B. I. Zaslavskii, О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда, со свободной поверхностью воды,
Prikl. Mekh. Tekh. Fiz., 1964, Volume 5, Issue 4, 57–65

https://www.mathnet.ru/eng/pmtf8962

ПМТФ, № 4, 1964

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ, ВОЗНИКШЕЙ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЗРЫВА ЗАГЛУБЛЕННОГО ЗАРЯДА СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВОДЫ

Б. И. Заславский

(Новосибирск)

Определяется класс точных частных решений уравнений «коротких волн» [1,2] более общих, чем найденный в работах [3,4]. Рассматривается задача о взаимодействии со свободной поверхностью ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда.

Течение строится с момента времени, когда волны разрежения, распространяющиеся от области, через которую прошел ударный фронт, начинают с ним взаимодействовать.

§ 1. Уравнения «коротких волн» (см. [1,2]) в сферической системе координат r, θ при симметрии относительно оси $\theta = {}^1/_2\pi$ имеют вид

$$\frac{\partial\mu}{\partial\tau} + (\mu - \delta)\frac{\partial\mu}{\partial\delta} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial y} + k\mu = 0 \quad (k = 1), \qquad \frac{\partial\nu}{\partial\delta} - \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Для плоскопараллельных течений в цилиндрической системе координат уравнения имеют тот же вид, но $k = {}^1/_2$. Безразмерные функции и координаты μ, ν, y, δ определяются равенствами

$$U = a_0 M_0 \mu, \quad V = a_0 V_0 \sqrt{{}^1/_2 (n+1)}\, \nu, \quad r = a_0 t\, [1 + {}^1/_2 (n+1) M_0 \delta]$$
$$\tau = \ln t, \quad \theta = y\sqrt{{}^1/_2 (n+1) M_0}, \quad V_0 = M_0 \sqrt{M_0}$$

Здесь a_0 — начальная скорость звука; U, V — проекции вектора скорости на направление радиуса-вектора и направление, перпендикулярное к нему; $M_0 V_0$ — постоянные, значительно меньшие единицы.

§ 2. Уравнения (1.1) имеют класс точных частных решений

$$\begin{gathered}\mu = \varphi_2(q,\tau)\, y^2 + \varphi_1(q,\tau)\, y + \varphi_0(q,\tau)\\ \nu = \psi_3(q,\tau)\, y^3 + \psi_2(q,\tau)\, y^2 + \psi_1(q,\tau)\, y + \psi_0(q,\tau)\\ \delta = qy^2 + \chi(q,\tau)\, y + \chi_0(q,\tau)\end{gathered} \qquad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.1), получаем систему уравнений для определения функций $\varphi_2, \varphi_1, \varphi_0, \psi_3, \psi_2, \psi_1, \psi_0, \chi_1, \chi_0$, где индексами внизу обозначено дифференцирование по соответствующим аргументам

$$\varphi_{2\tau} + (\varphi_2 - q)\,\varphi_{2q} + {}^3/_2\psi_3 + k\varphi_2 - \psi_{3q}\, q = 0 \qquad (2.2.1)$$

$$\varphi_{2\tau}\chi_{1q} + \varphi_{1\tau} - \varphi_{2q}\chi_{1\tau} + (\varphi_2 - q)\,\varphi_{1q} + \varphi_{2q}(\varphi_1 - \chi_1) + {}^3/_2\psi_3\chi_{1q} + \psi_2 + $$
$$+ k\varphi_2\chi_{1q} + k\varphi_1 - {}^1/_2\psi_{3q}\chi_1 - \psi_{2q}q = 0 \qquad (2.2.2)$$

$$\psi_{2\tau}\chi_{0q} + \varphi_{0\tau} + \varphi_{1\tau}\chi_{1q} - \varphi_{2q}\chi_{0\tau} - \varphi_{1q}\chi_{1\tau} + (\varphi_2 - q)\,\varphi_{0q} + \varphi_{2q}(\varphi_0 - \chi_0) + $$
$$+ \varphi_{1q}(\varphi_1 - \chi_1) + {}^3/_2\psi_3\chi_{0q} + {}^1/_2\psi_1 + \psi_2\chi_{1q} + k\varphi_2\chi_{0q} + k\varphi_0 + $$
$$+ k\varphi_1\chi_{1q} - {}^1/_2\psi_{2q}\chi_1 - \psi_{1q}q = 0 \qquad (2.2.3)$$

$$\varphi_{1\tau}\chi_{0q} + \varphi_{0\tau}\chi_{1q} - \varphi_{1q}\chi_{0\tau} - \varphi_{0q}\chi_{1\tau} + (\varphi_1 - \chi_1)\,\varphi_{0q} + (\varphi_0 - \chi_0)\,\varphi_{1q} + $$
$$+ \psi_2\chi_{0q} + {}^1/_2\psi_1\chi_{1q} + k\varphi_1\chi_{0q} + k\varphi_0\chi_{1q} - {}^1/_2\psi_{1q}\chi_1 - q\psi_{0q} = 0 \qquad (2.2.4)$$

