

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. B. Viktorova, Yu. I. Ozhigov, Modeling of optical conductivity of networks with full binary encoding, *Comp. nanotechnol.*, 2022, Volume 9, Issue 3, 32–36

DOI: 10.33693/2313-223X-2022-9-3-32-36

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 17, 2025, 10:38:49



РАЗРАБОТКА АРХИТЕКТУРЫ КВАНТОВЫХ КОМПЬЮТЕРОВ НА НОВЫХ ПРИНЦИПАХ, СОЗДАНИЕ НОВОГО КВАНТОВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

DEVELOPMENT OF THE ARCHITECTURE OF QUANTUM COMPUTERS BASED ON NEW PRINCIPLES, CREATING NEW QUANTUM PROGRAMMING

1.2.2

*МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ
MATHEMATICAL MODELING,
NUMERICAL METHODS AND COMPLEX PROGRAMS*

DOI: 10.33693/2313-223X-2022-9-3-32-36

Моделирование оптической проводимости сетей с полной бинарной кодировкой

Н.Б. Викторова¹ ©, Ю.И. Ожигов^{2,3} ©

¹ Московский государственный гуманитарный университет,
г. Москва, Российская Федерация

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
г. Москва, Российская Федерация

³ Физико-технологический институт ГАН имени К.А. Валиева,
г. Москва, Российская Федерация

E-mail: ozhigov@cs.msu.ru

Аннотация. Оптическая проводимость – наиболее важная характеристика графов. Она является частным случаем непрерывных квантовых блужданий на графе и зависит как от структуры графа, так и от характеристик волноводов, которые являются его ребрами. Мы исследовали проводимость оптических сетей, вершины которых имеют бинарную кодировку в зависимости от толщин и длин волноводов. Установлено, что проводимость падает до нуля с ростом размера графа при разных распределениях характеристик волноводов, что контрастирует со случайными блужданиями на прямой, где такого эффекта не возникает. Этот эффект имеет чисто интерференционную природу и проявляется именно для графов, кодировка которых содержит все бинарные наборы. Установлены также более тонкие зависимости проводимости от характеристик волноводов. Данный результат может быть полезен при выборе структуры оптических нано-устройств больших размеров, например, для оптических квантовых компьютеров.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, модель Джейнса–Каммингса–Хаббарда, оптическая проводимость, квантовые блуждания на графах

ССЫЛКА НА СТАТЬЮ: Викторова Н.Б., Ожигов Ю.И. Моделирование оптической проводимости сетей с полной бинарной кодировкой // Computational nanotechnology. 2022. Т. 9. № 3. С. 32–36. DOI: 10.33693/2313-223X-2022-9-3-32-36

Modeling of Optical Conductivity of Networks with Full Binary Encoding

N.B. Viktorova¹ ©, Yu.I. Ozhigov^{2,3} ©

¹ Moscow State University for the Humanities,
Moscow, Russian Federation

² Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation

³ Valiev Institute of Physics and Technology,
Moscow, Russian Federation

E-mail: ozhigov@cs.msu.ru

Abstract. Optical conductivity is the most important characteristic of graphs. It is a special case of continuous quantum walks on a graph and depends both on the structure of the graph and on the characteristics of the waveguides that are its edges. We investigated the conductivity of optical networks whose vertices have binary encoding depending on the thickness and length of the waveguides. It is found that the conductivity drops to zero with increasing graph size at different distributions of waveguide characteristics, which contrasts with random walks on a straight line, where such an effect does not occur. This effect has a purely interference nature and manifests itself precisely for graphs whose encoding contains all binary sets. More subtle dependences of conductivity on the characteristics of waveguides are also established. This result can be useful when choosing the structure of optical nanodevices of large sizes, for example, for optical quantum computers.

