УДК 519.712+510.52

СЛОЖНОСТЬ АЛГОРИТМОВ И ВЫЧИСЛЕНИЙ

С. С. Марченков, В. Л. Матросов

Настоящий обзор составлен по работам, опубликованным с середины 50-х годов по 1972 год включительно. Авторы не имели возможности отразить в обзоре все результаты, полученные по рассматриваемой теме за указанный период. Предпочтение отдавалось, прежде всего, результатам по сложности вычислений и сложности задания алгоритмов для наиболее употребительных формализаций понятия алгоритма — машин Тьюринга и нормальных алгорифмов А. А. Маркова. Поэтому за пределами обзора остались вопросы сложности вычислений на специальных типах вычислительных устройств, в том числе на вероятностных машинах Тьюринга, сложность реализации алгоритмов конечными автоматами, схемами из функциональных элементов и т. п., сложность языков в теории формальных грамматик и, по существу, связь сложности со случайностью и количеством информации. Вместе с тем авторы сочли необходимым включить в обзор некоторые результаты по исследованию различных «аналитических» классификаций рекурсивных функций.* Это объясняется следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, в любой аналитической классификации каждому классу сопоставляется единственное ординальное число (или обозначение ординального числа), причем, как правило, более мощным и более сложным классам функций соответствуют бóльшие ординальные числа. Таким образом, ординальное число — обозначение класса дает некоторую сложностную характеристику функциям, составляющим данный класс. Во-вторых, в теории сложности вычислений при определении или сравнении классов сложности часто в качестве внешнего (не содержащего явно понятия сложности вычисления) инструмента используют аналитические классификации рекурсивных функций. На самом деле, существует более глубокая связь между многими аналитическими классификациями и классами сложности для конкретных мер сложности вычислений и типов вычислительных устройств — подробнее об этом в разделе «Аналитические классификации рекурсивных функций».

* Термин «аналитические классификации» не является общепринятым. Аналитическими классификациями мы называем классификации, которые строятся без привлечения понятия сложности вычисления.

Отметим работы [2, 10, 13, 57, 72, 84, 95, 118], носящие обзорный характер и связанные со сложностью алгоритмов и вычислений.

§ 1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССИФИКАЦИИ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Идея классификации семейства рекурсивных функций возникла, по-видимому, еще в середине 30-х годов, когда на основе работ Черча, Тьюринга и Клини было дано математически строгое определение интуитивному понятию алгоритма. Одними из первых работ по классификации рекурсивных функций следует считать работы Петер [175—177]. В них введены и изучены классы k-кратно рекурсивных (или k-рекурсивных) функций, играющие в теории рекурсивных функций заметную роль. Для всякого $k \geqslant 1$ класс k-рекурсивных функций является перечислимым семейством общерекурсивных функций, которое получается из простейших функций применением операций суперпозиции и k-кратной рекурсии. Последняя представляет собой частный случай трансфинитной рекурсии по типу ω^k. Если обозначить семейство k-рекурсивных функций через R_k, то, как показала Петер [176], $R_1 \subset R_2 \subset \ldots$ Класс $\bigcup\limits_{k \geqslant 0} R_k$ является перечислимым и потому, разумеется, не исчерпывает класса всех общерекурсивных функций. Построение дальнейших более сложных классов трансфинитно-рекурсивных функций наталкивается на трудности введения «естественных» полных упорядочений, поскольку из результатов Дж. Майхилла [169] и Роитледжа [185] вытекает, что любую общерекурсивную функцию можно получить рекурсией при подходящем полном упорядочении по типу ω.

Единственной классификацией семейства всех общерекурсивных функций является классификация Клини [142]. Каждый класс в этой классификации примитивно рекурсивно замкнут. Обозначениями классов служат обозначения из некоторой специальной системы обозначений конструктивных ординалов. Классы порождаются методом построения универсальных функций, связанным с ординальными обозначениями. Классификация Клини обладает значительными нерегулярностями. Так, классы, соответствующие ординалам, меньшим ω^2, состоят из 3-рекурсивных функций [71], а объединение классов, занумерованных обозначениями ординала ω^2, дает в точности класс всех общерекурсивных функций [105]. В силу этих причин, классификация Клини имеет ограниченное применение в теории сложности вычислений.

Наибольший интерес представляет классификация Гжегорчика и ее обобщения. Классификация примитивно рекурсивных функций была предложена Гжегорчиком в работе [113]. Классификация основана на последовательности примитивно рекурсивных функций $f_n(x, y)$:

$$f_0(x, y)=y+1, \quad f_1(x, y)=x+y, \quad f_2(x, y)=(x+1)(y+1)$$

и для $n \geqslant 2$

$$\begin{cases} f_{n+1}(0, y)=f_n(y+1, y+1), \\ f_{n+1}(x+1, y)=f_{n+1}(x, f_{n+1}(x, y)). \end{cases}$$

Классы $\mathscr{E}^n$ в этой классификации определяются как наименьшие классы функций, содержащие исходные функции $x+1$, $U_1(x, y)=x$, $U_2(x, y)=y$, $f_n(x, y)$ и замкнутые относительно операций суперпозиции и ограниченной рекурсии. Согласно Гжегорчику, всюду определенная функция $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ получается из всюду определенных функций $g(y_1, \ldots, y_n)$, $h(x, z, y_1, \ldots, y_n)$, $j(x, y_1, \ldots, y_n)$ операцией ограниченной рекурсии, если для всех $x, y_1, \ldots, y_n$ функция f удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} f(0, y_1, \ldots, y_n)=g(y_1, \ldots, y_n), \\ f(x+1, y_1, \ldots, y_n)=h(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n), \\ f(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant j(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Гжегорчик показал, что $\mathscr{E}^0 \subset \mathscr{E}^1 \subset \ldots$, где включения строгие, $\bigcup\limits_{n \geqslant 0} \mathscr{E}^n$ — класс всех примитивно рекурсивных функций. Класс $\mathscr{E}^3$ этой классификации является классом функций, элементарных по Кальмару (определение элементарных функций дано в работе [136]). Из других классов заслуживает внимания $\mathscr{E}^2$ как класс функций, вычислимых за полиномиальное время. В терминах вычислений на машинах Тьюринга этот класс охарактеризован в работах [14, 93, 180], а в терминах вычислений на машинах Минского — в [27, 39].

Может показаться, что функции f_n, определяющие классы $\mathscr{E}^n$ в иерархии Гжегорчика, выбраны довольно искусственным образом. Однако, как показал Ритчи [181], к совершенно такой же иерархии мы придем, если будем рассматривать в качестве f_n функции, основанные на функции Аккермана. Этот результат далеко не случаен. Дело в том, что классы Гжегорчика $\mathscr{E}^n$ состоят из функций с рекурсивной глубиной, близкой к n. Этот факт впервые был замечен, по-видимому, Акстом [70]. Он определил классы K_n как классы всех функций, получаемых из простейших операцией суперпозиции и не более чем n применениями операции (неограниченной) примитивной рекурсии. Акст доказал соотношения $K_0 \subseteq \mathscr{E}^0$, $K_1 \subseteq \mathscr{E}^1$, для $n \geqslant 2$ $K_n \subseteq \mathscr{E}^{n+1}$ и $K_n \not\subseteq \mathscr{E}^n$, $K_0 \subset K_1 \subset \ldots$. Ясно, что объединение $\bigcup\limits_{n \geqslant 0} K_n$ исчерпывает все множество примитивно рекурсивных функций. Результаты Акста были усилены Парсонсом [173] и Швихтенбергом [197]. Мы приведем формулировку теоремы из работы [197], близкие формулировки содержатся в работе [173].

Пусть $R_n (R_n^{\sin})$ — класс всех примитивно рекурсивных функций, которые можно получить из функций 0, $x+1$, $U_m^i(x_1, \ldots, x_m) = x_i$ операцией суперпозиции и не более чем n применениями операции примитивной (одновременной) рекурсии. Тогда для любого $n \geqslant 3$ $R_n = \mathscr{E}^{n+1}$ и для любого $n \geqslant 2$ $R_n^{\sin} = \mathscr{E}^{n+1}$.

Еще одно свойство классов $\mathscr{E}^n$ Гжегорчика может служить отправным моментом для получения подобных иерархий. Речь идет о существовании в классах $\mathscr{E}^{n+1}$ функций, универсальных для семейства одноместных функций из $\mathscr{E}^n$. Гжегорчик установил этот факт для $n \geqslant 3$. Обратно, Акст [69] показал, что если определить $E_0 = \mathscr{E}^4$ и E_{n+1} как наименьший класс, содержащий E_0, универсальную для E_n функцию и замкнутый относительно суперпозиции и ограниченной рекурсии, то для любого $n \geqslant 0$ окажется $E_n = \mathscr{E}^{n+4}$. Правда, для доказательства этого результата необходим выбор специальных универсальных функций.

Одна из важных связей классификации Гжегорчика со сложностью вычислений на машинах Тьюринга была вскрыта Кобхэмом [93]. Он показал, что для $n \geqslant 3$ всякая функция из класса $\mathscr{E}^n$ может быть вычислена на подходящей машине Тьюринга с зоной и временем, также являющимися функциями из $\mathscr{E}^n$. Обратно, если зона или время вычисления функции на машине Тьюринга принадлежит классу $\mathscr{E}^n$, то и сама функция принадлежит классу $\mathscr{E}^n$. Класс $\mathscr{E}^2$ охарактеризован как класс функций, вычислимых на машинах Тьюринга с линейной (относительно двоичной записи аргументов) зоной. Различные варианты доказательства этих результатов имеются в работах [14, 26]. Более равномерное и универсальное описание конечно-порожденных $\mathscr{E}^2$-замкнутых классов в терминах сложности вычислений на машинах Минского имеется в работе [39]. В частности, класс $\mathscr{E}^2$ совпадает с классом всех всюдуопределенных функций, вычислимых на машинах Минского за полиномиально ограниченное время или на полиномиально ограниченной зоне.

Классификация Гжегорчика обобщалась в различных направлениях. Лёб и Вайнер [150, 151] предложили некоторый метод, позволяющий продолжать иерархию Гжегорчика по счетным ординалам. Их метод основан на выборе для всякого счетного ординала α специальной фундаментальной последовательности ординалов, сходящейся к α. Для всякого конструктивного ординала α соответствующий класс G_α в классификации Лёба — Вайнера оказывается некоторым классом общерекурсивных функций. Объединение $\bigcup\limits_{\alpha<\varepsilon_0} G_\alpha$, как показал Вайнер [210], является классом доказуемо рекурсивных функций, то есть классом общерекурсивных функций, рекурсивность которых может быть доказана в формальной арифметике первого порядка. Класс $\bigcup\limits_{\alpha<\omega^\omega} G_\alpha$ совпадает с классом k-рекурсивных функций Петер. Дальнейшее измельчение иерархии $\{G^{\alpha}\}$ предложено Вайнером [211].

Синтаксическое определение классов алгоритмов $\mathfrak{A}^{(n)}$, которые равномощны машинам Тьюринга, работающим с временем и зоной, ограниченными в классе $\mathscr{E}^n$ Гжегорчика, дано В. А. Козмидиади [26]. Рассмотренные им алгоритмы имеют черты конечных автоматов и нормальных алгорифмов А. А. Маркова. При $n \geqslant 1$ класс функций, вычислимых алгоритмами из $\mathfrak{A}^{(n)}$, совпадает с классом $\mathscr{E}^{n+2}$.

Несколько классификаций рекурсивных функций основано на идее Ритчи [180]. Хотя формально его классификация $\{F_i\}$ элементарных по Кальмару функций использует понятие машины Тьюринга, фактически она проводится по глубине суперпозиций функций из начального класса F_1. В качестве F_1 выбран класс функций, вычислимых на машинах Тьюринга с двоичным кодированием аргументов и с зоной, ограниченной конечноавтоматными функциями. Далее, F_{i+1} есть класс функций, вычислимых с зоной, ограниченной функциями из класса F_i. Так же, как в классификации Гжегорчика функции из классов $\mathscr{E}^n$ имеют рекурсивную глубину, близкую к n, так и в классификации Ритчи функции из классов F_i имеют глубину суперпозиции (по отношению к функциям из класса F_1), близкую к i. Херман [129, 130] показал, что классификация Ритчи довольно устойчива: классы F_i не очень сильно зависят от способа кодирования аргументов и выбора вычислительного устройства.
Метод Ритчи был использован Дж. Кливом [92] для построения иерархии примитивно рекурсивных функций по типу ω^2. В отличие от Ритчи, Дж. Клив применил в качестве вычислительного устройства машины Шефердсона—Старджиса, имеющие в программах в качестве исходных функций сложение, умножение и предикат равенства. Классы E_α, $\alpha < \omega^2$, в классификации Клива обладают следующим свойством: для всех $r \geqslant 1$ $E_{\omega r} = \mathscr{E}^{r+2}$. Подобные результаты для машин Тьюринга получены Я. Б. Казановичем [14].

Помимо класса функций, элементарных по Кальмару, отметим еще несколько классов функций и предикатов, часто встречающихся в вопросах оценки сложности конкретных функций. Сколем [199] ввел класс S элементарных функций, содержащий функции $x+1$, $x+y$, $x-y$ и замкнутый относительно суперпозиции и ограниченного суммирования. Класс A ограниченно-арифметических предикатов был определен А. В. Кузнецовым [31] как наименьший класс предикатов, содержащий предикат равенства и замкнутый относительно операций алгебры логики, навешивания ограниченных кванторов и подстановки вместо переменных полиномов с натуральными коэффициентами. Независимо Шмульян [201] ввел класс R рудиментарных предикатов. Совпадение классов A и R установлено В. А. Непомнящим [45].

Еще один класс элементарных функций был определен Томпсоном [209] как класс функций, содержащий функцию сцепления (конкатенации) и замкнутый относительно суперпозиции и ограниченной синтаксической рекурсии.

§ 2. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРЕДИКАТОВ

Первые нетривиальные нижние оценки сложности вычислений на машинах Тьюринга были получены с использованием понятия следа вычисления. След вычисления для одноленточной машины Тьюринга $\mathfrak{M}$ в точке i, являющейся границей двух соседних ячеек ленты, представляет собой последовательность состояний, в которых машина Тьюринга $\mathfrak{M}$ пересекает точку i в рассматриваемом вычислении. Техника следов была развита в работах Рабина [178], Дж. Хартманиса [114], Хенни [126, 127] и независимо от них в работах Б. А. Трахтенброта [57, 58], Я. М. Барздиня [6] и Р. В. Фрейвалда [60]. Она позволила получить нижние оценки не более чем квадратичного роста для сложности вычисления ряда индивидуальных функций и предикатов.

Пусть Ω — некоторое множество слов. Будем говорить, что машина Тьюринга $\mathfrak{M}$ перерабатывает Ω с ограниченным режимом, если существует такая константа C, что для любого слова P из Ω длина следа вычисления $\mathfrak{M}(P)$ в любой точке не превосходит C. Если для всякого слова $P \in \Omega$ время вычисления (или сигнализирующая времени) $t_{\mathfrak{M}}(n)$ по порядку не превосходит $n \log n$, то говорят, что $\mathfrak{M}$ перерабатывает множество Ω с логарифмическим замедлением (здесь n — длина слова P). Если для некоторой константы C зона вычисления $S_{\mathfrak{M}}(n)$ (другие термины: ленточная или емкостная сигнализирующая) не превосходит $n+C$, то $\mathfrak{M}$ перерабатывает Ω с ограниченным удлинением.

В работе [58] показано, что если машина Тьюринга $\mathfrak{M}$ перерабатывает Ω с логарифмическим замедлением, то $\mathfrak{M}$ перерабатывает Ω с ограниченным удлинением.

Если для всех $P \in \Omega$ $t_{\mathfrak{M}}(n) = o(n \log n)$ $\left(\text{т. е. } \frac{t_{\mathfrak{M}}(n)}{n \log n} \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ где } |P| = n\right)$, то будем говорить, что $\mathfrak{M}$ перерабатывает Ω с сублогарифмическим замедлением, а если $t_{\mathfrak{M}}(n) \leqslant \leqslant \mathrm{const}\, n$ — с ограниченным замедлением.

Хенни [125] и Б. А. Трахтенброт [58] независимо доказали, что если машина Тьюринга $\mathfrak{M}$ распознает множество $\mathcal{A}$ с ограниченным режимом или ограниченным замедлением, то множество $\mathcal{A}$ регулярно. Более того, с сигнализирующей времени

$t_{\mathfrak{M}}(n)=O(n)$ машины Тьюринга могут перечислять только регулярные множества. Однако всякое рекурсивно перечислимое множество можно перечислить с логарифмическим замедлением (см. [57]).

Оказывается, что существуют точные нижние границы скорости роста сигнализирующих режима $r(n)$ и времени $t(n)$, при которых возможно распознавание нерегулярных множеств на одноленточных машинах Тьюринга. Следующие результаты получены независимо Дж. Хартманисом [114] и Б. А. Трахтенбротом [57]. Если множество $\mathcal{A}$ распознаваемо с режимом $r(n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r(n)}{\log n}=0$, то $\mathcal{A}$ является регулярным множеством. Вместе с тем существуют нерегулярные множества, которые распознаются на машинах Тьюринга с сигнализирующей режима, равной по порядку $\log n$. Далее, если множество $\mathcal{A}$ распознаваемо с сублогарифмическим замедлением, то $\mathcal{A}$ регулярно. Существуют вычисления на машинах Тьюринга по распознаванию нерегулярных множеств с сигнализирующей времени $t(n)=O(n\log n)$.