$$\varphi_{0\tau}\chi_{0q} - \varphi_{0q}\chi_{0\tau} + \varphi_{0q}(\varphi_0 - \chi_0) + {}^1/_2\psi_1\chi_{0q} + k\varphi_0\chi_{0q} - {}^1/_2\psi_{0q}\chi_1 = 0 \qquad (2.2.5)$$

$$\psi_{3q} + 2q\varphi_{2q} - 2\varphi_2 = 0 \qquad (2.2.6)$$

$$2\varphi_2\chi_{1q} + \varphi_1 - 2q\varphi_{1q} - \chi_1\varphi_{2q} - \psi_{2q} = 0 \qquad (2.2.7)$$

$$\varphi_1\chi_{1q} + 2\chi_{0q}\varphi_2 - 2q\varphi_{0q} - \chi_1\varphi_{1q} - \psi_{1q} = 0 \qquad (2.2.8)$$

$$\varphi_1\chi_{0q} - \chi_1\varphi_{0q} - \psi_{0q} = 0 \qquad (2.2.9)$$

Из уравнений (2.2.2), (2.2.7), (2.2.5), (2.2.8) выразим соответственно ψ_2, $\psi_{2q}\psi_1$ и ψ_{1q} и подставим в уравнение (2.2.3) получим

$$\begin{gathered}\chi_{0q}[\varphi_{2\tau} + {}^3/_2\psi_3 - 2\varphi_2 q + k\varphi_2] + \varphi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \\ + \chi_{0q}^{-1}(\varphi_{0q} - \varphi_{2q}\chi_{0q})(\chi_{0\tau} - \varphi_0 + \chi_0 - {}^1/_2\chi_1^2) - \\ - (\varphi_{1q} - \varphi_{2q}\chi_{1q})(\chi_{1\tau} - \varphi_1 + \chi_1 - 2\chi_1 q) - \\ - \varphi_{1q}\chi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \chi_{1q}^2(\varphi_{2\tau} + {}^3/_2\psi_3 + k\varphi_2 - 2\varphi_2 q) = 0\end{gathered} \qquad (2.3)$$

Из уравнений (2.2.1) и (2.2.6) имеем

$$\varphi_{2\tau} + {}^3/_2\psi_3 + k\varphi_2 - 2\varphi_2 q + \varphi_{2q}(\varphi_2 - q + 2q^2) = 0 \qquad (2.4)$$

Используя это соотношение, представим (2.3) в виде

$$\begin{gathered}\chi_{0q}^{-1}(\varphi_{0q} - \chi_{0q}\varphi_{2q})[\chi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_{0\tau} + \chi_0 - \varphi_0 - {}^1/_2\chi_1^2] - \\ - (\varphi_{1q} + \varphi_{2q}\chi_{1q})[\chi_{1\tau} - \varphi_1 + \chi_1 - 2\chi_1 q + \chi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2)] = 0\end{gathered} \qquad (2.5)$$

Аналогично (2.2.4) можно представить в виде (2.6)

$$\begin{gathered}(\varphi_{0q} - \chi_{0q}\varphi_{2q})[\chi_{1\tau} + \chi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_1 + \chi_1 - 2q\chi_1] - \\ - \chi_{0q}^{-1}(\varphi_{1q} - \chi_{1q}\varphi_{2q})[\chi_{0\tau} + \chi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_0 + \chi_0 - {}^1/_2\chi_1^2] = 0\end{gathered}$$

Отсюда две возможности

$$\varphi_{1q} - \chi_{1q}\varphi_{2q} = 0, \qquad \varphi_{0q} - \chi_{0q}\varphi_{2q} = 0 \qquad (2.7)$$

или

$$\begin{gathered}\chi_{1\tau} + \chi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_1 + \chi_1 - 2q\chi_1 = 0 \\ \chi_{0\tau} + \chi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_0 + \chi_0 - {}^1/_2\chi_1^2 = 0\end{gathered} \qquad (2.8)$$

Из дальнейшего будет видно, что (2.7) будет частным случаем (2.8).

Выразим $\varphi_1 - \chi_1$ и $\varphi_0 - \chi_0$ из уравнений (2.8) и подставим полученные значения в уравнения (2.2.2) и (2.2.5). Величину ψ_3 выразим из (2.4); вся система (2.2) приводится к виду

$$\begin{gathered}\chi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_1 + \chi_1 - 2q\chi_1 + \chi_{1\tau} = 0 \\ \psi_2 = -\varphi_{1\tau} - \varphi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_1\varphi_2 + \varphi_{1}q - k\varphi_1 \\ \psi_{2q} = 2\varphi_2\chi_{1q} + \varphi_1 - 2q\varphi_{1q} - \chi_1\varphi_{2q} \\ \chi_{0\tau} + \chi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_0 + \chi_0 - {}^1/_2\chi_1^2 = 0 \\ {}^1/_2\psi_1 = -\varphi_{0\tau} - \varphi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - k\varphi_0 + {}^1/_2\varphi_1\chi_1 \\ \psi_{1q} = \varphi_1\chi_{1q} + 2\chi_{0q}\varphi_2 - 2q\varphi_{0q} - \chi_1\varphi_{1q} \\ \psi_3 = -{}^2/_3[\varphi_{2\tau} - \varphi_{2q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + k\varphi_2 - 2\varphi_2 q] \\ \psi_{3q} + 2q\varphi_{2q} - 2\varphi_2 = 0\end{gathered} \qquad (2.9)$$

