УДК 517.977

А.Ю. Александров

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Многие задачи теории автоматического управления приводят к исследованию систем дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} p_{sj} f_j(x_j), \quad s = 1,\ldots,n. \tag{1}$$

Здесь p_{sj} – постоянные коэффициенты, а $f_j(x_j)$ принадлежат некоторому множеству допустимых функций [1–3]. В широком классе случаев предполагается, что допустимые функции определены и непрерывны при всех $x_j \in (-\infty,+\infty)$ и обладают свойствами $x_j f_j(x_j) > 0$ при $x_j \neq 0$, $\int_0^{x_j} f_j(\tau)d\tau \to +\infty$ при $|x_j| \to \infty$, $j = 1,\ldots,n$. Таким образом, уравнения (1) имеют нулевое решение.

В [1, 3, 4] для анализа устойчивости системы (1) использовался второй метод Ляпунова. В качестве функции Ляпунова выбиралась функция

$$V = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \int_0^{x_s} f_s(\tau)d\tau, \tag{2}$$

где $\alpha_s > 0$, $s = 1,\ldots,n$. С помощью такой функции были получены достаточные, а в некоторых случаях – необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости рассматриваемой системы. В частности, известно [4], что если $n = 2$, $p_{11} < 0$, $p_{22} < 0$, то система (1) абсолютно устойчива тогда и только тогда, когда справедливо неравенство $p_{11}p_{22} > p_{12}p_{21}$.

В настоящей работе будем предполагать, что уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 f_1(x_1) + b_1 f_n(x_n), \\ \dot{x}_k &= a_k f_k(x_k) + b_k f_{k-1}(x_{k-1}), \quad k = 2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь a_j и b_j – постоянные коэффициенты, причем $a_j < 0$, $b_j \neq 0$, $j = 1,\dots,n$, а функции $f_1(x_1),\dots,f_n(x_n)$ обладают указанными выше свойствами. Уравнения (3) могут описывать динамику системы с замкнутой петлей обратной связи [2].

Теорема 1. *Для абсолютной устойчивости системы (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$|a_1 \dots a_n| > \theta |b_1 \dots b_n|, \tag{4}$$

где $\theta = 1$*, если* $b_1 \dots b_n > 0$*, и* $\theta = \cos^n \pi/n$*, если* $b_1 \dots b_n < 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (3) абсолютно устойчива. Тогда ее нулевое решение асимптотически устойчиво при любых допустимых функциях. Выбирая в качестве $f_j(x_j)$ функции $f_j(x_j) = -x_j/a_j$, $j = 1,\dots,n$, получим линейную систему, которая является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда справедливо неравенство (4).

Достаточность. Функцию Ляпунова для системы (3) строим по формуле (2). Известно [3], что для доказательства абсолютной устойчивости рассматриваемых уравнений достаточно показать, что положительные постоянные $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ можно выбрать так, чтобы квадратичная форма

$$W = \alpha_1 y_1(a_1 y_1 + b_1 y_n) + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k y_k (a_k y_k + b_k y_{k-1})$$

являлась отрицательно-определенной. Не умаляя общности, будем считать, что $\alpha_n = 1$.

Пусть $\gamma_s = b_1 \dots b_s / |a_1 \dots a_s|$, $s = 1,\dots,n$. Произведем замену переменных $\beta_i = -\alpha_i a_i \gamma_i^2$, $z_i = \gamma_i y_i$, $i = 1,\dots,n-1$, $z_n = y_n$. Тогда исследуемая задача сводится к доказательству существования чисел $\beta_i > 0$, $i = 1,\dots,n-1$, при которых функция

$$\widetilde{W} = \beta_1 z_1(z_1 - z_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \beta_k z_k (z_k - z_{k-1}) + c z_n^2 - \delta z_{n-1} z_n$$

положительно определена. Здесь $c = 1/|\gamma_n|$, $\delta = sign(b_1 \dots b_n)$.

Нетрудно показать, что при выполнении неравенства (4) числа $\beta_1,\dots,\beta_{n-1}$ можно выбрать в виде $\beta_i = c^{1-2i/n}$, $i = 1,\dots,n-1$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 утверждает, что система (3) является абсолютно устойчивой тогда и только тогда, когда для нее существует функция Ляпунова вида (2), удовлетворяющая требованиям теоремы Барбашина – Красовского об асимптотической устойчивости в целом [1]. Однако для решения ряда задач более эффективным оказывается использование в качестве функции Ляпунова функции

$$\widetilde{V} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \int_0^{x_s} f_s^{\,\mu}(\tau) d\tau , \qquad (5)$$

где μ – положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем. При этом наилучшие результаты получаются в случае, когда для любого $\mu > 0$ можно построить функцию Ляпунова вида (5), имеющую отрицательно-определенную производную в силу изучаемых уравнений.

Используя результаты работы [5], нетрудно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для того, чтобы при любом $\mu > 0$ для системы (3) существовала функция Ляпунова вида (5), удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы при $b_1 \ldots b_n > 0$ выполнялось неравенство $|a_1 \ldots a_n| > b_1 \ldots b_n$, а при $b_1 \ldots b_n < 0$ – неравенство $|a_1 \ldots a_n| \geq -b_1 \ldots b_n$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336 с.
3. *Персидский С.К.* К вопросу об абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 5-11.
4. *Зубов В.И.* Асимптотическая устойчивость по первому, в широком смысле, приближению // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 3. С. 295-296.
5. *Александров А.Ю.* О существовании функций Ляпунова специального вида для одного класса нелинейных систем // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды тринадцатой межвуз. конф. Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2003. С. 7-9.