Хенни [126] установил, что в интервале (n, n^2) имеется плотный класс временных сигнализирующих. Более точно, для всякой пары действительных чисел q, p, таких, что $1\leqslant q<p\leqslant 2$, существует множество, распознаваемое за время $t(n)=O(n^p)$, но не распознаваемое за время $t_1(n)=O(n^q)$. Аналогичный результат для машин Тьюринга со входом получил Р. В. Фрейвалд в работе [59], где было также показано, что для всякой сигнализирующей времени $h(n)>n\log n$ найдется сигнализирующая $g(n)$ такая, что $n\log n<g(n)<h(n)$ (здесь $<$ — неравенство по порядку).

Исследуя границы сложности распознавания множества M_c всех симметричных слов в алфавите $\{0, 1\}$, Я. М. Барздинь [6] для одноленточной машины Тьюринга, Р. В. Фрейвалд [59] для машины Тьюринга со входом, а Г. С. Цейтин [62] для нормальных алгорифмов доказали, что верхняя и нижняя оценки времени распознавания по порядку равны n^2. Кобхэм [94] рассматривал ленточную сложность распознавания множества $L=\{W\#W^R \mid W^R$ — зеркальное отражение слова $W\}$ и показал, что L распознается на многоленточной машине Тьюринга с ленточной сигнализирующей $S(n)=O(\log n)$. Хенни [126] доказал, что временная сложность $t(n)$ для L так же, как и для M_c, равна по порядку n^2.

Оценки роста сигнализирующих функций для тьюринговых вычислений даются с точностью до порядка, ибо за счет увеличения числа внутренних состояний и внешних символов можно уменьшить ленточную и временную сигнализирующие в константу раз. Для устранения этого эффекта Б. А. Трахтенброт [55] предложил следующий прием. Состояния машины

Тьюринга кодируются двоичным префиксным кодом. Пусть при работе над словом P машина $\mathfrak{M}$ работает t тактов, проходит последовательно через состояния $q(1), q(2), \ldots, q(t)$. Тогда временная сигнализирующая $t_{\mathfrak{M}}(p)$ обозначает суммарную длину кодов этих t состояний. Далее, пусть $\tau_{\mathfrak{M}}(n) = \max\limits_{|P|=n} t_{\mathfrak{M}}(P)$. Говорим, что словарная функция $f(n)$ имеет нормированную временную сложность $\varphi(n)$, если выполнены следующие условия. 1) Пусть даны любая машина $\mathfrak{M}$, вычисляющая функцию f, и произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно больших n $\tau_{\mathfrak{M}}(n) > (1-\varepsilon)\varphi(n)$. 2) Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая машина Тьюринга $\mathfrak{M}$, которая вычисляет функцию f и для всех достаточно больших n $\tau_{\mathfrak{M}}(n) < (1+\varepsilon)\varphi(n)$. Доказано, что распознавание симметрии имеет нормированную временную сложность $\frac{n^2}{4}$, перевод унарной записи в двоичную имеет нормированную сложность $n \log_2 n$.

В работе [171] Пейджер предложил рассматривать пространственно-временные меры сложности вычисления. Пусть $\mu(z, x_1, \ldots, x_n)$ есть произвольная общерекурсивная возрастающая функция от временной и ленточной мер сложности вычисления на машинах Тьюринга. Пусть, далее, задана вероятностная функция $p(x_1, \ldots, x_n)$. В приводимых далее определениях предполагается, что $p(x_1, \ldots, x_n) > 0$ только для наборов $x_1, \ldots, x_n$ из областей определения рассматриваемых функций. Пространственно-временной мерой $\gamma(z)$ сложности вычисления на машине Тьюринга $\mathfrak{M}_z$ называется величина

$$\sum_{x_1, \ldots, x_n = 0}^{\infty} p(x_1, \ldots, x_n) \cdot \mu(z, x_1, \ldots, x_n),$$

а пространственно-временной мерой сложности вычисления функции f — точная нижняя грань пространственно-временных мер сложности вычисления на машинах Тьюринга $\mathfrak{M}_z$, вычисляющих функцию f на так называемом множестве значимости $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid p(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ (функция p здесь фиксирована). Оказывается, что в случае бесконечных множеств значимости и чисто временных мер (т. е. функция μ не содержит пространственной компоненты) для функций $f(x)$ таких, что $f(x) - x$ монотонно возрастает, не существует машины Тьюринга $\mathfrak{M}_z$, для которой $\gamma(x)$ совпадает с мерой сложности вычисления f. Если же множество значимости бесконечно и пространственно-временная мера сложности содержит пространственную компоненту, то в случае конечности $\gamma(z)$ имеется машина Тьюринга $\mathfrak{M}_u$, пространственно-временная мера сложности вычисления на которой равна пространственно-временной мере сложности вычисления функции, реализуемой машиной $\mathfrak{M}_z$.

Исследуя вопрос о наименьшем времени вычисления функции U и предиката T для представления частично рекурсивных функций в нормальной форме Клини, $f(x) = U(\mu y T(\varepsilon, x, y))$, Б. А. Трахтенброт [57], [58] показал, что можно выбрать функцию U, вычислимую с ограниченным замедлением, предикат T — с логарифмическим замедлением. Дальнейшие результаты в этом направлении получены В. А. Непомнящим [44, 45, 46].

Балнес [86] рассматривал задачу о нахождении времени, требуемого для выполнения сложения и умножения двух последовательно записанных b-ичных ($b \geqslant 2$) чисел на одноленточных машинах Тьюринга. Методом следов показано, что для всякого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших l выражение $(1-\varepsilon) l^2/\log_b Q$ является нижней оценкой среднего времени, необходимого для выполнения сложения (умножения) l-разрядных чисел на машине с Q внутренними состояниями (усреднение проводится по всем парам l-разрядных чисел). В работе [86] также доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ можно так выбрать алфавит и число Q внутренних состояний машины Тьюринга, что при достаточно больших l верхней оценкой времени сложения (умножения) будет являться $(1+\varepsilon) 2l^2/\log_b Q$.

Иная картина получается, если мы рассматриваем реализацию умножения l-разрядных чисел на многоленточных машинах Тьюринга. В работе [24] А. А. Карацуба и Ю. П. Офман предложили метод умножения чисел на автоматах, который в случае многоленточных машин Тьюринга может быть реализован за время $O(l^{\log_2 3})$. Дальнейшим продвижением явился результат А. Л. Тоома [54]. Перенесение его алгоритма на машины Тьюринга, выполненное Куком [103], дает время $O(l \cdot 2^{\sqrt{2\log_2 l}} \cdot \log_2 l)$. Несколько худшая оценка для иного метода умножения получена Шёнхаге [195]. Самые быстрые алгоритмы умножения были предложены Шёнхаге и Штрассеном [196]. Сложность одного из них $O(l \cdot \log_2 l \cdot (\log_2 \log_2 l)^{1+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколько угодно малым, другого — $O(l \cdot \log_2 l \cdot \log_2 \log_2 l)$.

Сложность распознавания предиката «быть k-й степенью числа» исследовалась в работе [7]. Доказано, что этот предикат не автоматен, при распознавании его на on-line машине Тьюринга требуется длина ленты $L(n) = O(n)$, а на off-line машине Тьюринга — не меньше, чем $\log_2 n$.

Хартманис и Шенк [120] показали, что ленточная сложность $L(n)$ распознавания множества простых чисел на off-line машинах Тьюринга удовлетворяет условию $\overline{\lim} \frac{L(n)}{\log_2 n} > 0$, а на on-line машинах — $L(n) > c \cdot n$, где c — некоторая константа.

В. А. Мощенский [42], [43] рассматривал меру сложности $v(x)$, равную числу существенных шагов машины Тьюринга, где под существенным шагом понимается либо изменение символа на ленте, либо изменение внутреннего состояния. Получены некоторые нижние оценки для этой сигнализирующей, в частности, показано, что $v(x) \geqslant \frac{1}{3}(\sqrt{t(x)} - (|x|+3))$, где $t(x)$ — сигнализирующая времени.

Кобхэм [94] предложил в качестве меры вычислительной сложности объем памяти (memory capacity) машины Тьюринга. Данная мера задается как произведение длины L используемой ленты на логарифм числа q символов рабочей ленты. Показано, что предикат симметрии требует при распознавании на машинах Тьюринга объем памяти capacity$(n) > \log_2 n$ для всех достаточно больших n. Для этой меры сложности в работе [94] получены верхние и нижние оценки при распознавании множества $P = \{N \mid N$ есть полный квадрат$\}$ в q-ичной системе счисления. Именно, для всякой машины Тьюринга, распознающей P,

$$\varliminf_{N \to \infty} \frac{\text{capacity}(N)}{\log_2 \log_2 N} \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{\text{Time}(N) \cdot \text{capacity}(N)}{(\log_2 N)^2} \geqslant \frac{1}{4 \log_2 q},$$ где

Time(N) — время работы машины над записью числа N. Построены две программы для распознавания множества P на машинах Тьюринга. Приведем для них оценки сложности распознавания:

1) Capacity$(N) = 4 \log_2 \log_2 N$, TIME$(N) = O((\log_2 N)^3)$ или
2) Capacity$(N) \approx \log_2 N$, TIME$(N) = O(\log_2 N)^2)$.

Результаты, приведенные выше, позволяют достаточно отчетливо обозревать те типы функций, для которых возможны не слишком сложные вычисления. Мейер и Маккрейт [163] отметили, что все известные доказательства существования сложновычислимых функций используют диагональный метод. В связи с этим они сделали попытку обнаружить те свойства функций, которые обуславливают невозможность простого вычисления. В работе [163] показано, что сложность вычисления 0—1-функций не связана с частотой появления 1 в последовательности ее значений: существуют сколь угодно сложновычислимые функции со сколь угодно редким расположением 1 в последовательности значений.

В работе [159] Мейер впервые для конкретного «естественного» множества доказал большую нижнюю оценку сложности разрешения. Искомое множество образуют все истинные формулы теории $S1S$ — слабой сингулярной теории второго порядка для функции следования. Ранее ее разрешимость установил Бюхи [89]. Метод Мейера по существу основан на универсальности языка теории $S1S$. В терминах функции ξ: $\xi(0, n) = n$, $\xi(k+1, n) = 2^{\xi(k,n)}$ его результат формулируется следующим образом. Для любой машины Тьюринга (а также для любых других известных вычислительных устройств), разрешающей множество $S1S$, нижняя оценка зоны (времени) для всех достаточно больших n имеет вид $\xi([\text{const} \cdot \log_2 n], n)$. Из результата Кобхэма [93] следует, что функции, вычислимые с такой сложностью, не являются элементарно рекурсивными. В работах [159, 204] показана также не элементарная рекурсивность еще нескольких теорий в слабой логике второго порядка.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Функции, вычислимые в реальное время, были введены Ямадой [215]; более общие определения содержатся в работе Хартманиса и Стирнза. Дадим определение функции, вычислимой в реальное время в терминах генераторов последовательностей. Генератором последовательностей называется многоленточная машина Тьюринга, у которой с некоторыми состояниями связаны выходные символы. Генератор последовательностей начинает свою работу в выделенном начальном состоянии и с пустыми лентами. В процессе работы генератор иногда попадает в состояния, с которыми связаны выходные символы. Бесконечная последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ этих выходных символов называется последовательностью, порождаемой генератором. Монотонно возрастающая функция $U(n)$ называется вычислимой в реальное время, если существует генератор последовательностей, который на j-ом такте печатает 1, если $U(i)=j$ для некоторого i, и 0 в противном случае. Ямада [215] показал, что такие функции как полиномы с натуральными коэффициентами, 2^n вычислимы в реальное время. Класс функций, вычислимых в реальное время, замкнут относительно сложения, умножения, возведения в степень и суперпозиции.

В работе [178] Рабин рассматривал задачу распознавания множеств многоленточными машинами Тьюринга со входом (on-line машинами Тьюринга) в реальное время. Машина $\mathfrak{M}$ распознает множество E в реальное время, если для всякого слова $x \in E$, $|x|=n$, через n шагов $\mathfrak{M}$ переходит в заключительное принимающее состояние, а в случае $x \notin E$ машина $\mathfrak{M}$ через n шагов останавливается в отвергающем состоянии. Показано, что множество $\{u \# v 2 u^R\} \cup \{u \# v 3 v^R\}$ не распознаваемо в реальное время на одноленточной on-line машине Тьюринга, но распознаваемо в реальное время на on-line машине Тьюринга с двумя рабочими лентами.

Вопрос в общей постановке, что лучше, n лент или $n+1$ лент при вычислении в реальное время на on-line машинах Тьюринга, остается открытым. Частичный ответ на него дали Берхард и Варайя [87, 88], доказавшие существование двойной (по числу лент и числу поворотов головок на лентах) бесконечной иерархии классов функций, вычислимых в реальное время. В работе [88] показано также, что если рассматривать машины, имеющие в качестве рабочих лент магазинные ленты, работа на которых совершается независимо, параллельно и в реальное время, то ответ на данный вопрос является утвердительным. В недетерминированном случае отрицательное решение этого вопроса получили Бук и Грейбах [81]. Они доказали, что всякий язык, распознаваемый на недетерминированной машине Тьюринга со входом с n лентами за линейное время, распознается в реальное время недетерминированной машиной Тьюринга со входом с одной магазинной лентой и одной стэковой лентой.

Примером множества, не распознаваемого в реальное время многоленточными машинами Тьюринга, является $\{\mu_1 \# \mu_2 \ldots \mu_n \# \# \mu_i^R \mid \mu_i$ — слово в алфавите $\{0, 1\}$, $n \in N\}$. Доказательство этого факта принадлежит Хартманису и Стирнзу [121]. Вместе с тем отметим (см. [184]), что класс множеств, распознаваемых в реальное время, образует булеву алгебру и замкнут относительно умножения справа на регулярные множества.

Вычисления в реальное время естественным образом определяются для итеративных сетей, составленных из конечных автоматов. Ю. А. Бухштаб [8] установил, что класс функций, вычислимых в реальное время на одномерных итеративных сетях, замкнут относительно операций сложения, суперпозиции и итерации. В работе [67] Атрубин доказал, что операция умножения может быть реализована на одномерных итеративных сетях в реальное время. Вместе с тем, как следует из результатов Кука и Ондеро [103], умножение не может быть выполнено в реальное время на машинах Тьюринга. Ими же получена нижняя оценка времени умножения чисел A и B при условии, что представления этих чисел $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ и $b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ расположены на входной ленте, разбитой на две дорожки таким образом, что on-line машина, начиная работу при входе

$\binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2}\ldots\binom{a_n}{b_n}\binom{0}{0}\ldots\binom{0}{0}$, будет выдавать последовательность $c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$ представления произведения, причем символ c_n последовательности выдается перед прочтением символов $\binom{a_{n+1}}{b_{n+1}}$. Тогда любая on-line машина Тьюринга, реализующая умножение чисел при сделанных ограничениях, выдает на выходе символ c_n за время, не меньшее $O(n \log_2 n / \log_2 \log_2 n)$.

Пусть $P \geqslant Q$ — отношение, означающее, что P — подслово слова Q, где P, Q — слова в алфавите Σ. Исследованием задачи распознавания отношения $P \geqslant Q$ в реальное время занимался Ю. В. Матиясевич [41]. В том случае, когда на вход распознающего устройства подается слово $P * Q$, где $* \notin \Sigma$, эта задача не разрешима на многоленточных машинах Тьюринга в реальное время. При фиксации одного из слов P или Q задача становится разрешимой на конечном автомате. Доказана разрешимость предиката $P \geqslant Q$ на машине Тьюринга с двумерной лентой в реальное время, когда символы слов P и Q подаются синхронно на вход машины.

§ 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Важную роль в теории сложности вычислений играют вопросы моделирования одной машины на другой и сложности такого моделирования. Одной из первых в этой области была работа [122] Хартманиса и Стирнза, в которой показано, что одноленточная машина Тьюринга может моделировать работу многоленточной машины Тьюринга $\mathfrak{M}$ за время, не большее, чем квадрат времени работы $\mathfrak{M}$. Хенни [127] продемонстрировал на примере, что сокращение числа лент от двух до одной в действительности требует квадрата времени вычисления. Хенни и Стирнз [128] описали способ моделирования k-ленточной машины Тьюринга ($k \geqslant 2$) на двуленточной, причем время вычисления t увеличивается не более чем в $\log t$ раз. Хотя имеется предположение, что это наилучшее моделирование, оценка снизу все-таки не известна.

Результат, полученный в [128], является частным случаем более общего результата Штосса [205] о том, что всякую машину Тьюринга с k головками на n-мерной ленте, работающую с временем t, можно моделировать на машине Тьюринга с двумя лентами, одна из которых стэковая, самое большее за $\gamma t^{2-\frac{1}{n}} \lg t + \gamma'$ шагов, где γ, γ' — некоторые константы. Причем показано, что этот результат не может быть улучшен более чем на множитель $\lg t$. Мейер, Фишер, Розенберг [110] доказали, что всякую многоголовочную машину Тьюринга можно промоделировать на многоленточной машине Тьюринга (с одной головкой на каждой ленте), но, вообще говоря [165], с бóльшим числом лент. Более точно, каждая лента с k головками моделируется $48(k-1)$ лентами. Данную оценку можно понизить до $16(k-1)+2$. Штосс [206] рассматривал машины Тьюринга с k независимыми читающе-печатающими головками на одной ленте. Показано, что такие машины Тьюринга можно моделировать без увеличения времени вычисления на машинах Тьюринга с k лентами и одной головкой на каждой ленте. Таким образом, скорость вычислений на машинах Тьюринга с одномерными лентами зависит только от числа головок, но не от их распределения по отдельным лентам.