§ 3. Из последних двух уравнений системы (2.9) получаем уравнение для определения функций φ_2

$$\varphi_{2q\tau} + \varphi_{2qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{2q}{}^2 + \varphi_{2q}(k - 1 - q) + \varphi_2 = 0 \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) подстановкой

$$\varphi_2 = -{}^1/_2 q^2 + {}^1/_3(2 - k)\,q + {}^1/_{54}(1 + k)^2 + {}^3/_2 Z, \qquad \xi = q - {}^2/_9 \tag{3.2}$$

приводится к уравнению

$$ {}^2/_3 Z_{\tau\xi} + Z_{\xi\xi}(Z + \xi^2) + Z_\xi(Z_\xi - 2\xi) = \alpha \tag{3.3}$$

где

$$\alpha = -{}^4/_{81} \quad \text{при } k = 1, \qquad \alpha = 0 \quad \text{при } k = {}^1/_2$$

Пусть $\alpha = -{}^4/_{81}$. Рассмотрим уравнение

$$Z_{\xi\xi}(Z + \xi^2) + Z_\xi(Z_\xi - 2\xi) = 0 \tag{3.4}$$

Это уравнение имеет решения

$$Z = C, \qquad Z = A\sqrt{\xi + B} - {}^4/_3 B\xi - {}^8/_3 B^2 + {}^1/_3\xi^2 \quad (A,\ B,\ C = \text{const}) \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.3) строится методом [1] малого параметра [4].

§ 4. Рассмотрим первые два уравнения системы (2.9); продифференцируем их по q и ψ_{2q} выразим из третьего уравнения. Получим систему

$$\begin{gathered} -\varphi_{1q\tau} - \varphi_{1qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_{1q}\varphi_{2q} + \varphi_{1q} - 4q\varphi_{1q} + \\ + \chi_{1q}\varphi_2 + \chi_1\varphi_{2q} + \varphi_{1q}q + \varphi_1 - k\varphi_{1q} = 2\varphi_2\chi_{1q} + \varphi_1 - 2q\varphi_{1q} - \chi_1\varphi_{2q} \\ \chi_{1q\tau} + \chi_{1qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_{1q}(\varphi_{2q} - 1 + 4q) - \\ - \varphi_{1q} + \chi_{1q} - 2q\chi_{1q} - 2\chi_1 = 0 \end{gathered} \tag{4.1}$$

или

$$\begin{gathered} \varphi_{1q\tau} + \varphi_{1qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{1q}(\varphi_{2q} - 1 + k - q) + \\ + \varphi_2\chi_q - 2\chi_1\varphi_{2q} + 2\varphi_{1q}q = 0 \\ \chi_{1q\tau} + \chi_{1qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_{1q}\varphi_{2q} + 2q\chi_{1q} - 2\chi_1 - \varphi_{1q} = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

Положим

$$\varphi_{1q} = \varphi_{2q}\eta + \xi, \qquad \chi_{1q} = \eta \tag{4.3}$$

Система (4.2) примет вид

$$\begin{gathered} \eta\,[\varphi_{2q\tau} + \varphi_{2qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{2q}{}^2 + \varphi_{2q}(k - 1 - q) + \varphi_2] + \\ + \varphi_{2q}[\eta_\tau + \eta_q(\varphi_2 - q + 2q^2) - 2\chi_1 + 2\eta q] + \xi_\tau + \\ + \xi_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + \xi(\varphi_2 - 1 + k + q) = 0 \\ \eta_\tau + \eta_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + 2\eta q + \eta\varphi_{2q} - 2\chi_1 - \eta\varphi_{2q} - \xi = 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

---

[1] В работе [4] в формуле (2.4), в следующей за ней формуле, а также в (3.3) допущены опечатки: их правильная запись — формулы (3.1), (3.2), (3.5) настоящей работы. Отметим другие существенные опечатки, допущенные в работе [4]. Выражение для ν° из (2.1) нужно читать

$$\nu^\circ = \psi_3(q, \tau)y^{\circ 3} + \psi_1(q, \tau)y^\circ + \nu_0(\tau)$$

Подынтегральные выражения для интегралов, стоящих в квадратных скобках (§ 3), следует разделить на $\varphi_2 - q + 2q^2$, то же относится к аналогичным формулам (5.8): в этом случае эти выражения следует разделить на $\varphi_2 + 2q^2$; наконец, в § 5

$$U_x = -\frac{1}{2}\frac{a_*}{\varkappa + 1}\mu + a_*$$

Используя уравнение (3.1), получаем

$$\xi_\tau + \xi_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + \xi(2\varphi_{2q} - 1 + k + q) = 0$$
$$\eta_\tau + \eta_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + 2\eta q - 2\int \eta dq - \xi = 0 \qquad (4.5)$$

