное, т. е. что из условия $\det\{M_{-1}(t_0)\}\neq 0$ следует полная управляемость системы в (1) на $[t_0,\ T]$. С помощью асимптотического анализа необходимых условий оптимальности для задачи (3), (4) по схеме, аналогичной [15], легко устанавливается, что в условиях теоремы 1 имеет место

Теорема 2. *При достаточно малых $\lambda>0$ имеют место оценки*

$$\|x(t)-x(t,\ \lambda)\|\leqslant c\lambda,\quad \|u(t)-u(t,\ \lambda)\|\leqslant c\lambda,\quad c>0, \tag{17}$$

равномерно по $t\in[0,\ T]$, где $x(t)$, $u(t)$ — оптимальные траектория и управление в задаче (1), (2), $x(t,\ \lambda)$, $u(t,\ \lambda)$ — оптимальные траектория и управление в задаче (3), (4).

Теорема 3. *Оптимальное управление в виде синтеза в задаче (1), (2) существует на $[0,\ T)$ и имеет вид*

$$u(t,\ x)=-R^{-1}(t)B'(t)\bar{K}(t)x, \tag{18}$$

а оптимальное программное управление $u=u(t)$ в задаче (1), (2) существует и непрерывно на всем отрезке $[0,\ T]$.

Доказательство. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что управление (18) переводит систему (1) в точку $x(T)=0$ за время T. При этом используется представление для матрицы $\bar{K}=W'M_{-1}^{-1}W+P$. Оптимальность управления (18) следует из сравнения (18) и $u(t,\ \lambda)=-R^{-1}(t)B'(t)K(t,\ \lambda)x(t,\ \lambda)$, предельных свойств $K(t,\ \lambda)$ и оценок (17).

Непрерывность оптимального программного управления также устанавливается непосредственно с использованием представления оптимальной траектории $x(t)$.

Замечание 4. При рассмотрении таким же образом более общей задачи (1), (2) с ограничением $x(T)=x_1$ появляется дополнительно начальная задача

$$W^{-1}(M_{-1}+\lambda M_0+\ldots)(W')^{-1}\dot{l}=Sl+Ax_1+W^{-1}(M_{-1}+$$
$$+\lambda M_0+\ldots)(W')^{-1}(PSl-A'l+PAx_1+Dx_1),\quad l(T,\ \lambda)=0. \tag{19}$$

Так как $M_{-1}(T)=0$, нетрудно видеть, что эта задача также сингулярно возмущенная. Такого типа сингулярно возмущенные задачи рассматривались в [14], где существенным предположением является условие «регулярности вырождения», которое здесь, вообще говоря, не имеет места, поскольку $\bar{S}$ может быть полуопределенной матрицей.

Используя специфику этой задачи удается установить предельный переход $l(t, \lambda)$ при $\lambda\to 0$ к решению $\bar{l}(t)$ вырожденного уравнения, которое получается из (19) при $\lambda=0$. Значение вектора $\bar{l}(t)$ при $t=T$ в общем случае не ограничено в отличие от работы [14], где значение предельного решения в начальной точке ограничено.

Здесь также удается получить вид оптимального синтеза

$$u(t, x) = -R^{-1}(t)B'(t)\bar{K}(t)(x-x_1)+R^{-1}(t)B'(t)\bar{l}(t).$$

Замечание 5. Использующиеся при доказательствах утверждений явные представления для $\bar{K}(t)$ и $\bar{l}(t)$ можно использовать для определения значений $\bar{K}(0)$ и $\bar{l}(0)$ и последующего интегрирования соответствующих уравнений в прямом времени. Для практического решения задачи синтеза полезна также следующая рекомендация. В окрестности $t=T$ $K(t, \lambda)$ лучше определять через решения присоединенной системы к (7). Вдали от точки $t=T$ $K(t, \lambda)$ рекомендуется определять с помощью асимптотики.

В заключение отметим, что решение задачи (1), (2) методом L-проблемы моментов получено в [16].

Гипотеза о возможности построения синтеза оптимального управления в задаче (1), (2) с помощью метода штрафных функций приведена в [17]. Как показано выше, асимптотический анализ по коэффициенту штрафа позволяет обосновать эту гипотезу.

Литература

1. Левитин Е. С., Поляк Б. Т.— ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 5, с. 787—823.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
3. Kalman R. E.— Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1960, vol. 5, N 1, p. 102—119.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1969.
5. Васильева А. Б., Зимин А. Б.— Вестник МГУ. Сер. мат. и механики, 1964, № 4, с. 21—29.
6. Ломов С. А.— Труды МЭИ, 1971, вып. 89, с. 3—10.
7. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.— Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 4, с. 650—664.
8. Васильева А. Б.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 10, с. 1754—1764.
9. Васильева А. Б.— Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 1, с. 19—22.
10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.— М.: Наука, 1969.
11. Глизер В. Я., Дмитриев М. Г.— Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 5, с. 997—1000.
12. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.— М.: Наука, 1972.
13. Глизер В. Я., Дмитриев М. Г.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 1, с. 21—23.
14. Ломов С. А.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, т. 30, № 3, с. 525—572.
15. Поляк Б. Т.— ЖВМ и МФ, 1971, т. 11, № 1.
16. Куржанский А. Б.— Автоматика и телемеханика, 1964, т. XXV, № 5, с. 624—630.
17. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления.— М.: Мир, 1972.

Сибирский энергетический институт СО АН СССР

Поступила в редакцию 26 июня 1978 г.