Рассматривая поворотную меру сложности для класса $\tau(k)$ k-ленточных машин Тьюринга ($k \geqslant 1$) без стационарных движений (в программе машины Тьюринга нет команды «на месте»), Камеда и Волмар [138] показали, что всякое множество, $R(n)$-распознаваемое поворотно-ограниченной машиной Тьюринга из класса $\tau(k)$, $6 \cdot R(n)$ — распознается поворотно-ограниченной машиной из класса $\tau(2)$. При сравнении временной и поворотной мер сложности оказалось, что любую $T(n)$-временно-ограниченную многоленточную машину Тьюринга можно промоделировать $T(n)$ — поворотно-ограниченной машиной Тьюринга из класса $\tau(1)$, причем существует множество, для которого $T(n)$ поворотов необходимо (см. [138, 139]). Фишер [106] установил, что всякую одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на одноленточной машине Тьюринга с тем же самым числом поворотов. Обратное моделирование может быть осуществлено за не более чем R_W+2k поворотов, где R_W — число поворотов, совершаемое on-line машиной Тьюринга на слове W длины k.

§ 5. ИЕРАРХИИ КЛАССОВ СЛОЖНОСТИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Первое систематическое изучение временной меры сложности тьюринговых вычислений и соответствующих классов сложности принадлежит Хартманису и Стирнзу [122]. Они рассматривали классы S_T двоичных последовательностей, вычислимых на многоленточных машинах Тьюринга так, что первые n знаков последовательности печатаются не медленнее, чем за $T(n)$ тактов работы машины, где T — вычислимая функция, $T(n+1)\geqslant T(n)$ и $T(n)\geqslant \frac{n}{k}$ для некоторого целого k. Показано, что все классы S_T рекурсивно перечислимы. Отсюда следует, что: 1) класс всех вычислимых последовательностей не совпадает с S_T ни при какой вычислимой функции T; 2) по всякому классу S_T можно построить класс S_U такой, что $S_T\subseteq S_U$. Исследован вопрос: при каких функциях T и U классы S_T и S_U совпадают, а при каких оказываются различными. Имеют место следующие утверждения: если $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{T(n)}{U(n)}=0$, то $S_U\subseteq S_T$, а если $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{T(n)}{U(n)}<\infty$, то $S_T\subseteq S_U$. Отсюда при $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T(n)}{U(n)}<\infty$ $S_T=S_U$. Для всякого рационального $k>0$ $S_T=S_{[k\cdot T]}$. Дано достаточное условие перехода к собственному расширению класса сложности S_T. Если T и U — функции, вычислимые в реальное время, и $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{(T(n))^2}{U(n)}=0$, то $S_T\subseteq S_U$.

Хенни и Стирнз [128] установили, что данный закон квадрата можно улучшить, если использовать моделирование многоленточных машин Тьюринга на двуленточных машинах. Пусть $U(n)$ — вычислимая в реальное время функция. Тогда существует множество, $U(n)$-распознаваемое на некоторой многоленточной машине Тьюринга, но не $T(n)$-распознаваемое ни на какой машине, где $T(n)$ удовлетворяет условию $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{T(n)\cdot\log T(n)}{U(n)}=0$. В случае вычисления функций на одноленточных машинах Тьюринга Хартманис [116] доказал, что для любой сигнализирующей $T(n)$ существует функция $f(n)$, вычислимая на машине Тьюринга за время $T(n)$, но не вычислимая за время $t(n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t(n)}{T(n)}=0$. Однако большая часть времени вычисления всех построенных функций используется на печатание результата, в то время как для функций, принимающих значения 0 и 1, аналогичные утверждения остаются гипотезами.

Глайнерт [112] рассматривал вычисление последовательностей при одновременном ограничении времени и зоны. Пусть $K_{T(n),L(n)}$ есть класс последовательностей, вычислимых на многоленточных машинах Тьюринга, n первых знаков которых вычисляется за время $t\leqslant T(n)$, при максимальной длине используемых лент $l\leqslant L(n)$. Пусть f — монотонно возрастающая функция и $\alpha(f)$ — бесконечная двоичная последовательность $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ такая, что $(\forall q)[\alpha_q=1\Leftrightarrow(\exists m)(f(m)=q)]$. Две монотонно возрастающие функции $f(n)$ и $g(n)$ находятся в отношении $f*g$, если некоторая машина $\mathfrak{M}$ вычисляет $\alpha(f)$ и начиная с некоторого k_0, член $\alpha f(k)$ последовательности вычисляется с использованием ровно $g(k)$ клеток ленты. Если к тому же $\mathfrak{M}$ печатает α_n за время n, то f и g находятся в отношении $f\circ g$. Показано, что если f вычислима в реальное время, то имеет место $f\circ f$. Для всякой вычислимой последовательности α существуют функции $T(n)$ и $L(n)$ такие, что $T\circ L$ и $\alpha\in K_{T,L}$. Доказано, что если $T\circ L$ и $U\circ M$, причем функция M вычислима в реальное время и $\varliminf\limits_{n\to\infty}\left(\frac{T(n)\cdot\log T(n)}{U(n)}+\right.$ $\left.+\frac{L(n)}{M(n)}\right)=0$, то $K_{T,L}\subset K_{U,M}$.

Следующий подход для распознавания множеств на многоленточных машинах Тьюринга со входом принадлежит Стрнаду [207, 208]. Он рассматривал машины, у которых $(i+1)$-ый входной символ поступает после того, как машина напечатает i-ый выходной символ. Пусть выходными символами являются 0 и 1. Можно считать, что машина Тьюринга служит устройством, распознающим (представляющим) все те слова во входном алфавите, которые преобразуются в выходные слова с 1 в качестве последнего символа. Следующее определение функции, вычислимой в реальное время, дает более широкий класс функций, чем определение Ямады и Дж. Хартманиса [207]. Монотонно возрастающая функция U называется вычислимой в реальное время, если существуют константа k и многоленточная машина Тьюринга $\mathfrak{M}$ с записью на ленте такие, что для любого n машина $\mathfrak{M}$, начиная свою работу при заполнении n символами одной из своих лент, заканчивает работу в течение самое большее $k\cdot U(n)$ шагов и после остановки на одной из лент написано $U(n)$ символов. Стрнад рассматривал класс функций $U(n)$ вычислимых в реальное время и удовлетворяющих условиям $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{n}{U(n)}<1$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{U(n)}{n^{2-\varepsilon}}<\infty$ для некоторого $\varepsilon>0$. Для каждой функции $U(n)$ указанного вида определялось множество слов $\mathcal{A}_U$ такое, что при подходящей константе c_1, $\mathcal{A}_U$ распознается за время $T(n)=c_1\cdot U(n)$, и если $\mathfrak{M}$ — машина Тьюринга со входом, распознающая $\mathcal{A}_U$, то для бесконечного числа значений n время, необходимое для распознавания слов длины n, больше $c_{\mathfrak{M}}\cdot U(n)$, где $c_{\mathfrak{M}}$ — константа, зависящая от $\mathfrak{M}$.

Раби и П. Фишеру принадлежит некоторое уточнение иерархии Дж. Хартманиса и Стирнза [186]. Пусть R и V — функции, вычислимые в реальное время. Тогда для всякой функции U, если $S_{V\circ R}-S_{U\circ R}\neq\varnothing$, то $S_V-S_U=\varnothing$. Отсюда, в частности, вытекает, что $S_n\subset S_{(n+1)}$.

Мера сложности, равная емкости памяти для on — line и off — line машин Тьюринга, рассматривалась Дж. Хартманисом, Стирнзом и Льюисом в работах [119, 203]. Пусть $C_{L(n)}$ — класс всех множеств, разрешимых с ленточной сложностью $L(n)$. Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{L(n)}{G(n)}=0$, то C_L содержит только регулярные множества, где $G(n)=\log_2\log_2 n$ для off — line машин Тьюринга и $G(n)=\log_2 n$ для on — line машин Тьюринга. Аналогичный результат установлен Б. А. Трахтенбротом [57, 58]. Вычислимая функция $L(n)$ называется конструируемой или сигнализирующей функцией, если существует машина Тьюринга, которая для каждого входного слова длины n заканчивает работу, используя при этом точно $L(n)$ клеток рабочей ленты. Следующий результат также получен в работе [203]. Если $L(n)$ — сигнализирующая функция, то существует множество W, которое $L(n)$-ленточно распознаваемо, но не является $Q(n)$-ленточно распознаваемым для любой функции $Q(n)$ такой, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{Q(n)}{L(n)}=0$. В работе [179] показано, что для любой монотонной сигнализирующей функции $L(n)$ и любой общерекурсивной неубывающей неограниченной функции $\psi(n)$ существует предикат P такой, что для любой сигнализирующей $L'(n)$ предиката $P(\forall_n^\infty)[L'(n)\geqslant L(n)]$ и найдется такая сигнализирующая $L''(n)$ предиката P, что $(\forall_n^\infty)[L''(n)<L(n)\cdot\psi(n)]$. Подобный результат получен также С. Г. Матвеевой [40]. Б. А. Трахтенброт [55] ввел понятие оптимальной сигнализирующей. Сигнализирующая $L(n)$ оптимальна, если для любой другой сигнализирующей $\psi(n)$ (того же самого предиката) имеет место $L(n)\leqslant c\cdot\psi(n)$, где c — константа. Следующий результат является усилением теоремы С. Г. Матвеевой: какова бы ни была сигнализирующая φ, существует предикат, для которого она является оптимальной сигнализирующей.

Для времени работы нормальных алгорифмов подобные результаты были получены еще в 1956 году Г. С. Цейтиным [62]. Именно, каковы бы ни были монотонные неубывающие общерекурсивные функции f и ψ такие, что $f(x) \geqslant x$ и $\psi(x) \to \infty$ (при $x \to \infty$), и вычисляющие их нормальные алгорифмы B_1 и B_2, найдется предикат, имеющий сложность вычисления не меньше, чем f, но меньше $f \cdot \log_2 f \cdot \psi + \Phi_{B_1} + \Phi_{B_2}$, где Φ_{B_1} и Φ_{B_2} — сигнализирующие времени для алгорифмов B_1 и B_2.

Следующие результаты Дж. Хартманиса [115] дают некоторую информацию об алгоритмических свойствах классов ленточной сложности. Пусть M_L — класс всех машин Тьюринга, у которых распознаваемые множества имеют сложность, не превосходящую $L(n)$. Свойство P называется нетривиальным для класса C_L, если в C_L содержатся как множества, обладающие свойством P, так и множества, не обладающие свойством P. Свойство P называется нетривиальным, если оно нетривиально для класса регулярных множеств. Свойство P называется конечно-инвариантным, если для любого множества R и любого конечного множества F, $P(R) = P(R \cup F)$. Свойство P называется неразрешимым для класса C_L, если не существует алгоритма, который по всякой машине Тьюринга T из M_L устанавливал бы, обладает ли множество, распознаваемое машиной T, свойством P. В работе [115] доказано: если P — конечно-инвариантное свойство, нетривиальное для C_L, и $L(n) \geqslant [\log_2 n]$, то P неразрешимо для C_L; если P нетривиально для класса C_L и тривиально для класса регулярных множеств, то P неразрешимо для класса C_L.

Первая попытка классифицировать вычисления по числу поворотов на лентах принадлежит Б. А. Трахтенброту [57], более детальные исследования проведены в работах [106, 108, 137, 138]. Дж. Хартманис [117] рассматривал сложность по числу поворотов для on — line машин Тьюринга. Были определены классы $C_{R(n)}$ как классы множеств, распознаваемых с числом поворотов, не превосходящим $R(n)$. Установлено, что множество $\mathcal{A}_k = \{0^{i_1} \# 0^{i_2} \# \ldots \# 0^{i_k} \# 0^{i_j} e \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$ принадлежит классу C_k и не принадлежит классам C_r при $r < k$. Невырожденная иерархия существует также для неограниченных функций, именующих классы поворотной сложности. Построены неограниченная функция $R(n)$ и множество $\mathcal{A}$ такие, что $\mathcal{A} \in C_{R(n)}$ и $\mathcal{A} \notin C_{R(n)-1}$. Установлено, что данное явление имеет место для медленно растущих функций $R(n)$, например, при $R(n) < n^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Доказано, что существуют сколь угодно сложные (в данной мере) функции. Следующее утверждение можно сравнить с соответствующим результатом Дж. Харманиса [117 и 107] для временной меры сложности.

Для всякой общерекурсивной функции $R(n)$, из $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{R(n)}=0$ следует $C_{R(n)}=C_{[R(n)/2]}$.

Рассматривая поворотную меру сложности для одноленточных машин Тьюринга, Фишер [106] доказал, что по всякой машине Тьюринга $\mathfrak{M}$ можно построить эквивалентную машину $\mathfrak{M}_1$ такую, что если для вычисления на $\mathfrak{M}$ требуется R_W поворотов, то для вычисления на $\mathfrak{M}_1$ требуется $[(R_W+3)/2]$ поворотов.

§ 6. НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Сложность разрешения многих проблем снижается, если детерминированную модель вычислительного устройства заменить на недетерминированную. Вопрос «детерминизации» вычислений относительно таких мер, как время и объем памяти является одним из основных вопросов в теории сложности вычислений. Для ленточной сложности он формулируется так: являются ли эквивалентными детерминированные и недетерминированные вычисления с ленточной сложностью $L(n)$. Так как существует тривиальное экспоненциальное моделирование, то из теоремы Бородина о промежутках следует, что для многих ограничивающих функций L эти модели эквивалентны. Однако такие границы «не интересны», и данный вопрос остается открытым для конструируемых (сигнализирующих) функций.

Савитч [187] показал, что экспоненциальное моделирование может быть улучшено. Именно, если множество S распознается на недетерминированной машине Тьюринга с ленточной сложностью $L(n)\geqslant\log_2 n$ и временной сложностью $T(n)$, то S распознается на детерминированной машине Тьюринга с ленточной сложностью $L(n)\cdot\log_2 T(n)$. Кроме того, недетерминированные вычисления с ленточной сложностью $L(n)$ могут быть смоделированы детерминированными вычислениями с ленточной сложностью $O((L(n))^2)$.

Результаты Хартманиса, Стирнза и Льюиса [203] о существовании плотной иерархии функций сложности (сигнализирующих) были обобщены Хопкрофтом и Уллманом [133]. В [133] доказано также, что если функция $L(n)$ не ограничена и растет медленнее, чем линейная функция, то класс множеств, распознаваемых со сложностью $L(n)$ недетерминированной машиной Тьюринга с односторонней входной лентой, шире класса множеств, распознаваемых со сложностью $L(n)$ детерминированными машинами Тьюринга того же типа.

Кук [101] изучал многоленточные машины Тьюринга со входом, снабженные одной магазинной лентой. Пусть на каждой из рабочих лент используется не более чем $L(n) \geqslant \log_2 n$ ячеек. Размер используемой при вычислении магазинной ленты не учитывается. Доказано, что детерминированные и недетерминированные вычисления на этих машинах с зоной $L(n)$ эквивалентны вычислениям на многоленточных машинах Тьюринга со входом с временем $T(n) = 2^{c \cdot L(n)}$ (c — константа). Патерсон [174] исследовал связь между временной и ленточной сложностью для детерминированных и недетерминированных машин Тьюринга. Он показал, что если некоторое множество S распознается одноленточной недетерминированной машиной Тьюринга за время $T(n)$, то S распознается также одноленточной детерминированной машиной Тьюринга с зоной $[T(n)]^{\frac{1}{2}}$. Для машин со входом и временем $T(n) \geqslant n$ получена оценка зоны $\sqrt{T(n) \cdot \log n}$.

В теории сложности вычислений существует тезис, согласно которому задача считается легко разрешимой, если существует алгоритм, который решает ее за полиномиальное (относительно размера входных данных) время. Известно большое число задач в различных разделах математики, которые можно решить за полиномиальное время, но недетерминированными алгоритмами. В связи с этим приобретает большое значение следующий пока открытый вопрос: совпадают ли классы P и NP задач, решаемых соответственно детерминированными и недетерминированными машинами Тьюринга за полиномиальное время. Некоторый подход к решению этого вопроса предложен Куком. В работе [102] он ввел множество {ДНФ-тавтологии}, состоящее из всех тождественно истинных дизъюнктивных нормальных форм. Легко проверить, что множество {ДНФ-тавтологии} принадлежит классу NP. Основной результат работы [102] состоял в том, что множество {ДНФ-тавтологии} распознается детерминированной машиной Тьюринга за полиномиальное время тогда и только тогда, когда все множества из NP распознается детерминированными машинами Тьюринга за полиномиальное время. В этом смысле множество {ДНФ-тавтологии} является NP-полным. Для доказательства сформулированного результата было введено понятие p-сводимости (полиномиальной сводимости). Множество S p-сводится к множеству T, если существует машина Тьюринга $\mathfrak{M}$ с оракулом T и полином Q такие, что машина $\mathfrak{M}$ распознает множество S (с использованием оракула T) за время Q. В работе [102] указано еще некоторое число NP-полных проблем и на основе p-сводимости введено понятие полиномиальной степени. При этом класс P образовывал одну p-степень, которая является наименьшим элементом в множестве всех p-степеней, упорядоченных отношением p-сводимости. Большой список NP-полных проблем указан Карпом [140] (см. также [145]).

§ 7. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Как было замечено Блюмом [76], многие принципиальные факты для известных мер сложности вычислений (временной, ленточной и т. д.) легко выводятся из нескольких простых свойств, которые естественно было положить в основу общего определения меры сложности вычислений. Пусть фиксирована геделевская нумерация $\{\varphi_i\}$ семейства всех частично рекурсивных функций одной переменной. Мерой сложности вычислений называется последовательность $\{\Phi_i(n)\}$ частично рекурсивных функций (называемых сигнализирующими), которая удовлетворяет следующим двум свойствам: (см. [65, 66]):

1) $\varphi_i(n)$ определена тогда и только тогда, когда определена $\Phi_i(n)$;

2) функция $M(i,n,m)=\begin{cases}0, & \text{если } \Phi_i(n)\neq m,\\ 1, & \text{если } \Phi_i(n)=m\end{cases}$ рекурсивна.