Положим $W = \eta_q$. Продифференцируем второе уравнение, получим два уравнения в частных производных первого порядка (в первое уравнение функция W не входит)

$$\xi_\tau + \xi_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + \xi(2\varphi_{2q} - 1 + k + q) = 0$$
$$W_\tau + W_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + W(\varphi_{2q} + 6q - 1) - \xi_q = 0 \qquad (4.6)$$

Аналогично для следующих трех уравнений системы (2.9)

$$\varphi_{0q\tau} + \varphi_{0qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{0q}(\varphi_{2q} - 1 + 3q + k) + \varphi_{1q}\chi_1 - \chi_{0q}\varphi_2 = 0$$
$$\chi_{0q\tau} + \chi_{0qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_{0q}\varphi_{2q} + 4q\chi_{0q} - \varphi_{0q} - \chi_1\chi_{1q} = 0 \qquad (4.7)$$

Полагая

$$\varphi_{0q} = \varphi_{2q}V + U, \qquad \chi_{0q} = V \qquad (4.8)$$

Получаем

$$U_\tau + U_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + U(2\varphi_{2q} - 1 + 3q + k) + \xi\chi_1 = 0$$
$$V_\tau + V_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + 4qV - U - \chi_1\eta = 0 \qquad (4.9)$$

Таким образом, в общем случае определение решений вида (2.1) сводится к интегрированию уравнения (3.1) и четырех линейных уравнений в частных производных первого порядка. Если φ_2 не зависит от времени, то общее решение уравнений (4.5), (4.9) может быть выписано в виде интегралов, причем в подынтегральные выражения будут входить произвольные функции от аргумента

$$P = \tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2}$$

§ 5. Иногда полезно произвести следующие преобразования уравнений коротких волн [2]:

$$\mu = \mu^\circ e^{-b\tau}, \qquad \nu = \nu^\circ e^{-3/2 b\tau}, \qquad \delta = \delta^\circ e^{-b\tau}, \qquad y = y^\circ e^{-1/2 b\tau} \qquad (5.1)$$

В переменных τ, δ°, y° уравнения примут вид

$$\frac{\partial\mu^\circ}{\partial\tau} + [\mu^\circ - (1-b)\,\delta^\circ]\frac{\partial\mu^\circ}{\partial\delta^\circ} + \frac{1}{2}by^\circ\frac{\partial\mu^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu^\circ}{\partial y^\circ} + (k-b)\,\mu^\circ = 0$$
$$\frac{\partial\mu^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{\partial\nu^\circ}{\partial\delta^\circ} = 0 \qquad (5.2)$$

Уравнения (5.2) также имеют систему точных решений вида

$$\mu^\circ = \varphi_2{}^\circ y^{\circ 2} + \varphi_1{}^\circ y^\circ + \varphi_0{}^\circ$$
$$\nu^\circ = \psi_3{}^\circ y^{\circ 3} + \psi_2{}^\circ y^{\circ 2} + \psi_1{}^\circ y^\circ + \psi_0{}^\circ \qquad (5.3)$$
$$\delta^\circ = qy^{\circ 2} + \chi_1{}^\circ y^\circ + \chi_0{}^\circ$$

причем входящие в эти выражения функции связаны с функциями, входящими в (2.1), равенствами

$$\varphi_2 = \varphi_2{}^\circ, \qquad \varphi_1 = \varphi_1{}^\circ e^{-1/2 b\tau}, \qquad \varphi_0 = \varphi_0{}^\circ e^{-b\tau}$$
$$\psi_3 = \psi_3{}^\circ, \qquad \psi_2 = \psi_2{}^\circ e^{-1/2 b\tau}, \qquad \psi_1 = \psi_1{}^\circ e^{-b\tau}, \qquad \psi_0 = \psi_0{}^\circ e^{-3/2 b\tau} \qquad (5.4)$$

которые следуют из преобразований (5.1). Положим

$$\varphi_{0q}{}^\circ = \varphi_{2q}V^\circ + U^\circ, \qquad \chi^\circ_{0q} = V^\circ, \qquad \varphi_{1q}{}^\circ = \varphi_{2q}\eta^\circ + \xi^\circ, \qquad \chi_{1q}{}^\circ = \eta^\circ$$

Уравнения для определения V°, U°, η°, ξ° можно получить из уравнений (4.5) и (4.9), если положить

$$V = V^\circ e^{-b\tau}, \qquad U = U^\circ e^{-b\tau}, \qquad \eta = \eta^\circ e^{-1/2 b\tau}, \qquad \xi = \xi^\circ e^{-1/2 b\tau}$$

Решения, аналогичные рассмотренным выше, можно построить для уравнений нестационарных околозвуковых течений.