Key words: Schrodinger equation, Jaynes–Cummings–Hubbard model, optical conductivity, quantum walks on graphs

FOR CITATION: Viktorova N.B., Ozhigov Yu.I. Modeling of Optical Conductivity of Networks with Full Binary Encoding. *Computational Nanotechnology*. 2022. Vol. 9. No. 3. Pp. 32–36. (In Rus.) DOI: 10.33693/2313-223X-2022-9-3-32-36

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые блуждания на графах – важный микро-процесс, находящийся в фокусе исследований уже более 20 лет; основные сведения по работам в этом направлении можно найти в статье [1]. Различают дискретные (см. [2]) и непрерывные [3] блуждания на графах, причем последний тип эквивалентен квантовой динамике единичного фотона в системе оптических полостей, соединенных волноводами в единую сеть. Математическим представлением такой сети будет граф G , в вершинах которого находятся полости, а ребра соответствуют соединяющим эти полости волноводам. В данном графе выделяется начальная и конечная вершины. Фотон может перемещаться от одной полости к другой по волноводам с амплитудами, которые зависят от характеристик этих волноводов.

Такая система оптических полостей представляет простейшую модель оптического нано-устройства, для которого имеется компактное представление в виде конечномерных моделей квантовой электродинамики (КЭД) – модели Джейнса–Каммингса–Хаббарда (ДСН). Моделирование динамики прохождения фотона по такой системе полостей важно для предсказаний характеристик оптических нано-устройств.

Важнейшей характеристикой рассматриваемого типа оптических сетей является их проводимость. Она представляется в виде вероятности появления фотона в конечной полости сети при условии его первоначального положения в начальной полости.

Квантовое состояние фотона в системе полостей будет иметь вид

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j(t) |j\rangle,$$

где J – множество полостей, $|j\rangle$ – состояние, при котором фотон находится в полости j , $\lambda_j \in \mathbb{C}$ – комплексная амплитуда, соответствующая j и зависящая от времени t , так что

$$\sum_{j \in J} |\lambda_j|^2 = 1;$$

последнее равенство является условием нормировки вектора состояния $|\Psi\rangle$, вытекающего из правила Борна: вероятность нахождения фотона в полости p_j после измерения состояния $|\Psi\rangle$ равна

$$p_j = |\lambda_j|^2.$$

Динамика вектора состояния $|\Psi(t)\rangle$ во времени является решением уравнения Шредингера

$$i\hbar|\dot{\Psi}\rangle = H|\Psi\rangle.$$

для эрмитова оператора энергии (гамильтониана) H .

Решение задачи Коши для уравнения Шредингера с начальным условием $|\Psi(0)\rangle = |\Psi_0\rangle$ задается формулой

$$|\Psi(t)\rangle = U_t|\Psi\rangle, \quad (1)$$

где U_t – оператор эволюции

$$U_t = e^{-(i/\hbar)Ht}.$$

Здесь предполагается, что гамильтониан H не зависит от времени. Если такая зависимость имеет место, данная формула сохраняет силу при условии, что экспонента трактуется как *хронологическая*.

Расчет по формуле (1) можно упростить, если найти собственные состояния $|\phi_j\rangle$ и соответствующие собственные значения энергии E_j для оператора H , где $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Тогда решение задачи Коши примет вид

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu_j e^{-(i/\hbar)E_j t} |\phi_j\rangle, \quad (2)$$

где $\mu_j = \langle \phi_j | \Psi(0) \rangle$.

Данная стандартная схема полностью описывает непрерывное квантовое блуждание фотона по системе полостей. Однако для определения проводимости необходимо расширить понятие унитарной эволюции (1), перейдя к обобщению уравнения Шредингера – квантовому основному уравнению.

2. ОПТИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ГРАФОВ

Квантовое основное уравнение имеет вид

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho] + iL(\rho);$$

$$L(\rho) = \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i \left(A_i \rho A_i^\dagger - \frac{1}{2} \{ A_i^\dagger A_i, \rho A_i^\dagger A_i \} \right), \quad (3)$$

на матрицу плотности $\rho(t)$ рассматриваемой системы, в котором нарушение когерентности представляется в виде влияния окружения, и это влияние входит в него в виде факторов декогерентности A_i образующих ортонормированный базис пространства операторов Лиувилля, причем их конкретный вид которых никак не зависит от гамильтониана H [4].

Для нашего случая – блуждания фотона в оптической сети, есть единственный фактор декогерентности $A = a_{f_{in}}$ уничтожение фотона в конечном состоянии. Если начальное состояние имеет вид $\rho(0) = |in\rangle\langle in|$ – нахождение фотона в начальной полости, то проводимость сети определяется как

$$c(t) = 1 - \sum_{j \neq f_{in}} |\lambda_j(t)|^2$$

вероятность вылета фотона из полости. Таким образом, проводимость является функцией от времени. При средней интенсивности вылета фотона из конечной по-

лости качественная картина проводимости может быть получена и решением уравнения Шредингера, если взять в качестве $c(t) = |\lambda_{f_{in}}(t)|^2$ – вероятность нахождения фотона в конечной полости.

3. СЕТИ С ПОЛНОЙ БИНАРНОЙ КОДИРОВКОЙ

Сеть с полной бинарной кодировкой – это граф, вершины которого занумерованы бинарными строками, причем при этом используются все бинарные строки фиксированной длины n .

Вершины такого графа (полости, соответствующие вершинам) соединены волноводами из оптического волокна, причем амплитуда перехода фотона по такому волноводу определяется формулой

$$v = a \exp(bid),$$

где a – толщина волокна; d – его длина; b – константа, зависящая от характеристик волновода. Схематически такая сеть изображена на рис. 1 для $n = 7$.

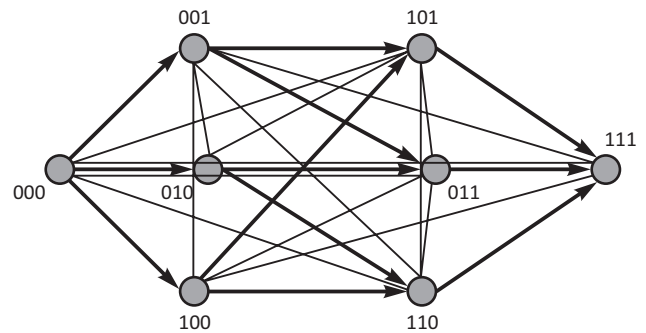


Рис. 1. Оптическая сеть с полной бинарной кодировкой для $n = 3$.

Стрелками обозначены переходы с весом Хамминга 1, тонкими линиями – все волноводы

Fig. 1. Optical network with full binary encoding for $n = 3$.

Arrows indicate transitions with a Hamming weight of 1, thin lines – all waveguides

Гамильтониан, управляющий блужданием фотона, определяется в рамках модели Джайнса–Каммингса–Хаббарда как

$$H = \hbar \sum_{j \in J} a_j^\dagger a_j + \sum_{i < j, i, j \in J} (v_{i,j} a_i^\dagger a_j + \bar{v}_{i,j} a_i a_j^\dagger),$$

где a_i – оператор уничтожения фотона в полости i ; символ « † » означает сопряжение – оператор рождения фотона в данной полости.

Волноводами будут соединены любые две полости, причем мы будем рассматривать два варианта гамильтониана. Первый соответствует волноводам равной толщины и длинам, пропорциональным разности весов Хамминга между вершинами сети. Второй соответствует одинаковой длине всех волнопроводов и толщине, пропорциональной расстоянию Хамминга между вершинами сети.