Приводимый ниже результат показывает, что для всякой меры сложности существуют сколь угодно сложные рекурсивные функции, принимающие только два значения 0 и 1 (см. [76, 77]). Пусть Φ — мера сложности вычислений, удовлетворяющая свойствам (аксиомам) Блюма. Тогда для любой общерекурсивной функции f найдется общерекурсивная функция φ такая, что для любого номера i функции φ $\Phi_i(n)>f(n)$ для почти всех n. Отсюда сразу вытекает, что не может быть общерекурсивной функции k такой, что при каждом i, $k(n, \varphi_i(n))\geqslant\Phi_i(n)$ для почти всех n. Вместе с тем для любой меры сложности вычислений Φ имеется такая общерекурсивная функция h, что при любом i, $h(n, \Phi_i(n))\geqslant\varphi_i(n)$ для почти всех n.

Следующий результат (см. [76]) показывает, что различные меры сложности рекурсивным образом ограничивают друг друга. Пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — меры сложности вычислений. Тогда существует такая рекурсивная функция r, что для любого i, $r(n, \hat{\Phi}_i(n))\geqslant\Phi_i(n)$ и $r(n, \Phi_i(n))\geqslant\Phi_i(n)$ для почти всех n.

Обратимся к изучению классов функций, сложность вычисления которых ограничена общерекурсивными функциями. Для любой меры сложности Φ и любой общерекурсивной функции t определим класс сложности $C_t^{\Phi}=\{\varphi_i|\Phi_i(n)\leqslant t(n)$ для почти всех $n\}$. Представляет интерес проблема построения по данному классу сложности более широкого класса сложности. Следующий результат в этом направлении принадлежит Блюму [76]. Для любой меры Φ существует общерекурсивная функция R такая, что для любой общерекурсивной функции φ_i,

$$C_{\varphi_i}^{\Phi}\subset C_{R(n,\ \Phi_i(n))}^{\Phi}. \qquad (*)$$

Результат остается верным, если функцию φ_i в условии (*) заменить функцией Φ_i.

В теории сложности вычислений имеются два типа теорем об иерархиях, связанных с двумя типами диагональных процедур.

I. Для некоторого множества F_1 общерекурсивных функций указывается общерекурсивная функция h_1 такая, что для всякой функции $t \in F_1$ класс $C^{\Phi}_{t(n)}$ строго содержится в классе $C^{\Phi}_{h_1(n, t(n))}$.

II. Для некоторого множества F_2 общерекурсивных функций указывается общерекурсивная функция h_2 такая, что для любых функций u и t, если $u \in F_2$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{h_2(t(n))}{u(n)} = 0$, то $C^{\Phi}_{u} \neq C^{\Phi}_{u}$.

Впервые теорема типа 1 была доказана Г. С. Цейтиным [63] для времени работы нормальных алгорифмов. Назовем вычислимую последовательность $f_1, \ldots, f_i, \ldots$ частично рекурсивных функций измеримым множеством, если предикат $\lambda ixy[\Phi_i(x) = y]$ рекурсивен. Блюм [76] доказал, что теорема типа I верна для произвольных мер сложности и измеримых множеств F_1, а Констебл [97] доказал, что для некоторого класса измеримых множеств теоремы типа 1 не имеют места. Таким образом, область действия теорем типа II более ограничена, чем теорем типа I.

Следующая теорема сжимания, принадлежащая Блюму [76], дает верхнюю и нижнюю границы «числа шагов» при вычислении частично рекурсивных функций. Множество функций $\{\mathfrak{G}_i\}$ измеримо тогда и только тогда, когда существует такая общерекурсивная функция h, что выполняются следующие условия: каждой функции $\mathfrak{G}_i$ соответствует частично рекурсивная функция f, принимающая значения 0 и 1, с той же областью определения, что и $\mathfrak{G}_i$, и такая, что (1) если $\varphi_i = f$, то $\mathfrak{G}_i(n) < \Phi_j(n)$ для почти всех n; (2) существует номер k такой, что $\varphi_k = f$ и $\Phi_k(n) < h(n, \mathfrak{G}_i(n))$ для почти всех n; (3) существует общерекурсивная функция τ, отображающая i в k для соответствующей функции f. Дж. Хартманис и Стирнз [122] доказали специальную форму этой теоремы, когда в качестве меры сложности вычислений рассматривается время вычисления на многоленточных машинах Тьюринга. В этих условиях $h(x, y) = y^2$.

В связи с результатом Блюма [76] возникает естественный вопрос, можно ли в условии (*) заменить сложность Φ_i самой функцией φ_i. Отрицательный ответ на него получен Б. А. Трахтенбротом [57] и А. Бородиным [83] в следующей теореме о промежутках. Для любой меры Φ и любой общерекурсивной функции h существует общерекурсивная монотонно возрастающая функция t такая, что $C^{\Phi}_{t(n)} = C^{\Phi}_{h(n, t(n))}$. Из этой теоремы, в частности, вытекает, что сигнализирующие функции редко разбросаны среди рекурсивных функций. Кроме того, отсюда также следует, что один и тот же класс сложности можно именовать совершенно различными функциями.

Часто функции, именующие классы сложности, оказываются очень сложными в том смысле, что их сложность сильно отличается от их величины. Это приводит к проблеме именования всех классов функциями, которые не слишком сложны, например, «честными» функциями. Функция называется g-честной относительно меры Φ, если $f \in C_f^\Phi$, где $t(x)=g(x, f(x))$. Следующий результат принадлежит Маккрейту и Мейеру [156]. Для каждой меры Φ существует функция g такая, что для всякой рекурсивной функции t найдется g-честная функция t', для которой $C_t^\Phi = C_{t'}^\Phi$. Как показали Маккрейт и Мейер, условие честности в данной теореме можно заменить условием измеримости, поскольку каждое измеримое множество состоит из g-честных функций для подходящей функции g.

Мейер и Ритчи [166] исследовали элементарно честные рекурсивные функции (т. е. g-честные функции, где функция g может быть произвольной функцией, элементарной по Кальмару). В качестве меры сложности рассматривалось время вычисления на машине Тьюринга. Доказано, что класс элементарно честных функций совпадает с классом функций, имеющих элементарные графики. Класс функций, элементарных относительно какой-нибудь элементарно честной функции, называется элементарно честным классом. Классы $\mathscr{E}^n$ Гжегорчика при $n \geqslant 3$ являются элементарно честными. Класс всех общерекурсивных функций не является элементарно честным. При $n \geqslant 3$ между $\mathscr{E}^n$ и $\mathscr{E}^{n+1}$ имеется плотно упорядоченное отношением включения множество элементарно честных классов. Между $\mathscr{E}^3$ и $\mathscr{E}^4$ содержится бесконечно много не сравнимых по включению элементарно честных классов.

Рассмотрим проблему существования функций, не имеющих наилучших вычисляющих алгоритмов. Верна следующая теорема об ускорении (Блюм [76], [77], [80]). Пусть Φ — мера сложности и $r(n, m)$ — общерекурсивная функция. Существует общерекурсивная функция $\varphi(n)$ со значениями 0 и 1 такая, что для каждого i, если $\varphi_i(n)=\varphi(n)$, то найдется j, для которого $\varphi_j(n)=\varphi(n)$ и $\Phi_i(n) \geqslant r(n, \Phi_j(n))$ для почти всех n. Из данной теоремы следует, что невозможно классифицировать функции по сложности их вычисления, так как некоторые функции не имеют минимальной сложности.

Следующие результаты связаны с вопросом Блюма: если функция φ допускает ускорение с помощью r, то должна ли существовать общерекурсивная функция, ограничивающая «объем» программы, необходимой для достижения этого ускорения. Как показали Мейер и Фишер [162], объем убыстряющей программы иногда можно оценить эффективно. Однако из результатов Хелма и Янга [124] следует, что это можно сделать не всегда. Точнее, для любой общерекурсивной функции $r(x, y) \geqslant y$ существует общерекурсивная функция φ со значениями 0, 1 такая, что 1) φ допускает ускорение с помощью r: $\Phi_i(n) > r(n+1, \Phi_j(n+1))$, 2) объем ускоренной функции не может быть эффективно ограничен. Т. е. не существует частично рекурсивной функции h такой, что из $\varphi_i = \varphi$ вытекает, что $h(i)$ определено и найдется такое j, что $|j| \leqslant h(i)$, $\varphi_i = \varphi$ и $\Phi_i(n) \geqslant \Phi_j(n+1)$ для почти всех n (здесь $|j|$ — объем программы, вычисляющей функцию φ_j).

Вопрос о возможности ускорения перечисления рекурсивно перечислимых множеств исследовался в работах [216, 217]. Янг [217] доказал, что существует рекурсивно перечислимое множество, которое обладает следующим свойством. Для любого данного порядка перечисления найдется другой порядок, который обеспечивает ускорение перечисления в такой степени, какая не может быть достигнута при исходном порядке перечисления.

Будем говорить, что класс сложности C_t^Φ рекурсивно перечислим, если существует рекурсивно перечислимое множество номеров, которое содержит номер каждой функции из C_t^Φ и состоит только из номеров функций класса C_t^Φ. Как показал Хартманис [122], временная мера для машин Тьюринга имеет рекурсивно перечислимые классы сложности. Этот результат не переносится на произвольные меры сложности. Положим $F = \{\varphi_i(n) / \varphi_i(n)$ всюду определена и $\varphi_i(n) = 0$ почти всюду$\}$. Имеет место следующая теорема.

Пусть Φ — мера сложности, а функция t такова, что $F \subseteq C_t^\Phi$. Тогда для всякой общерекурсивной функции $\varphi_j(n) \geqslant t(n)$ класс сложности $C_{\varphi_j}^\Phi$ рекурсивно перечислим. В то же время существуют меры сложности, для которых «малые» классы сложности не являются рекурсивно перечислимыми. Доказательства приведенных результатов принадлежат Льюису [146] и Робертсону и Ландвеберу [144, 183].

Естественно рассмотреть вопрос о том, является ли объединение любой вычислимой последовательности возрастающих классов сложности само классом сложности. Утвердительный ответ на него получен Маккрейтом и Мейером [156]. Именно, пусть $\{f_i | i = 1, 2, \ldots\}$ — вычислимая последовательность общерекурсивных функций такая, что для любых i и n имеем $f_i(n) < f_{i+1}(n)$. Тогда существует общерекурсивная функция $t(n)$ такая, что $C_t = \bigcup_i C_{f_i}$. С помощью данного результата доказано, что для любой меры сложности Φ, которая связана примитивно рекурсивной функцией с числом шагов одноленточной машины Тьюринга, существует общерекурсивная функция t такая, что множество функций, вычислимых с границей t, в точности совпадает с множеством примитивно рекурсивных функций (см. [84]).

Представляется логичным обобщить понятие класса сложности общерекурсивных функций на классы частично рекурсивных функций. Этот подход был рассмотрен Робертсоном [182, 183]. Как было показано, многие из известных результатов для общерекурсивных функций переносятся и на класс $\mathscr{P}$ частично рекурсивных функций.

Пусть $\{\varphi_i\}$ — стандартная геделевская нумерация семейства частично рекурсивных функций и $W_i = \mathrm{Dom}(\varphi_i)$ — область определения функции φ_i. Для всякой частично рекурсивной функции τ положим $I_\tau^\Phi = \{i \mid \mathrm{Dom}(\tau) \subseteq W_i \,\&\, \Phi_i \leqslant \tau\}$. Частичным классом Φ-сложности τ называется множество $P_\tau^\Phi = \{\varphi_i \mid i \in I_\tau^\Phi\}$. Рассматривается еще одно определение частичного класса сложности: $\widehat{\mathscr{P}}_\tau^\Phi = \{\psi \mid \psi \in \mathscr{P} \,\&\, (\exists i)\,[i \in I_\tau^\Phi \,\&\, (\forall x)[x \in \mathrm{Dom}(\tau) \Rightarrow \psi(x) = \varphi_i(x)]]\}$. Показано, что второе определение дает более широкие классы сложности. Однако если L_i — ленточная сигнализирующая, то $\widehat{\mathscr{P}}_{L_i}^L = \mathscr{P}_{L_i}^L$. Далее, для произвольной меры Φ существует общерекурсивная функция $S(n, m)$ такая, что для любого i, $\widehat{\mathscr{P}}_{\varphi_i(n)}^\Phi \subseteq \mathscr{P}_{S(n,\, \Phi_i(n))}^\Phi$ и $\widehat{\mathscr{P}}_{\Phi_i(n)}^\Phi \subseteq \mathscr{P}_{S(n,\, \Phi_i(n))}^\Phi$. Для любой меры Φ существуют сколь угодно быстрорастущие функции ψ такие, что $\mathscr{P}_\psi^\Phi \subset \widehat{\mathscr{P}}_\psi^\Phi$.

Будем говорить, что множество $B \subseteq N$ является представлением класса функций $C \subset \mathscr{P}$, если $C = \{\varphi_i \mid i \in B\}$. По аналогии с классами сложности общерекурсивных функций установлено, что для любой меры Φ и всех достаточно больших функций φ_i классы $\mathscr{P}_{\varphi_i}^\Phi$ и $\widehat{\mathscr{P}}_{\varphi_i}^\Phi$ рекурсивно представимы (т. е. соответствующие множества B рекурсивно перечислимы). С другой стороны, для любой меры Φ и любой функции φ_i существует представление B класса $\mathscr{P}_{\varphi_i}^\Phi$, дополнение к которому рекурсивно перечислимо. То же самое справедливо для классов $\widehat{\mathscr{P}}_{\varphi_i}^\Phi$. Показано, что для любой меры Φ и любой функции τ класс $\mathscr{P} \setminus \widehat{\mathscr{P}}_\tau^\Phi$ рекурсивно представим.

В работе [183] рассмотрено пересечение бесконечной последовательности классов сложности частично рекурсивных функций и доказано, что в любой мере и для любой общерекурсивной функции t существует вычислимая убывающая последовательность функций $\{g_i\}$ такая, что для любого i $g_i \geqslant t$ почти всюду и не существует общерекурсивной функции h, для которой $I_h^\Phi = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_{g_i}^\Phi$.

Будем говорить, что функция F вычисляется не сложнее функции G, если для каждого номера j функции G найдется такой номер i функции F, что для почти всех x, $\Phi_i(x) \leqslant \Phi_j(x)$.

Соответствующее симметричное отношение является отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентности, также называемых степенями сложности, частично упорядочено. Маккрейт [156] доказал, что произвольный счетный вычислимый частичный порядок можно изоморфно вложить в указанное частично упорядоченное множество степеней сложности. Эндертон в работе [104] дал простое доказательство этого результата.

Два результата, связанные с теоремой Бородина о пробелах, получены в работе [91].

1. Существуют общерекурсивные функции $\sigma(i)$ и $h(x, y)$ такие, что для любого i, $\varphi_{\sigma(i)} = \varphi_i$ и $\Phi_i(x) < \Phi_{\sigma(i)}(x) \leqslant h(x, \Phi_i(x))$ почти всюду на области определения функции φ_i.

2. Существует общерекурсивная функция $h(x, y)$ такая, что по любым общерекурсивным функциям $r(x, y)$ и $g(x)$ можно эффективно построить номер u такой, что: а) функция φ_u общерекурсивна,

б) $(\forall x)[\Phi_u(x) > g(x)]$ и в) $(\forall k)(\forall_x^\infty)[h(x, \Phi_k(x)) < \Phi_u(x) \to$
$\to r(x, \Phi_k(x)) < \Phi_u(x)]$.

Мера сложности Φ, введенная Блюмом [76], определена лишь в случае завершения вычислений. Такие меры получили название сильных мер сложности вычислений. Слабой мерой (Аузьелло [68]) называется мера, определенная также и для зацикливающихся вычислений. Лонго [147] аксиоматически определил слабую меру сложности $f(i, x, t)$, характеризующую объем памяти, необходимый в момент времени t машине M_i, работающей над входом x. При этом проблема обнаружения циклов оказывается разрешимой. Пусть мера сложности $v(i, x, T)$ задается как интеграл по времени от $f(i, x, t)$. В работе [148] показано, что для любых двух общерекурсивных функций f и ψ найдется такая общерекурсивная функция, сложность которой по мерам v и Φ превосходит соответственно f и ψ.

§ 8. СЛОЖНОСТЬ ЗАДАНИЯ ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ. СВОЙСТВА МИНИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММ

Идея измерения сложности алгоритма объемом минимальной программы, реализующий этот алгоритм, восходит, по-видимому, к Шеннону [198]. Он предложил рассматривать в качестве меры сложности для машин Тьюринга произведение числа букв входного алфавита на число ее состояний. Однако в таком виде понятие меры сложности использовалось только при изучении минимальных универсальных машин Тьюринга (см. § 13). Обычно фиксируют входной алфавит, а сложность машины Тьюринга определяют как число ее состояний. При таком определении вводятся классы сложности, состоящие из функций, у которых минимальные вычисляющие программы содержат фиксированное число состояний. Шмиттом [188, 189] доказано, что для всякого $n>0$ класс сложности, определяемый минимальными программами с n состояниями, не пуст. Невозможен алгоритм, дающий по произвольной программе машины Тьюринга одну из минимальных (по числу состояний) программ, вычисляющих ту же функцию.