§ 6. Пусть заряд взорван на глубине h; поместим центр сферической системы координат в центр заряда, угол θ будем отсчитывать от плоскости, параллельной свободной поверхности.

Течение, примыкающее к фронту взрывной волны, будем определять уравнениями (1.1). Пусть $\delta_0(\tau)\, e^{-\tau}$ соответствует координате точки A пересечения фронта ударной волны со свободной поверхностью (фиг. 1), $\mu_0(\tau)\, e^{-\tau}$ — значение μ на фронте в этой точке.

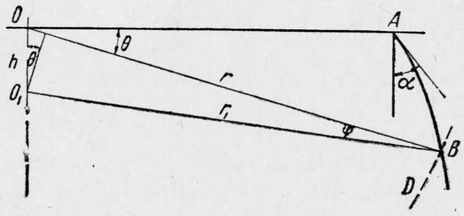
Произведем следующую замену переменных [5]: (6.1)

$$\delta = [\delta^\circ + \delta_{01}(\tau)]\, e^{-\tau}$$

$$\mu = [\mu^\circ + \mu_0(\tau)]\, e^{-\tau}$$

$$y = y^\circ e^{-1/2\tau}$$

$$\nu = \left[\nu^\circ + 2\frac{d\mu_0(\tau)}{d\tau}\, y^\circ\right] e^{-3/2\tau}$$



Фиг. 1

Уравнения (1.1) в новых координатах примут вид

$$\frac{\partial\mu^\circ}{\partial\tau} + (\mu^\circ + \mu_0 - \delta_{01})\frac{\partial\mu^\circ}{\partial\delta^\circ} + \frac{1}{2}y^\circ\frac{\partial\mu^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu^\circ}{\partial y^\circ} = 0$$

$$\frac{\partial\mu^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{\partial\nu^\circ}{\partial\delta^\circ} = 0 \qquad \left(\tau = \ln\frac{a_0 t}{r_0\beta} = \ln\frac{R}{\beta},\ R = \frac{a_0 t}{r_0}\right) \tag{6.2}$$

Здесь r_0— радиус заряда, R — расстояние от места взрыва, выраженное в радиусах заряда, β — постоянная; для тротила [5] можно принять значение $\beta = 1.7$.

При распространении ударной волны вдоль свободной поверхности возможны два режима отражения [2] — регулярное и нерегулярное.

В первом случае волны разрежения, бегущие от области свободной поверхности, через которую прошел ударный фронт, его не догоняют и с ним не взаимодействуют. Во втором случае область течения, возмущенного влиянием свободной поверхности, захватывает также часть фронта ударной волны. Нерегулярное отражение начинается с момента времени, когда угол между ударным фронтом и перпендикуляром к свободной поверхности достигает критического значения [2]:

$$\alpha_* = \left(\frac{n+1}{2}\frac{P}{Bn}\right)^{1/2} = \left(\frac{n+1}{2}M_0\mu\right)^{1/2} \qquad (B = 3045\ am,\ n = 7.15) \tag{6.3}$$

Пусть этот угол был достигнут на расстоянии $R = R_*$ от места взрыва (при этом $\tau = \tau_*$). В нашем приближении имеем

$$\alpha_* = \frac{h}{r_0 R_*} = \frac{h}{\beta r_0}e^{-\tau_*} \tag{6.4}$$

Давление на фронте ударной волны будем определять по формуле [5]

$$P = \frac{D}{R}\frac{1}{\sqrt{\ln R - \ln\beta}} = \frac{D}{\beta}\frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} \qquad (D = \text{const}) \tag{6.5}$$

(для тротила можно положить $D = 16400$ *ат*). Приравнивая (6.3) и (6.4), получим

$$\frac{h}{\beta r_0 \sqrt{^1/_2 (n+1) M_0}} = \sqrt{\mu} e^{\tau_*} = \sqrt{\mu^\circ + \mu_0}\, e^{^1/_2 \tau_*} \tag{6.6}$$

Положим

$$y_0 = \frac{h}{\beta r_0 \sqrt{^1/_2 (n+1) M_0}} \tag{6.7}$$

и примем, что на ударном фронте $\mu_0 + \mu^\circ = 1$ при $\tau = \tau_*$. Тогда из (6.5) и (6.6) следует, что

$$y_0 = e^{^1/_2 \tau_*}, \qquad M_0 = \frac{D}{\beta B n \sqrt{\tau_*}} \tag{6.8}$$

Задачу о взаимодействии ударной волны в воде со свободной поверхностью будем рассматривать, начиная с момента времени, соответствующего $\tau = \tau_*$, в той же постановке, что и в работе [5], где предполагалось, что центр, из которого возникла ударная волна, находился на свободной поверхности. Частные решения, полученные в предыдущих параграфах, позволяют избежать этого ограничения.

