Х. Х. Мухсинов, Уточнение оценок арифметического минимума произведения неоднородных линейных форм для больших размерностей, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1981, том 106, 82–103

Х.Х.Мухсинов

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК АРИФМЕТИЧЕСКОГО МИНИМУМА ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ДЛЯ БОЛЬШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

I. <u>Введение</u>. Пусть $n \geqslant 2$,

$$L_k = L_k(x) = L_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} x_j \quad (k=1,\ldots,n),$$

где $\alpha_{kj} \in \mathbb{R}$ $(k,j=1,\ldots,n)$, причем $\Delta = |det(\alpha_{kj})| > 0$. Пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in \mathbb{R}$. Рассмотрим неоднородный арифметический минимум

$$M_n = M(L_1,\ldots,L_n; \gamma_1,\ldots,\gamma_n) = \inf_{x \in \mathbb{Z}^n} \prod_{k=1}^{n} |L_k(x) + \gamma_k|,$$

где точная нижняя граница берется по всем целым точкам $x=(x_1,\ldots,x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$. Минковский [13] предположил, что для любого n

$$M_n \leqslant 2^{-n} \Delta . \tag{1}$$

Эта гипотеза доказана до сих пор лишь для $n \leqslant 5$ (см. Б.Ф.Скубенко [4,5] и цитированную там литературу, к которой можно прибавить [8,9]).

Другое направление исследований по гипотезе Минковского открывает работа Н.Г.Чеботарева [7], где доказано, что для любого n

$$M_n \leqslant 2^{-\frac{n}{2}} \Delta . \tag{2}$$

Оценка (2) многократно улучшалась [14,11,16,15,10,12,1,6,3,2]. Было доказано, что для $n \geqslant n_0^{(i)}$

$$M_n \leqslant 2^{-\frac{n}{2}} \left\{\delta_n^{(i)}\right\}^{-1} \Delta , \tag{3}$$

где

$$\delta_n^{(1)} = 4 - 2\left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^n - 2^{-\frac{n}{2}}, \quad n_0^{(1)} = 2 \qquad \text{(Морделл [15])};$$

$$\delta_n^{(2)}=\gamma_n\,,\quad n_0^{(2)}=2$$ (Девенпорт [II]);

$$\delta_n^{(3)}=\left(3+10^{-4}\right)\left(2e-1\right)$$ (Бомбиери [I0]);

$$\delta_n^{(4)}=3\left(2e-1\right)$$ (Грубер [I2]);

$$\delta_n^{(5)}=e^{-2}\frac{n^{1/3}}{\log^{2/3}n}$$ (Скубенко [6]);

$$\delta_n^{(6)}=e^{-25,6}\frac{n^{3/7}}{\log^{4/7}n}$$ (Нарзуллаев, Скубенко [3]);

здесь

$$\gamma_n=\gamma_n(\theta)=1+2\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}\sum_{\ell=0}^{r}(-1)^{\ell}\binom{r}{\ell}\left(1-\frac{\ell\theta}{r}\right)^{n},$$

$$\gamma_n<2e-1\,,\quad \lim_{n\to\infty}\gamma_n=2e-1\,,$$

где $\theta>0$ - любое фиксированное число с условием

$$f\left((1+2\theta)\sqrt{2}\right)<1\,,\quad f(x)=(2x+1)(x-1)^4(x+1)^2.$$

Ясно, что

$$\max\left\{\delta_n^{(1)},\,\delta_n^{(2)}\right\}<\delta_n^{(4)}<\delta_n^{(3)}$$

для всех $n\geqslant 2$; а для достаточно больших n :

$$\delta_n^{(1)}<\delta_n^{(2)},\quad \delta_n^{(3)}<\delta_n^{(5)}<\delta_n^{(6)}.$$

К сожалению, указанные результаты трудно сравнивать, ибо не вычислялись постоянные $n_0^{(i)}$ (i = 3,4,5,6). По нашим подсчетам [ж)]

$$n_0^{(5)}=e^{365}\,,\quad n_0^{(6)}=e^{4915}$$

[ж)] Заметим, что мы, исправляя неточности в вычислениях работы [3], приводим значение $\delta_n^{(6)}$, отличное от [3].

Целью настоящей работы является получение следующих оценок неоднородного минимума.