Развитием идеи Шеннона явился переход от языка машин Тьюринга к другим универсальным языкам, пригодным для задания произвольных частично рекурсивных функций. «Гёделизация» подобного языка приводит к геделевской или главной вычислимой нумерации семейства частично рекурсивных функций. Первым предложил рассматривать сложность частично рекурсивных функций в произвольных главных нумерациях Б. М. Клосс [25]. Для любой общерекурсивной функции $K(n)$ (функции сложности) он определил сложность частично рекурсивной функции f как $\min K(n)$, где минимум берется по всем номерам функции f в фиксированной главной нумерации. Было доказано, что в нетривиальных случаях (например, когда $K(n)=n$) функция, дающая по произвольному номеру частично рекурсивной функции ее сложность, не вычислима.

Следующий шаг в этом направлении был сделан Блюмом [79], предложившим так называемые аксиомы меры сложности. Согласно Блюму, общерекурсивная функция $\alpha(n)$ называется мерой сложности (в другой терминологии — мерой объема или критерием сложности), если α удовлетворяет следующим двум условиям (аксиомам):

1) для всякого $k\geqslant 0$ множество $\alpha^{-1}(k)=\{i:\alpha(i)=k\}$ не более чем конечно;

2) существует общерекурсивная функция f такая, что $\alpha^{-1}(k)=D_{f(k)}$, где $\{D_i\}$ — стандартная вычислимая нумерация семейства всех конечных множеств.

Легко доказывается, что для любых мер сложности $\alpha(n)$, $\beta(n)$ найдется общерекурсивная функция h такая, что $\alpha(n)\leqslant h(\beta(n))$ и $\beta(n)\leqslant h(\alpha(n))$. В работе [79] было показано также, что для произвольной геделевской нумерации $\{\varphi_i\}$, произвольных меры сложности $\alpha(n)$, общерекурсивной функции $g(n)$ с бесконечной областью значений и общерекурсивной функции $f(n)$ эффективно по g, f найдутся такие числа i, j, что $\varphi_i=\varphi_{g(j)}$ и $f(\alpha(i))<\alpha(g(j))$. Последнее означает, что в бесконечной вычислимой последовательности $\{g(j)\}$ «программ» для частично рекурсивных функций всегда можно найти столь «плохую» программу, что ее можно существенно улучшить.

В дальнейших исследованиях, посвященных сложности задания частично рекурсивных функций, рассматривались, как правило, главные нумерации семейства всех частично рекурсивных функций и меры сложности, удовлетворяющие аксиомам Блюма. Особый интерес представляет мера сложности, равная длине двоичного изображения чисел. Дело в том, что, как показали независимо А. Н. Колмогоров [28] и Соломонов [201], в этом случае существует главная нумерация $\{\varphi_i\}$, называемая асимптотически оптимальной (в другой терминологии — аддитивно оптимальной) такая, что для любой другой нумерации $\{\varkappa_i\}$ (не обязательно главной) найдется константа C такая, что сложность произвольной частично рекурсивной функции в нумерации $\{\varphi_i\}$ больше сложности этой же функции в нумерации $\{\varkappa_i\}$, быть может, только на константу C. Не всякая «естественная» геделизация универсального языка приводит к асимптотически оптимальной нумерации. Так, например, Н. П. Тер-Захарян [53] доказала, что язык нормальных алгорифмов А. А. Маркова в этом смысле асимптотически оптимален, а язык рекурсивных функций — нет.

В работах [33—35] Г. Б. Маранджяна содержится целая серия результатов об асимптотически оптимальных и близких к ним нумерациях (функциях). Здесь рассмотрены различные меры сложности, называемые автором шкалами сложности, и нумерации, асимптотически оптимальные для данных шкал сложности. Доказано, что асимптотически оптимальные функции не только не могут быть продолжены до общерекурсивных, но даже в том или ином смысле не могут конструктивно аппроксимироваться общерекурсивными функциями. Множество минимальных номеров частично рекурсивных функций, называемое стержнем нумерации, в асимптотически оптимальных нумерациях иммунно, но не гипериммунно. Всякое рекурсивно перечислимое подмножество стержня асимптотически оптимальной нумерации конструктивно ограничено. Г. Б. Маранждяном введен целый ряд операций, сохраняющих асимптотическую оптимальность. Им также рассмотрены вопросы построения асимптотически оптимальных нумераций для примитивно рекурсивно замкнутых классов общерекурсивный функций.

Серия работ [96, 99, 157, 160, 161] различных авторов посвящена изучению множества минимальных программ и сравнению сложности общерекурсивных функций в различных субрекурсивных языках. В отличие от класса всех частично рекурсивных функций здесь в некоторых «естественных» нумерациях множество минимальных номеров может быть рекурсивно перечислимым. Так обстоит дело с множеством примитивно рекурсивных функций в нумерации, определяемой индуктивным способом порождения класса примитивно рекурсивных функций. Характерен для этого направления результат Мейера [157] о существенном сокращении длины минимальной программы для некоторых простых примитивно рекурсивных функций при переходе от сравнительно «бедного» языка к достаточно богатому. Более точно, пусть h — быстрорастущая функция, рекурсивная относительно $0'$. Существует программа сложности n для 2-рекурсивной функции, почти всюду равной 0, такая, что наименьшая примитивно рекурсивная программа для этой функции имеет сложность, большую $h(n)$.

Для фиксированных главной нумерации $\{\varphi_i\}$ меры сложности α и множества натуральных чисел R можно определить сложность произвольной частично рекурсивной функции f как $\min \alpha(n)$, где минимум берется по всем n, для которых φ_n совпадает с f на множестве R. Первые результаты (см. [73, 74]) в этом направлении показывают, что основные свойства сложности для произвольных блюмовских мер будут справедливы и здесь.

§ 9. СЛОЖНОСТЬ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Для произвольной одноместной частично рекурсивной функции F можно определить сложность $K_F(x)$ числа x как $\min\{l(p) : F(p)=x\}$, где $l(p)$ — длина двоичной записи числа p. В случае, когда F не принимает значения x, полагают $K_F(x)=\infty$. Сложность числа x здесь существенно зависит от выбора функции F. Однако существует частично рекурсивная функция G — и этот факт является основополагающим в теории сложности алгоритмов, для которой $K_G(x)$, с точностью до аддитивной константы, не больше $K_F(x)$ при любой другой функции F. Иными словами, для любой частично рекурсивной функции F существует такая константа C_F, что для всех x $K_G(x)\leqslant K_F(x)+C_F$. Функция G, обладающая указанным свойством, называется оптимальной (другие названия: асимптотически оптимальная, аддитивно оптимальная). Идея введения функции сложности K_F и доказательство существования оптимальной частично рекурсивной функции принадлежит А. Н. Колмогорову [28] и Соломонову [202]. Иногда рассматривают следующий вариант колмогоровской сложности. Пусть фиксирована некоторая вычислимая нумерация $\{\varphi_i\}$ семейства одноместных частично рекурсивных функций. Ее можно представить себе в виде двухместной частично рекурсивной функции $F(i, x)$ такой, что $F(i, x)=\varphi_i(x)$ для любых i, x. Тогда можно положить $K_F(x)=\min\{l(p) : F(p, 0)=x\}$. Вместо константы 0, разумеется, можно взять любую другую константу. Так же, как в [28, 202], легко доказать существование оптимальной частично рекурсивной функции G. Этот подход к определению сложности числа оказывается особенно полезным, когда приходится сравнивать сложность $K_G(x)$ с двумя другими сложностями: условной и сложностью разрешения. Для фиксированной двухместной частично рекурсивной функции $F(x, y)$ условная сложность $K_F(x|y)$ числа x при известном y была определена А. Н. Колмогоровым [28] как $\min\{l(p) : F(p, y)=x\}$. Им же было установлено в этом случае существование оптимальной частично рекурсивной функции $G(x, y)$, т. е. такой функции, что для любой другой частично рекурсивной функции $F(x, y)$ найдется такая константа C_F, что при всех x, y будет $K_G(x|y) \leqslant K_F(x|y)+C_F$. Часто для фиксированной оптимальной функции G сложность числа x определяют как $K_G(x|n)$, где n — длина двоичной записи числа x.

Сложность разрешения $M_F(x)$ конечной последовательности x для языка нормальных алгорифмов была предложена А. А. Марковым [36, 37]. В языке рекурсивных функций его определение выглядит так. Пусть x_i — i-ый символ последовательности x, n — длина x. Тогда для любой частично рекурсивной функции $F(x, y)$ $M_F(x)=\min\{l(p) : (\forall i \leqslant n) (F(p, i)=x_i)\}$. Если чисел p с указанным свойством не существует, то полагаем $M_F(x)=\infty$. Для этого понятия сложности также легко доказывается существование оптимальной частично рекурсивной функции (см. Лавленд [149]). В дальнейшем, если не оговаривается противное, мы предполагаем, что фиксирована одна оптимальная частично рекурсивная функция $G(x, y)$, относительно которой рассматриваются все три введенные сложности $K_G(x)$, $K_G(x|y)$, $M_G(x)$. Индекс G при этом мы будем опускать.

Функции $K(x)$, $K(x|y)$, $M(x)$ не вычислимы. Более того, никакая частично рекурсивная функция с бесконечной областью определения не может во всей области определения совпадать, например, с $K(x)$. (А. Н. Колмогоров [28]). Дальнейшие свойства функции $K(x)$ рассматривались Г. Б. Маранджяном [33—35]. Невычислимость функции $M(x)$ для языка нормальных алгорифмов доказана Д. А. Остроуховым [48]. С точностью до аддитивной константы имеют место неравенства (см. [13, 28]): $K(x|n) \leqslant M(x) \leqslant K(x) \leqslant n$, где n — длина двоичной записи числа x. Вместе с тем для любого $\varepsilon>0$ справедливы и такие неравенства:

$$K(x) \leqslant M(x)+(1+\varepsilon)\log_2 n+C_1,$$

$$M(x) \leqslant K(x|n)+(1+\varepsilon)\log_2 n+C_2.$$

Разность $M(x)—K(x|n)$ с точностью до аддитивной константы может достигать величины $\log_2 n$ даже для бесконечного числа двоичных последовательностей x, являющихся началами одной и той же бесконечной двоичной последовательности (Лавленд [149]). В отличие от сложностей $K(x)$ и $K(x|n)$ сложность $M(x)$ обладает свойством «монотонности»: если последовательность x есть начало последовательности y, то для любой частично рекурсивной функции F $M_F(x) \leqslant M_F(y)$.

Все три введенные сложности можно, разумеется, рассматривать как для конкретных алгоритмических языков и мер сложности, так и для произвольных асимптотически оптимальных нумераций и мер сложности, удовлетворяющих аксиомам Блюма. Так, в случае нормальных алгорифмов идея измерения сложности конечных объектов (булевых функций, конечных последовательностей) числом букв в схеме алгорифма впервые была высказана А. А. Марковым [36] и В. А. Кузьминым [32], а в случае машин Тьюринга — В. А. Кузьминым [32] и Чейтиным [90]. Что касается изучения произвольных мер сложности, то это направление не получило значительного развития. Меры сложности, близкие к длине двоичной записи чисел, были рассмотрены Г. Б. Маранждяном [33]. Некоторые обобщения сложностей $K(x)$ и $M(x)$ предлагались И. Д. Заславским [12] и М. И. Кановичем [15].

§ 10. СЛОЖНОСТЬ ЗАДАНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Первыми стали изучать сложность задания булевых функций в алгоритмических языках А. А. Марков [36, 37] и В. А. Кузьмин [32]. Именно, для языка нормальных алгорифмов ставилась задача оценки функции $L(n)$ (функции Шеннона), равной $\max M(x)$, где максимум берется по всем стандартным записям x булевых функций от n аргументов. В качестве меры сложности нормальных алгорифмов рассматривалось число всех символов, входящих в схему нормального алгорифма. В работах [36, 37] А. А. Марков установил совпадающие по порядку верхнюю и нижнюю оценки функции $L(n)$ в случае нормальных алгорифмов в пятибуквенном алфавите. В. А. Кузьмин [32] установил асимптотику функции $L(n)$. Она имеет вид $2^n/\log_2 k$, где k — число букв алфавита нормального алгорифма. Аналогичным образом можно ввести функцию $L(n)$ для случая вычисления булевых функций одноленточными машинами Тьюринга с k-буквенным внешним алфавитом ($k \geqslant 2$). Если в качестве меры сложности взять число состояний машины Тьюринга, то как показал В. А. Кузьмин [32], имеет место асимптотическое равенство $L(n) \sim 2^n/n(k-1)$. Сходный результат, правда, при ограничении $k \geqslant 3$, был получен Чейтиным [90].

А. А. Марков [36, 37] предложил оценивать сложность $B(m, n)$ распознавания m-вычислимости булевых функций от n аргументов. Здесь величина $B(m, n)$ равна сложности минимального алгорифма, распознающего для всякой булевой функции от n аргументов (заданной вектором значений), является ли она m-вычислимой, т. е. вычислимой нормальным алгорифмом со сложностью, не превосходящей m. Если рассматривать данную задачу для произвольной оптимальной нумерации и меры, равной длине двоичной записи числа, то $B(m, n) \sim m$. Нижняя оценка получена в работах [36, 37], а верхняя — Н. В. Петри в работе [50]. Дальнейшие результаты в этом направлении, в том числе при ограничениях на время работы, получил М. И. Канович [17].

§ 11. СЛОЖНОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ ДВОИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Для бесконечной двоичной последовательности x через x^n обозначим начало последовательности x длины n. Хотя для любого n найдется такая последовательность x, что с точностью до аддитивной константы (не зависящей от n) $n \leqslant M(x^n) \leqslant K(x^n)$, последовательностей x, у которых все n-фрагменты максимально сложны, не существует. Это вытекает из следующего результата П. Мартин—Лёфа [38]. Если общерекурсивная функция $f(n)$ такова, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-f(n)}$ расходится, то для любой последовательности x существует бесконечно много n, для которых $K(x^n) \leqslant n - f(n)$. «Максимально сложные» последовательности содержатся уже в классе $\Delta_2 = \Sigma_2 \cap \Pi_2$ иерархии Клини — Мостовского. Именно, если для общерекурсивной функции $f(n)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-f(n)}$ сходится эффективно (т. е. существует общерекурсивная функция g такая, что $\sum\limits_{n \geqslant g(k)} 2^{-f(n)} \leqslant 2^{-k}$), то существует последовательность x из класса Δ_2 такая, что начиная с некоторого n_0, $M(x^n) \geqslant n - f(n)$ (Н. В. Петри [51]). Как показал Мартин—Лёф [152], почти все двоичные последовательности имеют сложность, асимптотически равную n. Более точно, если P — вероятностная мера такая, что совокупность всех двоичных последовательностей, имеющих началом произвольную фиксированную последовательность x^n, имеет меру $1/2^n$, то для произвольной функции $f(n)$ из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-f(n)}$ вытекает равенство $P\{x : (\forall_n^\infty) [M(x^n) \geqslant n - f(n)]\} = 1$.

Нетрудно видеть, что ограниченность функции $M(x^n)$ (как функции от n) является необходимым и достаточным условием рекурсивности последовательности x. Иначе обстоит дело для функции $K(x^n | n)$. Как показал Лавленд [149], существует та-

кая константа C, что для континуального числа пос
ностей x неравенство $K(x^n|n) \leqslant C$ выполняется при б
числе значений n. Вместе с тем, если величина $K(x^n$
чена для всех n, то последовательность x рекурси
[149], А. Н. Колодий, Л. А. Левин, В. А. Мишин [13

Перейдем теперь к последовательностям, характер
для рекурсивно перечислимых множеств. Следующ
зультата, полученные независимо Я. М. Барздин
Н. В. Петри [50], являются одними из центральных
ласти. Для всякой рекурсивно перечислимой послед
сти x найдется такая константа C, что $M(x^n) \leqslant \log_2 n$
ствует рекурсивно перечислимая последовательность
станта C такие, что $M(x^n) \geqslant \log_2 n - C$. Н. В. Пет
М. И. Канович [19] установили, что для любой не
неограниченной общерекурсивной функции $f(n)$ найде
сивно перечислимая последовательность x и констант
что $\log_2 f(n) - C \leqslant M(x^n) \leqslant \log_2 f(n) + C$. Дальнейшие
по сложности разрешения рекурсивно перечислимых
к ним множеств получены М. И. Кановичем [20]. В
для характеристической последовательности любого
того множества верхней оценкой сложности разреше
может являться, начиная с некоторого n_0, любая неогр
неубывающая общерекурсивная функция.

Особый интерес вызывает получение неограничен
рекурсивных нижних оценок для сложности распозна
кретных предикатов в теории алгоритмов, математи
гике и т. д. Я. М. Барздинем [5] была получена нижн
вида $\log_2 n$ для сложности $M(x^n)$ распознавания посл
ностей, которые являются характеристическими для
множеств нетривиальных классов частично рекурсив
ций в оптимальных нумерациях. В. И. Хомич [61]
нижние оценки экспоненциального типа для сложн
мальных алгорифмов, распознающих реализуемость
замкнутых логико-арифметических формул, а М. И.
Б. А. Кушнер [22] — сложности некоторых проблем,
щих в конструктивном анализе. Связь сложности р
рекурсивно перечислимых множеств (т. е. характер
последовательностей этих множеств) с некоторыми ви
ноты и продуктивности была вскрыта М. И. Канович
тах [16, 18, 21]. Так, рекурсивно перечислимое множес
неограниченную общерекурсивную нижнюю оценку
разрешения тогда и только тогда, когда оно полно отн
слабой табличной сводимости или w-сводимости (см.