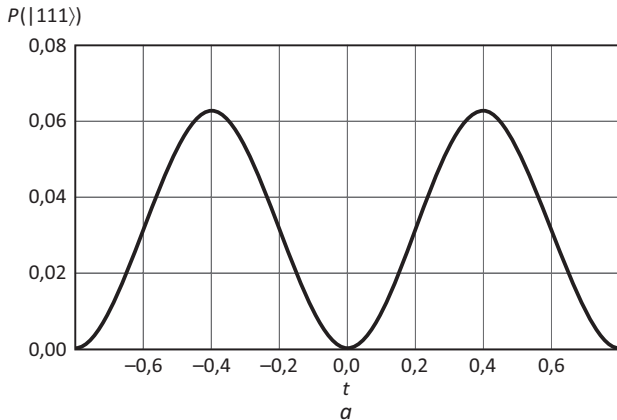
Математически это можно выразить следующим образом:

$$\langle i | H_1 | j \rangle = e^{i(d(i) - d(j))}; \quad \langle i | H_2 | j \rangle = d(j), \quad (4)$$

Викторова Н.Б., Ожигов Ю.И.

где через $d(i)$ обозначается вес Хамминга кортежа, i – число единиц в нем, а через $d(i, j)$ – расстояние Хамминга между кортежами i и j число разрядов, в которых i отличается от j .

Мы провели компьютерное моделирование квантовой динамики состояний фотона в сети для этих двух вариантов распределения толщины и длины волноводов, соединяющих полости.



4. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сравнение проводимости оптических сетей в нашем случае требует применения компьютерного моделирования, так как нет аналитических решений задачи Коши для уравнения Шредингера ни в одном из рассматриваемых случаев.

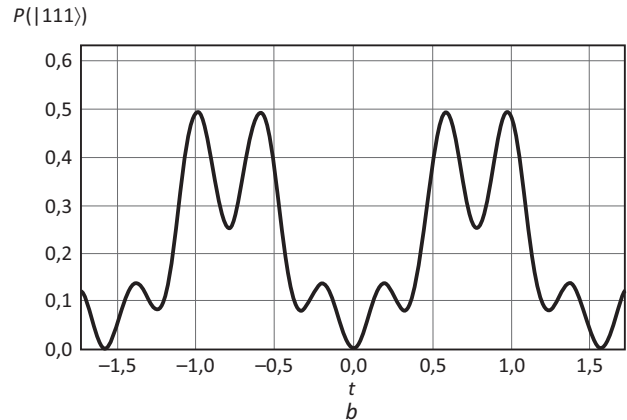


Рис. 2. График вероятности полного перехода для гамильтониана H_1 (a) и H_2 (b) при $n = 3$

Fig. 2. Graph of the probability of a complete transition for the Hamiltonian H_1 (a) and for H_2 (b) at $n = 3$

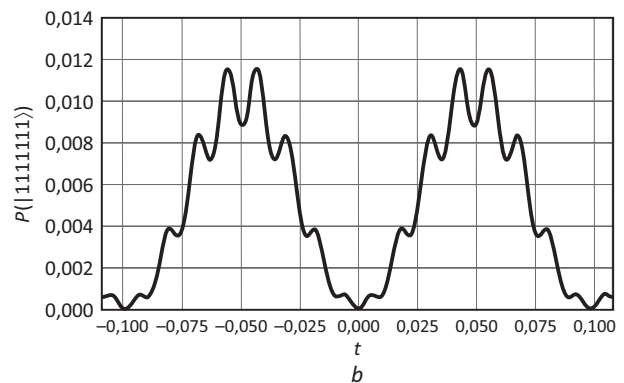
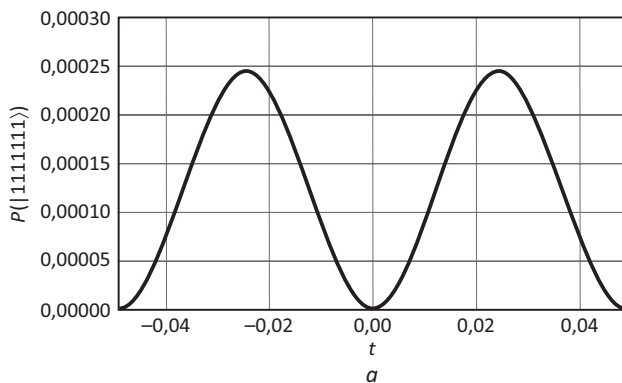