Согласно [5], будем предполагать, что возмущенное течение отделяется характеристической поверхностью BD (фиг. 1) уравнений (6.2) от того течения, куда возмущения не дошли. Последнее определяется уравнением [5]

$$\delta^\circ = (\mu^\circ + \mu_0)\, \tau - \tau_* - \delta_{01}(\tau) \tag{6.9}$$

Положение ударного фронта при этом определяется выражением

$$\delta^\circ = \sqrt{\tau}\sqrt{\tau_*} - \tau_* - \delta_{01}(\tau) \tag{6.10}$$

В дальнейшем выгодно перейти к системе координат, связанной с точкой пересечения оси симметрии со свободной поверхностью.

Рассмотрим фиг. 1. Установим связь между радиусами-векторами r_1 и r, а также U_1, V_1 и U, V в старых и новых координатах

$$r = r_1 \cos\varphi + h \sin\theta$$

При малых φ и θ

$$r = a_0 t\, [1 + {}^1/_2 (n+1) M_0 \delta] = a_0 t\, [1 + {}^1/_2 (n+1) M_0 \delta_1] (1 - {}^1/_2 \varphi^2) + h\theta$$

или

$$\frac{n+1}{2} M_0 \delta = \frac{n+1}{2} M_0 \delta_1 - \frac{h^2}{2 a_0^2 t^2} + \frac{h}{a_0 t} \sqrt{^1/_2 (n+1)} \sqrt{M_0}\, y \tag{6.11}$$

Отсюда

$$\delta = \delta_1 - {}^1/_2 y_0^2 e^{-2\tau} + y_0 y e^{-\tau} \tag{6.12}$$

После преобразований (6.1)

$$\begin{gathered} \delta^\circ = \delta_1^\circ - {}^1/_2 y_0^2 e^{-\tau} + y_0 y^\circ e^{-^1/_2 \tau} - \delta_0(\tau) + {}^1/_2 y_0^2 e^{-\tau_*} \\ \delta_0(\tau) = \delta_{10}(\tau) + {}^1/_2 y_0^2 e^{-\tau_*} \end{gathered} \tag{6.13}$$

Аналогично

$$V = V_1 - U \sin\varphi, \qquad U = U_1 \cos\varphi$$

Откуда

$$\begin{gathered} \nu = \nu_1 - \mu y_0 e^{-\tau}, \qquad \nu^\circ = \nu_1^\circ - \mu^\circ y_0 e^{-^1/_2 \tau} - \mu_0(\tau)\, y_0 e^{-^1/_2 \tau} \\ \mu = \mu_1, \qquad \mu^\circ = \mu_1^\circ \end{gathered} \tag{6.14}$$

Таким образом, (6.9) и (6.10) в новой системе координат примут вид

$$\delta^\circ = (\mu^\circ + \mu_0)\,\tau - \tau_* - \delta_0(\tau) - {}^1/_2 y_0^2 e^{-\tau} + y_0 y e^{-{}^1/_2\tau} + {}^1/_2 y_0^2 e^{-\tau_*}$$
$$\nu^\circ = -\mu^\circ y_0 e^{-{}^1/_2\tau} - \mu_0(\tau)\, y_0 e^{-{}^1/_2\tau} + 2\mu_0' y^\circ \qquad (6.15)$$

$$\delta^\circ = \sqrt{\tau}\sqrt{\tau_*} - \tau_* - \delta_0(\tau) + y_0 y e^{-{}^1/_2\tau} - {}^1/_2 y_0^2 e^{-\tau} + {}^1/_2 y_0^2 e^{-\tau_*} \qquad (6.16)$$

Решая уравнение характеристик системы уравнений (6.2) при условии, что искомая поверхность распространяется по течению (6.15) и при $\tau = \tau_*$ проходит через точку A, находим уравнение характеристической поверхности

$$\delta^\circ = q_0(\tau)\, y^{\circ 2} + y^\circ \chi_1^\nu + \chi_0^\nu$$

$$\chi_0^\nu = \tau - \tau_* - \delta_0(\tau) - {}^1/_2 y_0^2 e^{-\tau} + {}^1/_2 y_0^2 e^{-\tau_*} + {}^1/_2 \tau J(\tau, \tau_*)$$
$$\chi_1^\nu = y_0 e^{-{}^1/_2\tau}\,[1 - 2q_0(\tau)\,(1 - e^{\tau-\tau_*})] \qquad (6.17)$$

$$\left(J(\tau, \tau_*) = \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{1}{\tau}\,[\chi_1^{\nu 2} - y_0^2 e^{-\tau}]\, d\tau, \quad q_0(\tau) = \frac{\tau}{2(\tau+1) - 2(\tau_*+1)\, e^{\tau-\tau_*}}\right)$$

Из (6.16) и (6.17) определяем значение $y^\circ = y_B^\circ$, при котором фронт нарушений влиянием свободной поверхности переходит в невозмущенный ударный фронт (6.18)

$$y_B^\circ = -y_0 e^{-{}^1/_2\tau}(e^{\tau-\tau_*} - 1) + \left[[y_0^2 e^{-\tau}(e^{\tau-\tau_*} - 1)^2 - \frac{\tau - \sqrt{\tau_*}}{q_0(\tau)} - \frac{{}^1/_2\tau J(\tau, \tau_*)}{q_0(\tau)}\right]^{1/2}$$