Вопросы влияния точности разрешающей проц
сложность разрешения исследовал Я. М. Бардзинь [4]
тимальной частично рекурсивной функции $A(p, y)$, п
тельности x и функции $\varepsilon(n)$ обозначим через $M(x^n, \varepsilon($

мум $l(p)$, где минимум берется по всем p таким, что

$$\frac{|\{y: y \in N_n \,\&\, A(p, y) = x(y)\}|}{n} \geqslant 1 - \varepsilon(n),$$

$N_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. В работе [4] показано, что для любой вычислимой функции $\varepsilon(n)$, $0 < \varepsilon(n) < 1$, принимающей рациональные значения, для любой рекурсивно перечислимой последовательности x и для всех натуральных n справедлива оценка $M(x^n, \varepsilon(n)) \leqslant \log_2 \log_2 n + 3 \log_2 \frac{1}{\varepsilon(n)} + O(1)$. С другой стороны, существует рекурсивно перечислимая последовательность x такая, что для любой функции $\varepsilon(n)$, $0 \leqslant \varepsilon(n) \leqslant \frac{1}{10}$, найдется бесконечно много значений n, для которых $M(x^n, \varepsilon(n)) \geqslant \geqslant \log_2 \log_2 n - O(1)$.

Пусть для фиксированной оптимальной частично рекурсивной функции $F(p, i)$ задана мера сложности вычислений $\{\Phi_i\}$, удовлетворяющая аксиомам Блюма. Пусть $t(n)$ — общерекурсивная функция. Сложностью (разрешения) последовательности $x^n = x(0) \ldots x(n-1)$ при ограничении t называется величина

$$M_\Phi^t(x^n) = \min \{l(p): (\forall i < n) \quad [F(p, i) = x(i) \,\&\, \Phi_p(i) \leqslant t(n)]\}.$$

Обычно в качестве Φ рассматривают определенное в том или ином смысле время вычисления. Поэтому в дальнейшем мы будем опускать индекс Φ в обозначении $M_\Phi{}^t(x^n)$. Довольно просто усматривается, что существует общерекурсивная функция f и константа C такие, что для любой последовательности x^n $M^f(x^n) \leqslant n + C$. В основе многих результатов о сложности $M^t(x^n)$ лежит то обстоятельство, что для бесконечной последовательности x сложность $M^t(x^n)$ при любой общерекурсивной функции t может быть существенно выше сложности $M(x^n)$. Это проявляется уже для рекурсивных последовательностей x: для любой общерекурсивной функции t и любого $\varepsilon > 0$ существует рекурсивная последовательность x такая, что $(\forall_n{}^\infty)$-$[M^t(x^n) \geqslant n - (1+\varepsilon) \log_2 n]$ (Я. М. Барздинь [5]). Если обратиться к рекурсивно перечислимым последовательностям, то этот результат может быть значительно усилен. Я. М. Барздинь [5] доказал, что существует рекурсивно перечислимая последовательность x такая, что для любой общерекурсивной функции t найдется константа C_t, для которой $(\forall_n) [M^t(x^n) \geqslant C_t \cdot n]$. Аналогичный результат для нормальных алгорифмов получил Н. В. Петри [51]. Им же показано, что сложность $M^t(x^n)$ для некоторых рекурсивно перечислимой последовательности x и общерекурсивной функции t может быть по порядку равной $\log_2 n$. Вместе с тем существуют рекурсивно перечислимые последовательности, которые достаточно сложны при любом ограничении

t. Именно, М. И. Канович и Н. В. Петри [23] построили пример рекурсивно перечислимой последовательности x такой, что для любой общерекурсивной функции t будет $(\exists_n^\infty)[M^t(x^n)\geqslant n/2]$.

§ 12. СЛОЖНОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ И КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ

Мы считаем, что данная тема заслуживает специального обзора. Ниже приводятся лишь основные результаты количественного характера в этом направлении.

Функция $F(v)$, определенная на двоичных словах и принимающая рациональные значения, называется полувычислимой, если существует общерекурсивная монотонно не убывающая по аргументу k функция $r(v, k)$ такая, что $F(v)=\lim\limits_{k\to\infty} r(v, k)$. Функция $F(v)$ называется полувычислимым тестом, если существует общерекурсивная функция $g(m)$ такая, что $P\{x:\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}F(x^n)\geqslant m\}\leqslant\frac{1}{g(m)}$, где P—вероятностная мера, соответствующая бернуллиевским испытаниям с вероятностью 1/2. Последовательность x называется случайной, если для любого полувычислимого теста F имеет место $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}F(x^n)<\infty$. Ясно, что случайные последовательности должны быть достаточно сложны. Это подтверждается следующей теоремой (Мартин—Лёф [38]).

Если $f(n)$—общерекурсивная функция, для которой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-f(n)}$ сходится эффективно, а x—случайная последовательность, то $(\forall^\infty n)[K(x^n\,|\,n)\geqslant n-f(n)]$. Из теоремы видно, что случайная последовательность не может быть рекурсивно перечислимой. Мартин—Лёфом [153] доказано также, что «очень» сложные последовательности случайны. Более точно, если для последовательности x существует константа C такая, что $(\exists^\infty n)[K(x^n\,|\,n)\geqslant n-C]$, то последовательность x случайна.

Оказывается, что случайные последовательности можно полностью охарактеризовать в сложностных терминах. Для этого понятие сложности необходимо сузить. Назовем частично рекурсивную функцию $f(v)$, определенную на двоичных последовательностях и принимающую в качестве значений также двоичные последовательности, монотонной, если для любых двух конечных последовательностей v и w из того, что v есть начало w и $f(w)$ определено, вытекает, что $f(v)$ также определено и $f(v)$ является началом $f(w)$. Функцию сложности $K(v)$, в определении которой участвуют только монотонные частично рекурсивные функции, обозначим через $\widetilde{K}(v)$ (существование оптимальной функции $\hat{K}(v)$ доказывается так же, как и существование функции $K(v)$). Имеет место следующая теорема (Шнорр [193]). Последовательность x случайна тогда и только тогда, когда существует такая константа C, что для любого n $n-C \leqslant \hat{K}(x^n) \leqslant n+C$. Сложность случайных последовательностей для иных определений случайности рассматривалась В. Н. Агафоновым [1, 3], Мартин-Лёфом [154, 155], ди Паола [172]. Дальнейший анализ понятий сложности и случайности произведен Шнорром [190—192, 194].

Для произвольных двоичных слов v, w естественно считать алгоритмическим количеством информации в слове w о слове v величину $I(w:v)=K(v)-K(v|w)$. Как известно, для вероятностного количества информации справедлив закон коммутативности $I(\xi:\eta)=I(\eta:\xi)$. В случае алгоритмического количества информации это не так. Обозначим через $\langle v, w\rangle$ какую-нибудь вычислимую функцию, осуществляющую взаимно однозначное отображение пар двоичных слов на множество всех двоичных слов. Следующие два неравенства установлены А. Н. Колмогоровым и Л. А. Левиным [13]:

$$|I(w:v)-I(v:w)| \leqslant \log_2 K(\langle v, w\rangle),$$

$$|I(w:v)-(K(v)+K(w)-K(\langle v, w\rangle))| \leqslant \log_2 K(\langle v, w\rangle).$$

Здесь $\leqslant$ — неравенство по порядку.

§ 13. МИНИМАЛЬНЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Вопросы построения минимальных универсальных алгоритмов, т. е. алгоритмов с минимальной возможной сложностью, рассматривались для наиболее употребительных формализаций понятия алгоритма: машин Тьюринга, нормальных алгорифмов Маркова, исчисления равенств Клини.

В 1959 году Шеннон [198] доказал, что существуют универсальные машины Тьюринга в классах машин с 2 внутренними состояниями или с 2 символами на ленте. Он предложил использовать в качестве меры сложности для машин Тьюринга произведение числа внутренних состояний на число символов внешнего алфавита. Ватанабе [212] построил универсальную машину Тьюринга с 8 состояниями и 5 символами на ленте. Им была указана еще более простая универсальная машина с 6 состояниями и 5 символами на ленте, однако при этом допускались бесконечные коды моделируемых машин Тьюринга. Дальнейшим продвижением в данном направлении явились результаты Минского [167—168], построившего универсальные машины Тьюринга с 6 состояниями и 6 символами и с 7 состояниями и 4 символами. Последний результат остается пока наилучшим по сложности.

Некоторые исследователи рассматривали задачу построения минимальной универсальной машины для более мощных в вычислительном аспекте вариантов машин Тьюринга. Так, Бём [82] построил универсальную машину Тьюринга с 3 состояниями, 3 ленточными символами и 3 лентами. Хупер [132] улучшил этот результат, установив существование универсальных машин Тьюринга с соответствующими параметрами 2, 3, 2 и 1, 2, 4.

Ни одному из авторов не удалось доказать, что построенная им универсальная машина имеет наименьшую возможную сложность. Этим, вероятно, можно объяснить возникновение серии работ, в которых доказывается неуниверсальность машин Тьюринга небольшой сложности. Еще Шенноном [198] было установлено, что не существует универсальных машин Тьюринга с одним состоянием. Впоследствии Ю. А. Крюков указал для этого случая достижимые верхние оценки времени и зоны работы [30]. Херман [131] сделал то же самое для машин Тьюринга с многомерными лентами. Для машин Поста, которые отличаются от машин Тьюринга тем, что не могут одновременно записывать новый символ и сдвигать головку, неуниверсальность доказана для случая двух состояний [64]. О разрешимости проблемы останова для машин Тьюринга с 2 состояниями и 2 символами на ленте было без доказательства объявлено Минским и Боброу [167]. Идея доказательства этого факта содержится в работе [29] Ю. А. Крюкова. Более подробное изложение приведено Нодзаки [170], где утверждается также разрешимость проблемы останова для машин Тьюринга с 2 состояниями и 3 символами на ленте, однако при этом на машины Тьюринга налагаются необщепринятые ограничения. Ю. А. Крюков [30] сообщил о разрешимости проблемы останова для машин Тьюринга с 3 состояниями и 2 символами на ленте.

Существенно меньше работ посвящено оценкам сложности универсальных нормальных алгорифмов Маркова. Э. С. Орловский [47] указал способ построения по всякому алфавиту A с n буквами нормального алгорифма в 15-буквенном расширении алфавита A, универсального для нормальных алгорифмов в алфавите A и имеющего сложность (общее число символов) $10n^2+29n+44$. Д. А. Остроухов [49] понизил эту оценку до $10n+515$, пользуясь при этом 6-буквенным расширением исходного алфавита. В. Г. Жаров [11] построил нормальный алгорифм со сложностью $5n+296$, универсальный для нормальных алгорифмов в n-буквенном алфавите, и доказал, что подобный алгорифм должен иметь сложность, не меньшую $5n—1$.

Интересные результаты для исчисления равенств Клини получены Д. Скордевым [52]. Опираясь на некоторые факты из комбинаторной логики, он доказал, что всякая частично рекурсивная функция ω, удовлетворяющая при некотором натуральном m соотношениям

$$\omega(\nu_m(y, 0), z) \simeq \nu_m(y, z),$$
$$\omega(\nu_m(0, x+1), z) \simeq x,$$
$$\omega(\nu_m(y+1, x+1), z) \simeq \omega(\omega(x, z), \omega(y, z)),$$

является главной универсальной функцией для семейства всех одноместных частично рекурсивных функций. Здесь ν_m — примитивно рекурсивная функция, определяемая равенствами:

$$\nu_m(0, 0) = 0,$$
$$\nu_m(0, x+1) = \nu_m(x, 0) + 1,$$
$$\nu_m(x+1, y) = \nu_m(x, y+1) + m.$$

С использованием этого факта Д. Скордев построил нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ в 6-буквенном алфавите, который при некотором естественном способе кодирования аргументов вычисляет главную универсальную функцию. Алгорифм $\mathfrak{A}$ состоит из 18 простых формул подстановок, длина его изображения равна 128.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Агафонов В. Н.*, Нормальные последовательности и конечные автоматы. В сб.: «Пробл. кибернетики». Вып. 20. М., «Наука», 1968, 123—129 (РЖМат, 1969, 8В219)
2. —, Сложность алгоритмов и вычислений. 2. Новосибирск, изд-во, НГУ, 1975
3. —, Сложность вычисления псевдослучайных последовательностей. Алгебра и логика. Семинар, 1968, 7, № 2, 4—19 (РЖМат, 1969, 1А98)
4. *Барздинь Я. М.*, Сложность и точность решения начальных кусков проблемы вхождения в рекурсивно перечислимое множество. Докл. АН СССР, 1971, *199*, № 2, 262—264 (РЖМат, 1971, 12А66
5. —, Сложность программ, распознающих принадлежность натуральных чисел, не превосходящих, рекурсивно перечислимому множеству. Докл. АН СССР, 1968, *182*, № 6, 1249—1252 (РЖМат, 1969, 3А50)
6. —, Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга. В сб.: «Пробл. кибернетики». Вып. 15. М., «Наука», 1965, 245—248 (РЖМат, 1966, 4В96)
7. *Брейтбарт Ю. Я.*, Об автоматной и «зонной» сложности предиката «быть -ой степенью числа». Докл. АН СССР, 1971, *196*, № 1, 16—19 (РЖМат, 1971, 6В409)
8. *Бухштаб Ю. А.*, Реализуемость функций на одномерных итеративных сетях в реальное время. В сб.: «Пробл. кибернетики». Вып. 22. М., «Наука», 1970, 85—94 (РЖМат, 1970, 9В473)
9. *Валиев М. К.*, Некоторые оценки времени вычислений для машин Тьюринга со входом. Кибернетика, 1970, № 6, 26—32 (РЖМат, 1971, 5В439)
10. *Гладкий А. В.*, *Диковский А. Я.*, Теория формальных грамматик. Теория вероятн. Мат. статистика. Теорет. кибернетика. Т. 7. (Итоги науки и техн.)», 1972, 107—142
11. *Жаров В. Г.*, Об оценке сложности членов конструктивных последовательностей нормальных алгорифмов. Докл. АН СССР, 1972, *203*, № 4, 746—748 (РЖМат, 1972, 8А86)

12. *Заславский И. Д.*, О псевдофункциях Шеннона. Зап. научн. семинаров. Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1969, *16*, 65—76 (РЖМат, 1970, 9А55)
13. *Звонкин А. К.*, *Левин Л. А.*, Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов. Успехи мат. наук, 1970, *25*, № 6, 86—127 (РЖМат, 1971, 5А57)
14. *Казанович Я. Б.*, Классификация примитивно-рекурсивных функций при помощи машин Тьюринга. В сб.: «Пробл. кибернетики». Вып. 22. М., «Наука», 1970, 95—106 (РЖМат, 1970, 7А81)
15. *Канович М. И.*, Об областях определения оптимальных алгоритмов. Докл. АН СССР, 1971, *198*, № 2, 283—285 (РЖМат, 1971, 12А63)
16. —, Об универсальности сильно неразрешимых множеств. Докл. АН СССР, 1972, *204*, № 3, 533—535 (РЖМат, 1972, 10А53)
17. —, О сложности минимизации булевых функций. Докл. АН СССР, 1971, *198*, № 1, 35—38 (РЖМат, 1971, 9А50)
18. —, О сложности разрешения алгоритмов. Докл. АН СССР, 1969, *186*, № 5, 1008—1009 (РЖМат, 1969, 12А120)
19. —, О сложности перечисления и разрешения предикатов. Докл. АН СССР, 1970, *190*, № 1, 23—26 (РЖМат, 1970, 5А56)
20. —, Сложность ограниченного разрешения полуперечислимых множеств. Докл. АН СССР, 1972, *203*, № 6, 1246—1248 (РЖМат, 1972, 9А47)
21. —, Сложность разрешения перечислимого множества как критерий его универсальности. Докл. АН СССР, 1970, *194*, № 3, 500—503 (РЖМат, 1971, 2А57)
22. —, *Кушнер Б. А.*, Об оценке сложности некоторых массовых проблем анализа. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1969, *16*, 81—90 (РЖМат, 1970, 6А73)
23. —, *Петри Н. В.*, Некоторые теоремы о сложности нормальных алгоритмов и вычислений. Докл. АН СССР, 1969, *184*, № 6, 1275—1276 (РЖМат, 1969, 7А69)
24. *Карацуба А. А.*, *Офман Ю. П.*, Умножение многозначных чисел на автоматах. Докл. АН СССР, 1962, *145*, № 2, 293—294 (РЖМат, 1963, 7В276)
25. *Клосс Б. М.*, К определению сложности алгоритмов. Докл. АН СССР, 1964, *157*, № 1, 38—40 (РЖМат, 1964, 12А59)
26. *Козмидиади В. А.*, Об одном обобщении конечных автоматов; образующим иерархию, аналогичную классификации А. Гжегорчика примитивно рекурсивных функций. В сб.: «Пробл. кибернетики». Вып. 23. М., «Наука», 1970, 127—170 (РЖМат, 1971, 4В463)
27. —, *Марченков С. С.*, О многоголовочных автоматах. В сб.: «Пробл. кибернетики». Вып. 21. М., «Наука», 1969, 127—158 (РЖМат, 1969, 11В348)
28. *Колмогоров А. Н.*, Три подхода к определению понятия «количество информации». Пробл. передачи информ., 1965, *1*, № 1, 3—11 (РЖМат, 1966, 9В170)
29. *Крюков Ю. А.*, Машины Тьюринга с двумя символами и двумя состояниями. Алгебра и логика. Семинар, 1967, *6*, № 3, 51—60 (РЖМат, 1968, 6А73)
30. —, Машины Тьюринга с тремя состояниями и двумя символами и одним состоянием и символами. Кибернетика, 1971, № 1, 12—13 (РЖМат, 1971, 7В552)
31. *Кузнецов А. В.*, К теореме о канонической форме для ординальнорекурсивных функций. Приложение к книге Р. Л. Гудстейна «Математическая логика». М., ИЛ, 1961, 149—154
32. *Кузьмин В. А.*, Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга. В сб.: «Пробл. кибернетики». Вып. 13. М., «Наука», 1955, 75—96 (РЖМат, 1966, 1В223)
33. *Маранджян Г. Б.*, Иерархия рекурсивных функций и асимптотическая оптимальность. Айкакан ССР Гитутюннери Академиа, Зекуйцнер. Докл. АН АрмССР, 1969, *48*, № 4, 193—197 (РЖМат, 1970, —А44)