ТЕОРЕМА I. Пусть $n_0 \geqslant 10^6$ и

$$C = \log\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{1,25315}{\log \frac{n_0}{2}}. \tag{4}$$

Тогда при $n \geqslant n_0$

$$M_n \leqslant 2^{-\frac{n}{2}} \delta_n^{-1} \Delta , \tag{5}$$

где

$$\delta_n = \frac{C}{\sqrt{8e}} \; \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log \frac{n}{2}}. \tag{6}$$

СЛЕДСТВИЕ I. По любому вещественному числу $\tau > 0$ найдется $n_0(\tau)$, так что для $n \geqslant n_0(\tau)$ имеет место оценка (5) с

$$\delta_n = \left(\frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{8e}} - \tau\right) \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log \frac{n}{2}} > \left(0,189-\tau\right) \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log \frac{n}{2}}. \tag{7}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. При $n \geqslant 1,1 \cdot 10^6$ имеет место оценка (5), где

$$\delta_n = 0,168 \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log \frac{n}{2}}. \tag{8}$$

Оценки (5) получаются совершенствованием метода Б.Ф.Скубенко [6,3]. Оценка $\{(5), (7)\}$, по-видимому, асимптотически неулучшаема без существенного видоизменения метода. О возможном уточнении оценок $\{(5), (6), (4)\}$ и $\{(5), (8)\}$ см. заключительный пункт статьи. Заметим, что при $n \geqslant 1,1 \cdot 10^6$ оценка $\{(5), (8)\}$ – лучшая из известных, ибо

$$\delta_n = 0,168 \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log \frac{n}{2}} > 13,33 > \delta_n^{(3)}, \quad \delta_n > \delta_n^{(6)}.$$

(правда, ср. [2], теорема 3, третий случай).

Приношу глубокую благодарность Б.Ф.Скубенко за постановку задачи и внимание к работе; А.В.Малышеву за советы, позволившие

усовершенствовать изложение и уточнить сам результат.

2. Тело $\mathfrak{T}$ и его объем. Рассмотрим n-мерное выпуклое тело $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}_\lambda$, зависящее от вещественного параметра λ, $0<\lambda<\frac{1}{2}$, и определяемое неравенствами:

$$\mathfrak{T}_\lambda : \begin{cases} |x_i| \leqslant 1+\lambda \quad (i=1,\ldots,n), \\ |x_i-x_j| \leqslant 2 \quad (i,j=1,\ldots,n). \end{cases}$$

Известно [6], что его объем равен

$$V(\mathfrak{T}_\lambda)=2^n(1+n\lambda). \tag{9}$$

Дадим новый вариант доказательства формулы (9). Имеем

$$\mathfrak{T}_\lambda=\mathfrak{T}^{(1)} \cup \mathfrak{T}_\lambda^{(2)},$$

где

$$\mathfrak{T}^{(1)} : |x_i| \leqslant 1 \qquad (i=1,\ldots,n),$$

$$\mathfrak{T}_\lambda^{(2)} : \begin{cases} 1 < \max\limits_i |x_i| \leqslant 1+\lambda, \\ |x_i-x_j| \leqslant 2 \quad (i,j=1,\ldots,n). \end{cases}$$

Так как $\mathfrak{T}^{(1)} \cap \mathfrak{T}_\lambda^{(2)}=\varnothing$ и $V(\mathfrak{T}^{(1)})=2^n$, то

$$V(\mathfrak{T}_\lambda)=2^n+V(\mathfrak{T}_\lambda^{(2)}). \tag{10}$$

Далее:

$$\mathfrak{T}_\lambda^{(2)}=\mathfrak{T}_\lambda^{+} \cup \mathfrak{T}_\lambda^{-}, \quad \mathfrak{T}_\lambda^{+} \cap \mathfrak{T}_\lambda^{-}=\varnothing, \quad V(\mathfrak{T}_\lambda^{+})=V(\mathfrak{T}_\lambda^{-}),$$

$$V(\mathfrak{T}_\lambda^{(2)})=2\,V(\mathfrak{T}_\lambda^{+}), \tag{11}$$

где

$$\mathfrak{T}_\lambda^{\pm}:\begin{cases}1<\pm\max\limits_i x_i\leqslant 1+\lambda,\\ |x_i-x_j|\leqslant 2\quad (i,j=1,\ldots,n).\end{cases}$$