Рис. 3. График вероятности полного перехода для гамильтониана H_1 (a) и H_2 (b) при $n = 7$

Fig. 3. Graph of the probability of a complete transition for the Hamiltonian H_1 (a) and for H_2 (b) at $n = 7$

Полученные в результате моделирования графики проводимости в зависимости от времени изображены на рис. 3 и 2.

Можно увидеть три основных особенности, сравнивая эти рисунки.

Во-первых, частота осцилляций для проводимости растет с ростом n , что говорит о интерференционной природе проводимости.

Во-вторых, проводимость сети падает с ростом ее размера до нуля, что контрастирует с непрерывными квантовыми блужданиями на прямой, где это не имеет места (см. [1]).

В-третьих, сравнивая гамильтонианы H_1 и H_2 , мы видим, что в первом случае имеется синусоидальная зависимость вероятности от времени, а во втором присутствуют биения. Эти биения являются результатом чисто вещественных коэффициентов в гамильто-

ниане H_2 . Физическая реализация этого гамильтониана требует разных толщин волноводов при их одинаковой длине, не зависимо от соединяемых полостей. Такое условие трудно реализовать технически.

В отличие от второго гамильтониана, в случае H_1 мы можем с легкостью реализовать технически данный тип сети. Таким образом, мы установили интересную связь простоты осцилляций проводимости с легкостью физической реализации оптической сети.

5. ВЫВОДЫ

Моделирование динамики фотона в двух типах оптических сетей дало следующие результаты. Наиболее простое в технологическом отношении устройство сети приводит к более простому характеру осцилляций проводимости в зависимости от времени.

С другой стороны, простое устройство сети приводит также и к более быстрому падению максимальной по времени проводимости. В целом, не зависимо от типа сети, проводимость падает до нуля при неограниченном росте размеров сети.

Данные выводы радикально отличают рассматриваемые сети с полной кодировкой от сети с линейным соединением вершин. Эти результаты полезно учитывать при создании оптических нано-устройств со сложной и разветвленной системой волноводов.

Статья проверена программой Антиплагиат

Р е ц е н з е н т: *Федичкин Л.Е.*, кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник Физико-технологического института имени К.А. Валиева РАН

Статья поступила в редакцию 19.08.2022, принята к публикации 22.09.2022
The article was received on 19.08.2022, accepted for publication 22.09.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Викторова Надежда Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент; Московский государственный гуманитарный университет. Москва, Российская Федерация

Ожигов Юрий Игоревич, доктор физико-математических наук, профессор; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Физико-технологический институт ГАН им. К.А. Валиева. Москва, Российская Федерация. E-mail: ozhigov@cs.msu.ru

Литература/References

1. *Ambainis A.* Quantum walks and their algorithmic applications. *International Journal of Quantum Information.* 2003. No. 1. Pp. 507–518.
2. *Rhodes M.L., Wong T.G.* Quantum walk search on the complete bipartite graph. *Phys. Rev. A* 99. 2019. 032301.
3. *Benedetti C., Buscemi F., Bordone P.* Quantum correlations in continuous-time quantum walks of two indistinguishable particles. *Phys. Rev. A* 85. 2012. 042314.
4. *Breuer H., Petruccione F.* The theory of open quantum systems. Oxford, 2002.

ABOUT THE AUTHORS

Nadezhda B. Viktorova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor; Moscow State University for the Humanities. Moscow, Russian Federation

Yuri I. Ozhigov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor; Lomonosov Moscow State University; Valiev Institute of Physics and Technology. Moscow, Russian Federation. E-mail: ozhigov@cs.msu.ru