34. —, О некоторых свойствах асимптотически оптимальных рекурсивных функций. Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тегекагир. Математика. Изв. АН АрмССР. Математика, 1969, *4*, № 1, 3—22 (РЖМат, 1969, 12А134)
35. —, О строго эффективной иммунности стержней аддитивно оптимальных рекурсивных функций. Айкакан ССР Гитутюннери Академиа тегекагир. Математика. Изв. АН АрмССР, 1972, *7*, № 6, 391—398 (РЖМат, 1973, 7А102)
36. *Марков А. А.*, О нормальных алгорифмах, вычисляющих булевы функции. Докл. АН СССР, 1964, *157*, № 2, 262—264 (РЖМат, 1964, 12А61)
37. —, О нормальных алгорифмах, связанных с вычислением булевых функций. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1967, *31*, № 1, 161—208 (РЖМат, 1967, 9В218)
38. *Мартин-Леф П.*, О понятии случайной последовательности. Теория вероятн. и ее применение, 1966, *11*, № 2, 198—202
39. *Марченков С. С.*, Об ограниченных рекурсиях. Math. Balkan., 1972, *2*, 124—142 (РЖМат, 1973, 7А100)
40. *Матвеева С. Г.*, К теореме Рабина о сложности вычислимых функций. Сиб. мат. ж., 1965, *4*, № 3, 546—555 (РЖМат, 1965, 12А88)
41. *Матиясевич Ю. В.*, О распознавании в реальное время отношения вхождения. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1971, *20*, 104—114 (РЖМат, 1972, 1А87)
42. *Мощенский В. А.*, К вопросу о сложности тьюринговых вычислений. Докл. АН БССР, 1969, *13*, № 10, 871—878 (РЖМат, 1970, 3В74)
43. —, Об оценке некоторых функций, характеризующих работу машин Тьюринга. Кибернетика, 1971, № 1, 34—40 (РЖМат, 1971, 10А26)
44. *Непомнящий В. А.*, Об одном базисе для рекурсивно-перечислимых множеств. Докл. АН СССР, 1966, *170*, № 6, 1262—1264 (РЖМат, 1967, 3А48)
45. —, Рудиментарная интерпретация двуленточных тьюринговых вычислений. Кибернетика, 1970, № 2, 29—35 (РЖМат, 1970, 12В380)
46. —, Рудиментарные предикаты и тьюринговы вычисления. Докл. АН СССР, 1970, *195*, № 2, 282—284 (РЖМат, 1971, 4А55)
47. *Орловский Э. С.*, Некоторые вопросы теории алгорифмов. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1958, *52*, 140—171 (РЖМат, 1959, 4369)
48. *Остроухов Д. А.*, О кодировании натуральных чисел схемами нормальных алгорифмов. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1970, *16*, № 4, 347—352 (РЖМат, 1971, 7А68)
49. —, Об оценке сложности нормальных алгорифмов. Докл. АН СССР, 1969, *184*, № 6, 1292—1293 (РЖМат, 1969, 7А68)
50. *Петри Н. В.*, Об алгорифмах, связанных с предикатами и булевыми функциями. Докл. АН СССР, 1969, *185*, № 1, 37—39 (РЖМат, 1969, 8А77)
51. —, Сложность алгорифмов и время их работы. Докл. АН СССР, 1969, *186*, № 1, 30—31 (РЖМат, 1969, 10А27)
52. *Скордев Д.*, Некоторые простые примеры универсальных функций. Докл. АН СССР, 1970, *190*, № 1, 45—46 (РЖМат, 1970, 9А51)
53. *Тер-Захарян Н. П.*, О некоторых количественных характеристиках алгорифмических языков. Докл. АН СССР, 1970, *190*, № 3, 538—540 (РЖМат, 1970, 6А72)
54. *Тоом А. Л.*, О сложности схемы из функциональных элементов, реализующей умножение целых чисел. Докл. АН СССР, 1963, *150*, № 3, 496—498 (РЖМат, 1964, 1В271)
55. *Трахтенброт Б. А.*, О нормированных сигнализирующих для тьюринговых вычислений. Алгебра и логика. Семинар, 1966, *5*, № 6, 61—70 (РЖМат, 1967, 6В215)
56. —, Оптимальные вычисления и частотное явление Яблонского. Алгебра и логика. Семинар, 1965, *4*, № 5, 79—93 (РЖМат, 1966, 12В214)

57. —, Сложность алгоритмов и вычислений. Новосибирск, изд-во НГУ, 1967
58. —, Тьюринговы вычисления с логарифмическим замедлением. Алгебра и логика. Семинар, 1964, *3*, № 4, 33—48 (РЖМат, 1965, 4А65)
59. *Фрейвалд Р. В.*, О порядке роста точных временных сигнализирующих для тьюринговых вычислений. Алгебра и логика. Семинар, 1966, *5*, № 5, 85—93 (РЖМат, 1967, 6В217)
60. —, Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга со входом. Алгебра и логика. Семинар, 1965, *4*, № 1, 47—58 (РЖМат, 1965, 12А87)
61. *Хомич В. И.*, О сложности алгорифмов, связанных с реализацией логико-арифметических и пропозициональных формул. Докл. АН СССР, 1970, *191*, № 5, 1004—1006 (РЖМат, 1970, 9А53)
62. *Цейтин Г. С.*, Нижняя оценка числа шагов для обращающего нормального алгорифма и других аналогичных алгорифмов. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1971, *20*, 243—262, 289 (РЖМат, 1971, 12А65)
63. —, Оценка числа шагов при применении нормального алгоритма. Математика в СССР за сорок лет. М., 1959, *1*, 44—45
64. *Aanderaa S., Fischer P. C.*, The solvability of halting problem for 2-state Post machines. J. Assoc. Comput. Mach., 1967, *14*, № 4, 677—682 (РЖМат, 1968, 6А74)
65. *Arbib M. A.*, Speed-up theorems and incompleteness theorems in Automata theory. New York—London, Acad. Press, 1966, 6—24 (РЖМат, 1967, 7В218)
66. —, *Blum M.*, Machine dependence of degrees of difficulty. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, *16*, № 3, 442—447 (РЖМат, 1966, 4А35)
67. *Atrubin A. J.*, A one-dimensional real-time iterative multiplier. IEEE Trans. Electronic Comput., 1965, *14*, № 3, 394—399 (РЖМат, 1966, 3В345); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 5. М., «Мир», 1968, 81—94
68. *Ausiello G.*, Abstract computational complexity and cyclic function. Conf. Rec. of Second Annual ACM Symposium on theory of computing. 1970, *4*, 1—47
69. *Axt P.*, Enumeration and Grzegorczyk hierarchy. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1963, 9, № 1, 53—65 (РЖМат, 1964, 2А89)
70. —, Iteration of primitive recursion. Z. Math. Logik und Grundl. Math., 1965, *11*, № 3, 253—255; рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 114—117
71. —, Note on the 3-recursive functions. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1961, 7, № 2, 97—98 (РЖМат, 1962, 6А56)
72. *Becvar J.*, Probleme der Komplexität in der Theorie der Algorithmen und Automaten. Internat. Ser. Number. Math. 6. Basel — Stuttgart, 1967, 142—157 (РЖМат, 1968, 10В333)
73. —, Programmkomplexität von borechenbaren Funktionen. Z. angew. Math. und Mech., 1970, *50*, Sonderh, 1-4, 82 (РЖМат, 1971, 2А56)
74. —, Programmkomplexität von Funktionen und Mengen. Ber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach. 1970, № 3, 317—326 (РЖМат, 1972, 1А86)
75. —, Real-time and complexity problems in automata theory. Kybernetika, 1965, *1*, № 6, 475—498 (РЖМат, 1966, 7В383)
76. *Blum M.*, A machine-independent theory of the complexity of recursive functions. J. Assoc. Comput. Mach., 1967, *14*, № 2, 322—326 (РЖМат, 1968, 6А70); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 401—422
77. —, Measures on the computational speed of patial recursive functions. Quart. Progr. Report. 72, Res. Lab. Electronics, M. I. T., 1964, 237—253
78. —, On effective procedures for speeding up algorithms. J. Assoc. Comput. Mach., 1971, *18*, № 2, 290—305 (РЖМат, 1972, 1В1051); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974 127—149

79. —, On the size of machines. Inform. and Control, 1968, *11*, № 3, 257—265 (РЖМат, 1969, 1В279); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 423—431
80. —, Recursive function theory and speed of computation. Canad. Math. Bull., 1966, *9*, № 6, 745—750 (РЖМат, 1968, 6А71)
81. *Book R. V., Greibach S. A.*, Quasi-realtime languages. Math. Syst. Theory, 1970, *4*, № 2, 97—111
82. *Böhm C.*, A three-tape, three-state, three-symbol universal turing machine. Pubbl. Inst. applic. calcolo, 1968, № 698, 11 pp. (РЖМат, 1970, 6А69)
83. *Borodin A.*, Computational complexity and the existence of complexity gaps. J. Assoc. Comput. Mach., 1972, *19*, 158—174
84. —, Computational complexity 2 A survey. Proc. Fourth Ann. Princeton Conf. on Information Sci. and Systems. 1970, 257—262
85. —, *Constable R. L., Hopcroft J. E.*, Dense and non-dense families of complexity classes. IEEE Conf. Rec. 10th Annual Sympos. Switch. and Automata Theory, Waterloo, 1969, New York, N. Y., 1969, 7—19
86. *Bulnes J.*, On the speed of additionand multiplication on one-tape, off-line Turing machines. Inform. and Contr., 1972, *20*, № 5, 415—431 (РЖМат, 1973, 1В600)
87. *Burkhard W. A.*, Complexity problems in real time computation. Conf. Rec. of Second Ann. ACM Symposium on Theory, of Computing, 1970, 62—69
88. —, *Varaiya P. P.*, Complexity problems in real time languages. Inform. Sci., 1971, *3*, № 1, 87—100 (РЖМат, 1971, 7В705); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974, 235—251
89. *Büchi J. R.*, Weak second-order arithmetic and finite automata. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1960, *6*, № 1, 66—92 (РЖМат, 1961, 3А93); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 8. М., «Мир», 1964, 42—77
90. *Chaitin G. J.*, On the length of programs for computing finite binary seqeunces. J. Assoc. Comput. Mach., 1966, *13*, 547—569 (РЖМат, 1967, 7В381)
91. *Chow T. S.*, On the structure of Blum measure. AFIPS Conf. Proc. Vol. 40. Spring Joint Comput. Conf., Atlanta City, N. Y., 1972. Montvale, N. J., 1972, 503—506 (РЖМат, 1975, 1А121)
92. *Cleave J. P.*, A hierarchy of primitive recurcive functions. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1963, *9*, № 4, 331—346 (РЖМат, 1964, 12А60); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 94—113
93. *Cobham A.*, The intrinsic computational difficulty of functions. Logic, Methodol. and Philos. Sci. Amsterdam, 1965, 24—30 (РЖМат, 1969, 6А57)
94. —, Time and memory capacity bounds for machines which recognize squares of palindroms. IBM Research Report RC 1621, 1966
95. Complexity of computer computations. (Panel discussion). Complexity Comput. Computat. Proc. Symp. Yorktown Heights, N. Y., 1972. New York—London, 1972, 169—185 (РЖМат, 1974, 3В876)
96. *Constable R. L.*, On the size of programs in subrecursive formalisms. Ann. ACM. Symp. Theory Comput., 1970, 1—9
97. —, Two types of hierarchy theorem for axiomatic complexity classes. Courant. Comput. Sci. Symp. J. Comput., Complex., 1971, New York, N.Y., 1973, 37—63 (РЖМат, 1974, 6А205)
98. —, Upward and downward diagonalisation over axiomatic complexity classes. Technical Report 69—32, Dept. of Computer Science, Cornell University, 1969
99. —, Borodin A., On the efficiency of programs in subrecursive formalisms. Incomplete version. Extend. abstr. IEEE Conf. Rec. 11th Annu Sump. Switch. and Automata Theory, Santa Monica, Calif., 1970, New York, N. Y., 1970, 601—67 (РЖМат, 1971, 7В711)
100. —, *Hartmanis J.*, Complexity of formal translations and speed-up results. Conf. Rec. 3rd Annu. ACM Symp. Theory Comput., Shaker Heithts Ohio, 1971. New York, N. Y., 1971, 244—250 (РЖМат, 1974, 3В881)

101. *Cook S. A.*, Characterizations of pushdown machines in terms of time-bounded computers. J. Assoc. Comput. Mach., 1971, *18*, № 1, 4—18 (РЖМат, 1971; 9В409); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974, 266—288
102. —, The complexity of theorem.-proving procedures. Conf. Rec. 3rd Annu. ACM Symp. Theory Comput., Shaker Heights, Ohio, 1971, New York, N. Y., 151—158 (РЖМат, 1974, 3В888); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 12. М., «Мир», 1975, 5—15
103. —, *Aanderaa S. O.*, On the minimum computation time of functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, *142*, Aug., 291—314; рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 8. М., «Мир», 1971, 168—200
104. *Enderton H. B.*, Degrees of computational complexity. J. Comput. and Syst Sci., 1972, *6*, № 5, 389—396 (РЖМат, 1973, 3А69)
105. *Feferman S.*, Classifications of recursive functions by means of hierarchies. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, *104*, № 1, 101—122 (РЖМат, 1964, 5А67); рус. перев.: «Математика», 1971, 15:6, 137—158
106. *Fischer P. C.*, The reduction of tape reversals for off-line one-tape Turing machines. J. Comput. Syst. Sci., 1968, *2*, № 2, 136—147 (РЖМат, 1969, 6В256)
107. —, Turing machines with a schedule to keep. Inform. and Control, 1967, *11*, № 1-2, 138—146 (РЖМат, 1969, 3В246)
108. —, *Hartmanis J., Blum M.*, Tape reversal complexity hierarchies. IEEE Conf. Rec. of 1968 Ninth Annual Symp. on Switching and Automata Theory, 373—382
109. —, *Meyer A. R., Rosenberg A. L.*, Counter machines and counter languages. Math. Syst. Theory, 1968, *2*, № 3, 265—283 (РЖМат, 1969, 6В459); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 380—400
110. —, —, —, Real time simulation of multihead tape units. J. Assoc. Comput. Mach., 1972, *19*, № 4, 590—607
111. —, —, —, Time-restricted sequence generation. J. Comput. and Syst. Sci., 1970, *4*, № 1, 50—73 (РЖМат, 1970, 10В253)
112. *Glinert E. P.*, On restricted Turing computability. Math. Syst. Theory, 1971, *5*, № 4, 331—343 (РЖМат, 1972, 8В686)
113. *Grzegorczyk A.*, Some classes of recursive functions. 44 S., 2 nld. (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Rozprawy Matematyczne, 4). Warszawa, 1953, zl 7. Przew. bibliogr., 1953, *9(21)*, № 43, s. 562 (РЖМат, 1955, 593К); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 9—49
114. *Hartmanis J.*, Computational complexity of one tape Turing machine computations. J. Assoc. Comput. Mach., 1968, *15*, № 2, 325—339 (РЖМат, 1969, 2В264); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 282—300
115. —, On the complexity of undecidable problems on automata theory. J. Assoc. Comput. Mach., 1969, *16*, № 1, 160—167 (РЖМат, 1969, 12А119)
116. —, Size argument in the study of computation speeds. Proc. Symp. Comput. and Automata, New York, N. Y., 1971, Brooklyn, N. Y., 1971, 7—18 (РЖМат, 1973, 11В922)
117. —, Tape reversal bounded Turing machine computations. J. Comput. Syst. Sci., 1968, *2*, № 2, 117—135 (РЖМат, 1969, 6В260)
118. —, *Hopcroft J. E.*, An overview of the theory of computational complexity. J. Assoc. Comput. Mach., 1971, *18*, № 3, 444—475; рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 11. М., «Мир», 1976, 180—210
119. —, *Lewis II P. M., Stearns R. E.*, Classifications of computations by time and memory requirements. Proc. of IFIP congress I, Spartan Books, Washington D. C., 1965
120. —, *Shank H.*, Two memory bounds for the recognition of primes by automata. Math. Syst. Theory, 1969, *3*, № 2, 125—129 (РЖМат, 1970, 5В334)
121. —, *Stearns R. E.*, Automata-based computational complexity. Inform. Sci., 1969, *1*, № 2, 173—184 (РЖМат, 1969, 12А116)