Вычислим объем тела $\mathfrak{T}_\lambda^{+}$. Пусть $k=1,\ldots,n$,

$$\gamma_k:\begin{cases}1<x_k\leqslant 1+\lambda,\\ x_i\leqslant x_k\ (i=1,\ldots,n),\\ |x_i-x_j|\leqslant 2\quad (i,j=1,\ldots,n).\end{cases}$$

Тогда

$$\mathfrak{T}_\lambda^{+}=\bigcup_{k=1}^{n}\gamma_k,\qquad V(\gamma_i\cap\gamma_j)=0\quad (i\neq j),$$

$$V(\mathfrak{T}_\lambda^{+})=\sum_{k=1}^{n}V(\gamma_k)=n\,V(\gamma_1). \tag{12}$$

Так как

$$\gamma_1:\begin{cases}1<x_1\leqslant 1+\lambda,\\ \left.\begin{array}{l}x_i\leqslant x_1,\\ x_1-x_i\leqslant 2,\end{array}\right\}(i=1,\ldots,n)\end{cases}$$

то полагая $x_1=1+\xi$, получаем:

$$V(\gamma_1)=\int\limits_0^{\lambda}d\xi\int\limits_{-1+\xi}^{1+\xi}dx_2\ldots\int\limits_{-1+\xi}^{1+\xi}dx_n=2^{n-1}\lambda. \tag{13}$$

Теперь формула (9) следует из равенств (10)-(13).

3. <u>Неоднородный минимум решетки. Применение теоремы Минковского о выпуклом теле</u>. Для доказательства оценки (5) достаточно

доказать, что для любой точечной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ определителя $d(\Lambda) = \Delta$ и любого вещественного вектора $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

$$M_n = M_n(\Lambda, \gamma) = \inf_{(y_1,\dots,y_n)\in\Lambda+\gamma} \prod_{k=1}^{n} |y_k| \leqslant 2^{-\frac{n}{2}} \delta_n^{-1} \Delta . \tag{I4}$$

При этом мы можем считать, что

$$d(\Lambda) = \Delta = 1 \tag{I5}$$

Если левая часть (I4) равна 0, то оценка (5) тривиальна. В противном случае зададимся произвольно малым вещественным числом $\varepsilon > 0$; не нарушая общности, мы можем предполагать, что для некоторого вещественного числа $a > 0$

$$\alpha = (a, \dots, a) \in \Lambda + \gamma = \Lambda + \alpha , \tag{I6}$$

$$(1-\varepsilon) a^n \leqslant \inf_{(y_1,\dots,y_n)\in\Lambda+\gamma} \prod_{k=1}^{n} |y_k| . \tag{I7}$$

Ибо если точки $\alpha = (a, \dots, a)$ нет в множестве $\Lambda + \gamma$, то совершая гиперболический поворот и отражения в координатных плоскостях (не меняющие левой части (I4)), мы добьемся этого.

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим:

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n} |z_k + 1| .$$

Тогда в силу (I6) и (I7) для любой точки $x \in \Lambda$

$$F\left(\frac{x}{a}\right) \geqslant 1 - \varepsilon . \tag{I8}$$

Пусть $\lambda = \lambda(n)$ - некоторый вещественный параметр (который мы выберем в дальнейшем) с условием: $0 < \lambda < 1/2$;

$$\sigma = (1 + n\lambda)^{-\frac{1}{n}} . \tag{I9}$$

Рассмотрим замкнутое выпуклое тело $\widetilde{\mathcal{I}}_{\lambda,\sigma} = \sigma \widetilde{\mathcal{I}}_\lambda$:

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\lambda,\sigma}: \begin{cases} |x_i| \leqslant \sigma(1+\lambda) & (i=1,\dots,n), \\ |x_i - x_j| \leqslant 2\sigma & (i,j=1,\dots,n). \end{cases}$$

В силу (9) и (19) его объем

$$V(\mathcal{I}_{\lambda,\sigma}) = \sigma^n V(\mathcal{I}_\lambda) = 2^n.$$

Поэтому по теореме Минковского о выпуклом теле найдется точка $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) \in \Lambda$, $\widetilde{x} \neq 0$, для которой

$$\left.\begin{aligned} |\widetilde{x}_i| &\leqslant \sigma(1+\lambda) \quad (i=1,\dots,n), \\ |\widetilde{x}_i - \widetilde{x}_j| &\leqslant 2\sigma \quad (i,j=1,\dots,n). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Пусть для некоторого вещественного параметра $\mu = \mu(n)$, $0 < \mu \leqslant \lambda$, который мы фиксируем в дальнейшем,

$$(1-\varepsilon)a > 2^{-\frac{1}{2}} \sigma (1+\mu). \tag{21}$$

В силу (18)

$$F\left(\frac{\widetilde{x}}{a}\right) F\left(\frac{-\widetilde{x}}{a}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{\widetilde{x}_k}{a}\right)^2 - 1 \right| \geqslant (1-\varepsilon)^2,$$