§ 7. Будем искать решение в области ABD (фиг. 1), ограниченной характеристической поверхностью BD, линией нулевого давления (фиг. 1) и ударным фронтом AB, положение которого определяется уравнением [5]

$$\delta_0 - \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{\partial\delta^\circ}{\partial\tau} + \frac{1}{2} y^\circ \frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ} = \frac{1}{2}\mu^\circ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}\right)^2 \qquad (7.1)$$

Граничными условиями на характеристике (6.17) будут условия сопряжения с одномерным течением (6.15), на ударном фронте AB — условия динамической совместности, в нашем приближении они сводятся к условию непрерывности касательной к ударному фронту составляющей вектора скорости частиц

$$(\mu^\circ + \mu_0)\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ} + \nu^\circ = 0 \qquad (7.2)$$

В окрестности точки A ($\delta^\circ = 0$, $y^\circ = 0$) имеет место течение типа течения Прандтля — Майера, оно определяется уравнениями [5]

$$\mu^\circ = -\frac{1}{2}\frac{\delta^{\circ 2}}{y^{\circ 2}} + \mu_0, \qquad \nu^\circ = -\frac{1}{3}\frac{\delta^{\circ 3}}{y^{\circ 3}} + \nu_0(\tau) \qquad (7.3)$$

Искомое решение должно обладать особенностью (7.3). Кроме этих условий, будем считать, что в точке A угол падения фронта ударной волны [5]

$$\alpha_*' = \sqrt{{}^1/_2(n+1)\,p'/Bn} = \sqrt{{}^1/_2(n+1)\,M_c\mu_0(\tau)\,e^{-\tau}} \qquad (7.4)$$

Это условие является некоторым аналогом (7.2) [5]. Из (7.1) и (7.4) следует

$$\left.\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}\right|_{y^\circ=0} = \sqrt{\mu_0}, \qquad \mu_0 = \frac{d\delta_0}{d\tau} \qquad (7.5)$$

§ 8. Для построения течения в указанной выше области воспользуемся частными решениями (5.3) при $b = 1$. Эти решения удовлетворяют условию (7.3) только при $\xi \equiv 0$ и $U \equiv 0$.

В этом случае осуществляется вариант (2.7), функции φ_0, φ_1, χ_0, χ_1 при этом определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&\varphi_{1q} - \chi_{1q}\varphi_{2q} = 0, \quad \chi_{1\tau} + \chi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_1 - 2q\chi_1 + {}^1/_2\chi_1 = 0 \\
&\varphi_{0q} - \chi_{0q}\varphi_{2q} = 0, \quad \chi_{0\tau} + \chi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - \varphi_0 - {}^1/_2\chi_1^{\,2} = 0
\end{aligned} \qquad (8.1)$$

Функция φ_2 определяется из уравнения (3.1); она получена в работе [5]

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q + \frac{2}{81}\ln\left(\frac{2}{9} - q\right) - \frac{1}{60}\left(\frac{4}{81}\right)^2 \frac{0.3 - \ln({}^2/_9 - q)}{({}^2/_9 - q)^2} +$$
$$+ \frac{q_0}{\tau} + \frac{1}{2}q_0^{\,2} - \frac{2}{81}\ln\left(\frac{2}{9} - q_0\right) - \frac{1}{3}q_0 + \frac{1}{60}\left(\frac{4}{81}\right)^2 \frac{0.3 - \ln({}^2/_9 - q_0)}{({}^2/_9 - q_0)^2}$$

Остальные функции определяются по формулам

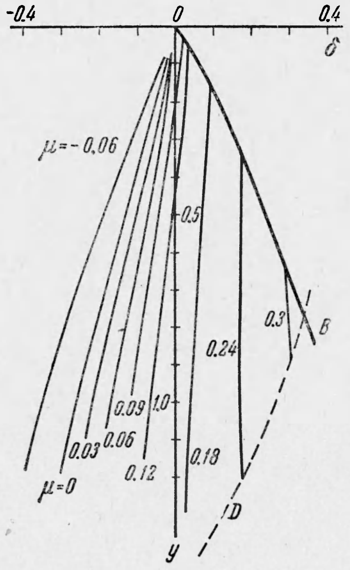
$$\begin{aligned}
\psi_3 &= -{}^2/_3\,[\varphi_{2\tau} + \varphi_{2q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_2 - 2\varphi_2 q] \\
\psi_2 &= -\varphi_{1\tau} - \varphi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \chi_1\varphi_2 + \varphi_1 q - {}^1/_2\varphi_1 \\
\psi_1 &= -2\varphi_{0\tau} - 2\varphi_{0q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_1\chi_1 \\
\psi_{0q} &= \varphi_1\chi_{0q} - \chi_1\varphi_{0q}
\end{aligned} \qquad (8.2)$$