122. —, —, On the computational complexity of algorithms. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, *117*, № 5, 285—306 (РЖМат, 1966, 2А67); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 4. М., «Мир», 1967, 57—85
123. *Havel I. M.*, Weak complexity measures. SIGACT News, 1971, 8, 21—30
124. *Helm J. P., Young P. R.*, On size v. s. efficiency for programs admitting speed-ups. J. Symbol. Log., 1971, *36*, № 1, 21—27 (РЖМат, 1972, 1А89); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974, 150—159
125. *Hennie F. C.*, Crossing sequences and off-line Turing machine computations. IEEE Conf. Rec. Switch. Circuit. Theory and Logic Design. Ann. Arbor, Mich., 1965, New York, N. Y., Inst. Electr. and Electron Engrs, Inc., 1965, 168—172 (РЖМат, 1968, 2В267)
126. —, One-tape, off-line Turing machine computations. Inform. and Control., 1965, *8*, 553—578 (РЖМат, 1966, 11В328); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 223—248
127. —, On-line Turing machine computations. IEEE Trans. Electron. Comput., 1966, *15*, № 1, 35—44 (РЖМат, 1966, 12В372); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 249—270
128. —, *Stearns R. E.*, Two-tape simulation of multitape Turing machines. J. Assoc. Comput. Mach., 1976, *13*, № 4, 533—546 (РЖМат, 1967, 9В369); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 194—212
129. *Herman G. T.*, A new hierarchy of elementary functions. Proc. Amer. Mach. Soc., 1969, *20*, № 2, 557—562 (РЖМат, 1970, 1А64)
130. —, The equivalence of different hierarchies of elementary functions. Z. math. Log. und Grundl., 1971, *17*, № 3, 219—224 (РЖМат, 1972, 4А83); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974, 7—17
131. —, The halting problem of one state Turing machines with *n*-dimensional tape. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1968, *14*, № 2, 185—191 (РЖМат, 1969, 1А84)
132. *Hooper P. K.*, Some small, multitape universal Turing machines. Inform. Sci., 1969, *1*, № 2, 209—215 (РЖМат, 1969, 12А115)
133. *Hopcroft J. E., Ullman J. D.*, Relation between time and tape complexities. J. Assoc. Comput. Mach., 1968, *15*, № 3, 414—427 (РЖМат, 1969, 3В404)
134. —, —, Some results on tape-bounded Turing machines. J. Assoc. comput. Mach., 1969, *16*, № 1, 168—177 (РЖМат, 1969, 12А114); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974, 252—265
135. *Ibarra O. H.* A note concerning nondeterministic tape complexities. J. Assoc. Comput. Mach., 1972, *18*, № 4, 608—612 (РЖМат, 1973, 11В729)
136. *Kalmar L.*, Eguszerü pelda eldönthetetlen aritmetikai problemara (Ein einfaches Beispiel für ein unentscheibares arithmetisches Problem). Matematikai es fizikai lapok, 1943, *50*, 1—23
137. *Kameda T.*, Constant-tape-reversal bounded nondeterministic Turing machine computations. Comput. Symp. 1970. Bonn, Proc. Frankfurt, 1973, 649—654 (РЖМат, 1976, 12В938К)
138. —, *Vollmar R.*, Note on tape reversal complexity of languages. Inform. and Contr., 1970, *17*, № 2, 203—215 (РЖМат, 1971, 3В608); рус. перев.: сб. перев. «Сложность алгоритмов и вычислений». М., «Мир», 1974, 222—234
139. —, —, Zur Umkehrkomplexität von Sprachen, Ber. math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1970, *3*, 327—339 (РЖМат, 1971, 11В902)
140. *Karp R. M.*, Reducibility among combinatorial problems. Complexity Comput. Computat. Proc. Symp., Yorktown Hights, N. Y., 1972. New York—London, 1972, 85—103 (РЖМат, 1974, 3В877); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 12. М., «Мир», 1975, 16—38
141. —, Some bounds on the storage requirements of sequential machines and Turing machines. J. Assoc. Comput. Mach., 1967, *14*, № 3, 478—489 (РЖМат, 1968, 6В328)

142. *Kleene S. C.*, Extension of an effectively generated class of functions by enumeration. Colloq. math., 1958, *6*, 67—78
143. *Knouth D. E.*, The art of computer programming. 2. Addison—Wesley, 1969; рус. перев.: «Искусство программирования для ЭВМ». Т. 2. М., «Мир», 1977
144. *Landweber L. H., Robertson E. L.*, Recursive properties of abstract complexity classes. J. Assoc. Comput. Mach., 1972, *19*, № 2, 296—308
145. *Lawler E. L.*, The complexity of combinatorial computations, a survey. Proc. Symp. Comput. and Automata, New York, N. Y., 1971, 305—311 (РЖМат, 1973, 12В812)
146. *Lewis F. D.*, The enumerability and invariance of complexity classes. J. Comput. and Syst. Sci., 1971, *5*, № 3, 286—303 (РЖМат, 1972, 7В334)
147. *Longo G.*, Towards an abstract analysis of time progression of consumption of resource during computation. Int. Comput. Symp., Venice, 1972. Proc. S. l., s. a., 496—505 (РЖМат, 1974, 11В1171)
148. *Longo L.*, Axioms for time dependance of resource consumption in computing recursive functions. SIGACT News, 1971, *12*, 14—24
149. *Loveland D. W.*, A variant of the Kolomogorov concept of complexity. Inform. and Contr., 1969, *15*, № 6, 510—526 (РЖМат, 1970, 12А52)
150. *Löb M. H., Wainer S. S.*, Hierarchies of number-theoretic functions. I. Arch. mach. Log. und Grundlagenforsch., 1970, *13*, № 1-2, 39—51 (РЖМат, 1971, 4А51)
151. —, —, Hierarchies of number-theoretic functions. II. Arch. math. Log. und Grundlagenforsch., 1970, *13*, № 3—4, 97—113 (РЖМат, 1971, 7А76); рус. перев.: Сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974, 33—64
152. *Lynch N. A.*, Relativization of the theory of computational complexity. Proj. MAC Techn. Rept., 1972, № 99, 125 pp., ill. (РЖМат, 1973, 3В400)
153. *Martin-Löf P.*, Complexity oscillations in infinite binary sequences. Z. Wahrscheinlichkeitstheory und verw. Geb., 1971, *19*, № 3, 225—237 (РЖМат, 1972, 1В1)
154. —, On the notion of randomness. Intuitionism and proof theory. New York, 1968, 73—78
155. —, The definition of random sequences. Inform. and Control, 1966, *9*, № 6, 602—619 (РЖМат, 1968, 2В506)
156. *McCreight E. M., Meyer A. R.*, Classes of computable functions defined by bounds on computation: preliminary report. Conf. Rec. of ACM Symp. on Theory of Computing, 1969, 79—88
157. *Meyer A. R.*, Program size in restricted programming languages. Inform. and Contr., 1972, *21*, № 4, 382—394 (РЖМат, 1973, 5В545)
158. —, Theories of computational complexity. Comput. Sci. Research Review, Carnegie — Mellon University, 1968, 17—22
159. —, Weak monadic second order theory of succesor is not elementary recursive. Preliminary Report. May, 1972. Cambridge, Massachuesetts, 1—24 (РЖМат, 1973, 12В794); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 12. М., «Мир», 1975, 62—77
160. —, *Bagchi A.*, Program size and economy of descriptions. Preliminary report. 4th Annu. ACM Symp. Theory Comput. Denver, Colo, 1972. S. l., s. a., 183—186 (РЖМат, 1976, 6В835)
161. —, *Fischer P.* Economy of descriptions by automata, grammars and formal systems. Conf. Rec. 12th Annu. Symp. Switch. and Automata Theory, East Lansing, Mich., 1971. New York, N. Y., 1971, 188—191 (РЖМат, 1973, 1В798)
162. —, —, Computational speed-up by effective operators. J. Symbol. Log., 1972, *37*, № 1, 55—68 (РЖМат, 1973, 1А67)
163. —, *McCreight E. M.*, Computationally complex and pseudorondom zero-one valued functions. Theory Mach. and Comput., New York—London, 1971, 19—42 (РЖМат, 1973, 6А88)

164. —, *Moll R.*, Honest bounds for complexity classes of recursive functions. 13th Annu. Symp. Switch. and Automata Theory, 1972, New York, N. Y., 1972, 61—66 (РЖМат, 1973, 11А64)
165. —, *Rosenberg A. L., Fischer P. C.*, Turing machines with several read-write heads. Preliminary report. IEEE Conf. Rec. 8th Annual. Sympos. Switch. and Automata Theory, Austin, Texas, 1967, New York, N. Y., 1967, 117—127 (РЖМат, 1969, 4В273)
166. —, *Ritchie D. M.*, A classification of the recursive functions. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1972, *18*, № 1, 71—81 (РЖМат, 1972, 12А56)
167. *Minsky M. L.*, Computation: finite and infinite machines. Englewood Cliffs, N. J., Prentice—Hall, 1967; рус. перев.: «Вычисления и автоматы». М., «Мир», 1971
168. —, Size and structure of universal Turing machines using Tag systems. Recurs. Funct. Theory, Providence, R. I. Amer. Math. Soc., 1962, 229—238 (РЖМат, 1968, 5А51)
169. *Myhill J.*, A Stamblingblock in constructive mathematics. Abstrackt. J. Sympol. Logic, 1953, *18*, 190—191
170. *Nozaki A.*, On the Notion of Universality of Turing machine. Kybernetika, 1969, *5*, № 1
171. *Pager D.*, On the efficiency of algorithms. J. Assoc. Comput. Mach., 1970, *17*, № 4, 708—714 (РЖМат, 1971, 7В704); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 10. М., «Мир», 1973, 137—147
172. *Paola R. A. Di*, Random sets in subrecursive hierarchies. J. Assoc. Comput. Mach., 1969, *16*, № 4, 621—630 (РЖМат, 1970, 9А74)
173. *Parsons Ch.*, Hierarchies of primitive recursive functions. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1968, *14*, № 4, 357—376 (РЖМат, 1969, 8А83)
174. *Paterson M. S.*, Tape bounds for time bounded Turing machines. J. Comput. and Syst. Sci., 1972, *6*, № 2, 116—124 (РЖМат, 1972, 9В400); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974, 213—221
175. *Peter R.*, Mehrfache und transfinite Rekursionen. J. Symbol. Logic, 1950, *15*, 248—272
176. —, Rekursive funktione. Budapest, 1951; рус. перев.: «Рекурсивные функции». М., ИЛ, 1954
177. —, Über die mehrfache rekursion. Math. Annalen, 1936, *113*, 489—527
178. *Rabin M. O.*, Real time computation. Israel J. Math., 1963, *1*, № 4, 203—211 (РЖМат, 1965, 2А120); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 156—167
179. —, Speed of computation of functions and classification of recursive sets. Bull. Res. Council Israel, 1959, *8*, № 1, 69—70 (РЖМат, 1961, 4А77)
180. *Ritchie R. W.*, Classes of predictably computable functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, *106*, 139—173; (РЖМат, 1966, 8А65); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 50—93
181. —, Classes of recursive functions based on Ackermann's function. Pacif. J. Math., 1965, *15*, № 3, 1027—1044 (РЖМат, 1966, 9А58)
182. *Robertson E. L.*, A corrected definition of «local speedup». SIGACT News, 1970, *6*, 15—16
183. —, Complexity classes of partial recursive functions. (Preliminary version). Conf. Rec. 3td Annu. ACM Symp. Theory Comput. Shaker Heights, Ohio, 1971. New York, N. Y., 1971, 258—266 (РЖМат, 1974, 3В384)
184. *Rosenberg A. L.*, Real-time definable languages. J. Assoc. Comput. Mach., 1967, *14*, № 4, 645—662 (РЖМат, 1969, 3В417); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 168—193
185. *Routledge N. A.*, Ordinal recursion. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, *49*, part 2, 175—182 (РЖМат, 1953, 14)
186. *Ruby S. S., Fischer P. C.*, Translational methods and computational complexity. IEEE Conf. Rec. Switch. Circuit Theory and Log. Design. Ann. Arbor, Mich., 1965. New York, N. Y., Inst. Electr. and Electron. Engrs,

Inc., 1965, 173—178 (РЖМат, 1967, 6В216); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». *М.*, «Мир», 1970, 213—222

187. *Savitch W. J.*, Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities. J. Comput. and Syst. Sci., 1970, *4*, № 2, 177—192 (РЖМат, 1970, 11В298)
188. *Schmitt A.*, Die Zustands—Komplexitäts-Klassen von Turing-machinen. Ber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach. 1970, № 3, 343—350 (РЖМат, 1971, 10В588)
189. —, The state complexity of Turing machines. Inform. and Control., 1970, *17*, № 3, 217—225 (РЖМат, 1971, 5В430)
190. *Schnorr C. P.*, A unified approach to the definition of random sequences. Math. Syst. Theory, 1971, *5*, № 3, 246—258 (РЖМат, 1972, 6В3)
191. —, Eine Bemerkung zum Begriff der zufalligen Folge. Z. Wahrscheinlichkeitstheor und verw. Geb., 1969, *14*, № 1, 27—35
192. —, Klassifikation der Zufallsgesetze nach Komplexität und Ordnung. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *16*, № 1, 1—21
193. —, The process complexity and effective random tests. 4th Annual ACM Symp. Theory, of Comput. Denver, Colo, 1972, S. l., s. a., 168—176 (РЖМат, 1976, 6А58)
194. —, Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit. Eine algorithmische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Lect. Notes Mach., 1971, *218*, IV, 212 S. (РЖМат, 1972, 2В3)
195. *Schönhage A.*, Multiplikation grosser Zahlen. Computing (Arch. Elektron. Rechnen). 1966, *1*, 182—196
196. —, *Strassen V.*, Schnelle Multiplikation grosser Zahlen, Computing, 1971, *7*, № 3-4, 281—292 (РЖМат, 1972, 3В828); рус. перев.; «Кибернет. сб.», Вып. 10. *М.*, «Мир», 1973, 87—98
197. *Schwichtenberg H.*, Rekursionszahlen und die Grzegorczyk — Hierarchie. Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1969, *12*, № 1-2, 85—97 (РЖМат, 1970, 3А89)
198. *Shannon C. E.*, A universal Turing machine with two internal states. Ann. Math. Studies, 1959, *34*, 157—165 (РЖМат, 1960, 2670); рус. перев.: сб. перев. «Автоматы». *М.*, «Мир», 1956, 213—225
199. *Skolem T.*, A theorem on recursively enumerable sets. Abstr. of short comm. Int. Congress Math., 1962, Stockholm, 11
200. *Smith A. R.*, Real-time language recognition by one-dimensional cellular automata. J. Comput. and Syst. Sci., 1972, *6*, № 3, 233—253 (РЖМат, 1973, 1В597)
201. *Smullyan R. M.*, Theory of formal systems. (Ann. Math. Studies, № 47). Princeton, N. J., Univ. Press., 1961, XIV, 142 pp. (РЖМат, 1963, 6А71К)
202. *Solomonoff R. J.*, A formal theory of inductive inference. Part I. Inform. and Control, 1964, *7*, № 1, 1—22
203. *Stearns R. E., Hartmanis J., Lewis P. M.* II. Hierarchies of memory limited computations. IEEE Conf. Rec. Switch. Circuit Theory and Logic. Design Ann. Arbor, Mich., 1965, New York, N. Y., Inst. Electr. and Electron Engrs, Inc., 1965, 179—190 (РЖМат, 1967, 5В171); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». *М.*, «Мир», 1970, 301—319
204. *Stockmeyer L. J., Meyer A. R.*, Word problems requiring exponential time. Preliminary Report. May, 1972, Cambridge, Massachusetts, pp. 1—17 (РЖМат, 1973, 12В795)
205. *Stoss H. J.*, A two-tape simulation of Turing machines. Computing, 1971, *7*, 222—235; (РЖМат, 1972, 1В632); рус. перев.; сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». *М.*, «Мир», 1974, 199—212
206. —, *k*—band simulation von *k*—kops Turing machinen. Computing, 1970, *6*, № 3-4, 309—317 (РЖМат, 1971, 10В591); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». *М.*, «Мир», 1974, 190—198
207. *Strnad P.*, On-line Turing machine recognition, Inform. and Control, 1968, *12*, 442—452 (РЖМат, 1969, 5В326); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». *М.*, «Мир», 1970, 271—281

208. —, O reprezentovatelnosti jiste mnozine slov automatem v realnem case. Sb. vedeck. praci Vysoke skoly strojni a textil. Liberei, 1966. Praha, 1966, 23—27 (РЖМат, 1968, 8В275)
209. *Thompson D. B.*, Subrecursiveness: machine-independent notions of computability in restricted time and storage. Math. Syst. Theory, 1972, *6*, № 1, 3—15 (РЖМат, 1972, 10В622)
210. *Wainer S. S.*, A classification of the ordinal recursive functions. Arch. math. Log. und Grundlagenforsch., 1970, *13*, № 3-4, 136—153 (РЖМат, 1971, 7А77); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974, 65—84
211. —, Ordinal recursion and refainement of the extended Grzegorczyk hierarchy. J. Symbol. Log., 1972, *37*, № 2, 281—292 (РЖМат, 1973, 4А100)
212. *Watanabe Shigeru*, 5-symbol 8-state and 5-symbol 6-state Universal Turing machines. J. Assoc. Comput. Machinery, 1961, *8*, № 4, 476—483 (РЖМат, 1963, 2В273); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 6. М., «Мир», 1963, 80—90
213. *Winograd S.*, On the time required to perform addition. J. Assoc. Comput. Mach., 1965, *12*, № 2, 277—285 (РЖМат, 1965, 11В273); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 6. М., «Мир», 1969, 41—54
214. —, On the time required to perform multiplication. J. Assoc. Comput. Mach., 1967, *14*, № 4, 793—802 (РЖМат, 1968, 9В459); рус. перев.: «Кибернет. сб.». Вып. 6. М., «Мир», 1969, 55—71
215. *Yamada H.*, Real-time computation and recursive functions not real-time computable. IRE Trans. Electronic Comput. 1962, *11*, № 6, 753—760 (РЖМат, 1964, 5В467); рус. перев.: сб. перев. «Пробл. мат. логики». М., «Мир», 1970, 139—155
216. *Young P. R.*, A note on dense and nondense families of complexity classes. Math. Syst. Theory, 1971, *5*, № 1, 66—70 (РЖМат, 1972, 1В980)
217. —, Speed-ups by changing the order in which sets are enumerated. Math. Syst. Theory, 1971, *5*, 145—156 (РЖМат, 1972, 2В729); рус. перев.: сб. перев. «Сложность вычислений и алгоритмов». М., «Мир», 1974, 160—171