и так как $\widetilde{x} \neq 0$, то при достаточно малом ε для некоторого индекса k_0

$$\left(\frac{\widetilde{x}_{k_0}}{a}\right)^2 - 1 \geqslant (1-\varepsilon)^{\frac{2}{n}}, \quad \left(\frac{\widetilde{x}_{k_0}}{a}\right)^2 > 2(1-\varepsilon)^2, \quad |\widetilde{x}_{k_0}| > 2^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)a.$$

Учитывая (21), выводим для этого k_0:

$$|\widetilde{x}_{k_0}| > \sigma(1+\mu). \tag{22}$$

4. <u>Упорядочение координат точки $\widetilde{x}$. Обозначения</u>. Заменяя при необходимости $\widetilde{x}$ на $-\widetilde{x}$ и перенумеровывая координаты $\widetilde{x}$, мы можем считать, что

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left|\frac{\tilde{x}_i}{a}\right| > 1 \quad (i=1,\ldots,r),\\
&\rho < \left|\frac{\tilde{x}_i}{a}\right| \leqslant 1 \quad (i=r+1,\ldots,r+s),\\
&\left|\frac{\tilde{x}_i}{a}\right| \leqslant \rho \quad (i=r+s+1,\ldots,n),\\
&\tilde{x}_1 > a,\ |\tilde{x}_i| \leqslant \tilde{x}_1 \quad (i=2,\ldots,n),\\
&\tilde{x}_i > a \ (i=1,\ldots,r_1), \tilde{x}_i < -a (i=r_1+1,\ldots,r_1+r_2),\ r_1+r_2=r,
\end{aligned}
\right\} \tag{23}
$$

где $\rho=\rho(n)$, $0<\rho<1$ - вещественный параметр, который будет выбран в дальнейшем.

Обозначим:

$$
R(z)=\prod_{i=1}^{r}|u_i+1| = R_1(z)\,R_2(z), \tag{24}
$$

$$
R_1(z)=\prod_{i_1=1}^{r_1}|u'_{i_1}+1|,\quad R_2(z)=\prod_{i_2=1}^{r_2}|u''_{i_2}+1|,
$$

$$
S(z)=\prod_{j=1}^{s}|v_j+1|,\quad P(z)=\prod_{k=1}^{p}|w_k+1|,\quad p=n-r-s,
$$

где

$$
u_i=z_i\,(i=1,\ldots,r),\ u'_i=u_i=z_i\,(i=1,\ldots,r_1),\ u''_i=u_{r_1+i}=z_{r_1+i}\,(i=1,\ldots,r_2),
$$

$$
v_j=z_{r+j}\,(j=1,\ldots,s),\ w_k=z_{r+s+k}\,(k=1,\ldots,p),\ r+s+p=n.
$$

(не исключено, что r_2 или s или p равно 0; тогда по определению считаем соответствующее произведение равным I). Имеем:

$$F(z) = R(z)\,S(z)\,P(z)\,. \tag{25}$$

Пусть

$$\tilde{z} = \frac{\tilde{x}}{a} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n) = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_r, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_s, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_p) =$$

$$= (\tilde{u}'_1, \ldots, \tilde{u}'_{r_1}, \tilde{u}''_1, \ldots, \tilde{u}''_{r_2}, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_s, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_p)\,.$$

Тогда (20) и (23) с учетом (22) перепишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&|\tilde{u}_i| > 1 \quad (i = 1, \ldots, r),\\
&\tilde{u}'_{i_1} > 1 \ \ (i_1 = 1, \ldots, r_1),\ \tilde{u}''_{i_2} < -1 \ \ (i_2 = 1, \ldots, r_2),\\
&\tilde{u}_1 = \tilde{u}'_1 = \frac{(1+\theta)\sigma}{a},\ \mu < \theta \leqslant \lambda,\ |\tilde{u}_i| \leqslant \tilde{u}_1 \ (i = 1, \ldots, r),\\
&\rho < |\tilde{v}_j| \leqslant 1 \ (j = 1, \ldots, s),\ |\tilde{w}_k| \leqslant \rho \quad (k = 1, \ldots, p),\\
&|\tilde{z}_i - \tilde{z}_j| \leqslant \frac{2\sigma}{a} \quad (i, j = 1, \ldots, n)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