Представим решение одномерного течения (6.15) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\mu^\circ &= \frac{q}{\tau}y^{02} + \varphi_1^{\,\nu}y^\circ + \varphi_0^{\,\nu} \\
\delta^\circ &= qy^{02} + \chi_1^{\,\nu}y^\circ + \chi_0^{\,\nu} \qquad (8.3) \\
\nu^\circ &= -\mu^\circ y_0 e^{-{}^1/_2\tau} - \mu_0 y_0 e^{-{}^1/_2\tau} + 2\mu_0{}' y^\circ
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_1^{\,\nu} = -2q_0\tau^{-1}y_0 e^{-{}^1/_2\tau}(1 - e^{\tau - \tau_*})$$
$$\varphi_0^{\,\nu} = 1 - \mu_0 + {}^1/_2 J(\tau, \tau_*)$$



Фиг. 2

Из условия сопряжения течений (5.3) и (8.3) на характеристике BD (7.4), на которой $q = q_0(\tau)$, имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(q_0, \tau) = q_0/\tau, \\
&\varphi_1(q_0, \tau) = \varphi_1^{\,\nu} \\
&\varphi_0(q_0, \tau) = \varphi_0^{\,\nu}
\end{aligned} \qquad (8.4)$$

а также

$$\begin{aligned}
&\chi_1(q_0, \tau) = \chi_1^{\,\nu}, \qquad \chi_0(q_0, \tau) = \chi_0^{\,\nu} \\
&\psi_3(q_0, \tau) = 0 \\
&\psi_2(q_0, \tau) = -q_0\tau^{-1}y_0 e^{-{}^1/_2\tau} \qquad (8.5) \\
&\psi_1(q_0, \tau) = 2\mu_0{}'y^\circ - \varphi_1^{\,\nu}y_0 e^{-{}^1/_2\tau}, \quad \psi_0(q_0, \tau) = \varphi_0^{\,\nu}y_0 e^{-{}^1/_2\tau} - \mu_0 y_0 e^{-{}^1/_2\tau}
\end{aligned}$$

Система (8.1) имеет единственное решение при граничных условиях (8.4), однако таким же образом, как в работе [5], можно показать, что если выполнены (8.4), то (8.5) удовлетворяются тождественно.

Последнее является следствием тех обстоятельств, что кривая $q=q_0(\tau)$— характеристика системы уравнений (8.1), а (8.3) содержится в классе решений (5.1).

§ 9. Уравнение, определяющее положение фронта ударной волны, при условии (7.5) имеет вид

$$\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{\partial\delta^\circ}{\partial\tau} + \frac{1}{2}y^\circ\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ} = \frac{1}{2}\mu^\circ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}\right)^2 \tag{9.1}$$

Это уравнение должно быть решено при условиях

$$\delta^\circ(y_B{}^\circ, \tau) = \sqrt{\tau}\sqrt{\tau_*} - \tau_* - \int_{\tau_*}^{\tau}\mu_0\,d\tau + y_B{}^\circ y_0 e^{-1/2\tau} - \frac{1}{2}y_0{}^2e^{-\tau} + \frac{1}{2}y_0{}^2e^{-\tau_*}$$

$$\left.\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}\right|_{y^\circ=y_B{}^\circ} = y_0e^{-1/2\tau} \tag{9.2}$$

Причем при всех τ

$$\delta^\circ(0, \tau) = 0 \tag{9.3}$$

В граничные условия (8.4), (8.5), (9.2) входит произвольная функция $\mu_0(\tau)$. Она определялась методом иттерации так же, как в работе [5]. Методом характеристик на ЭЦВМ решалась система (8.1) совместно с уравнением (9.1) в интервале от $\tau = \tau_*$ до $\tau = 4.6$; в зависимости от степени выполнения условия (9.3) вычислялись поправки к предыдущему значению $\mu_0(\tau)$. И снова определялись поля давлений и положение фронта. Условие (9.3) достаточно хорошо удовлетворяется при

$$\mu_0(\tau) = 0.5\left[\frac{\sqrt{\tau_*}}{\sqrt{\tau}} - 0.065\left(\frac{\tau_*}{\tau}\right)^{0.75} + e^{\tau_*-\tau}\right] \tag{9.4}$$

На фиг. 2 приведены результаты расчетов при $\tau_* = 2.6$ ($h / r_0 = 6$), $\tau = 4.3$ ($R = 120$).

При помощи формул (6.7) и (6.8) легко произвести пересчет соответствующих безразмерных величин в давления и расстояния.

Условие (7.2) достаточно хорошо удовлетворяется вдоль всего фронта, исключая окрестность точки A.

В заключение автор благодарит С. А. Христиановича за ряд обсуждений, связанных с данной работой.

Поступила 25 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Гриб А. А., Березин А. Г. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, 1960, № 2.
4. Заславский Б. И. Некоторые частные решения уравнений «коротких волн». ПМТФ, 1962, № 1.
5. Заславский Б. И. Об отражении сферической ударной волны от свободной поверхности. ПМТФ, 1963, № 6.