5. <u>Оценки r , r_2 , s и $P(\tilde{z})$</u> . В силу (I8)

$$F(\pm\tilde{z}) \geqslant 1 - \varepsilon,\ \ F(\tilde{z})\,F(-\tilde{z}) \geqslant (1-\varepsilon)^2. \tag{27}$$

Учитывая (26), получаем:

$$S(\tilde{z})S(-\tilde{z}) = \prod_{j=1}^{s} |1 - \tilde{v}_j^2| \leqslant 1\,,\quad P(\tilde{z})\,P(-\tilde{z}) \leqslant 1\,, \tag{28}$$

а потому из (27), (25) и (28) выводим:

$$R(\tilde{z})\,R(-\tilde{z}) \geqslant (1-\varepsilon)^2, \tag{29}$$

$$S(\tilde{z})\,S(-\tilde{z}) \geqslant (1-\varepsilon)^2 \left\{R(\tilde{z})\,R(-\tilde{z})\right\}^{-1}. \tag{30}$$

Обозначим

$$\mathcal{U}_1 = \sum_{i_1=1}^{r_1} |\tilde{u}'_{i_1}| = \sum_{i=1}^{r_1} \tilde{u}_i\,, \quad \mathcal{U}_2 = \sum_{i_2=1}^{r_2} |\tilde{u}''_{i_2}| = -\sum_{i=r_1+1}^{r} \tilde{u}_i\,,$$

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^{r} |\tilde{u}_i| = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2\,,$$

$$d = r_1 - r_2\,.$$

Тогда в силу (26)

$$|\tilde{u}'_{i_1}| \leqslant \tilde{u}_1 = \frac{(1+\theta)\sigma}{a} \quad (i_1 = 1, \ldots, r_1)$$

$$\tilde{u}_1 - \tilde{u}''_{i_2} \leqslant \frac{2\sigma}{a}, \; \tilde{u}''_{i_2} < -1, \; |\tilde{u}''_{i_2}| \leqslant \frac{(1-\theta)\sigma}{a} \quad (i_2 = 1, \ldots, r_2),$$

откуда

$$\mathcal{U}_1 \leqslant \frac{r_1(1+\theta)\sigma}{a}, \; \mathcal{U}_2 \leqslant \frac{r_2(1-\theta)\sigma}{a}, \; \mathcal{U} \leqslant \frac{r\sigma}{a}\left(1+\theta\,\frac{d}{r}\right). \tag{31}$$

Имеем, используя неравенство для средних геометрических и арифметических, (31) и (21):

$$\begin{aligned} R(\tilde{z})\,R(-\tilde{z}) &= \prod_{i=1}^{r}\left(|\tilde{u}_i|+1\right) \prod_{i=1}^{r}\left(|\tilde{u}_i|-1\right) \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{\mathcal{U}}{r}+1\right)^r \left(\frac{\mathcal{U}}{r}-1\right)^r = \left\{\left(\frac{\mathcal{U}}{r}\right)^2 - 1\right\}^r \leqslant \\ &\leqslant \left\{\frac{\sigma^2}{a^2}\left(1+\theta\,\frac{d}{r}\right)^2 - 1\right\}^r < \end{aligned} \tag{32}$$

$$< \left\{ 2\left(\frac{1+\theta\frac{d}{r}}{1+\mu}\right)^2 (1-\varepsilon)^2 - 1 \right\}^r . \qquad (32)$$

Сравнивая (29) и (32), получаем:

$$2\left(\frac{1+\theta\frac{d}{r}}{1+\mu}\right)^2 (1-\varepsilon)^2 - 1 \geqslant (1-\varepsilon)^{\frac{2}{r}} \geqslant (1-\varepsilon)^2, \quad \theta\frac{d}{r} > \mu,$$

так что $d > 0$ и

$$r < d\,\frac{\theta}{\mu} . \qquad (33)$$

Из (33):

$$r = r_1 + r_2 = 2r_2 + d, \quad r_2 < \tfrac{1}{2} d\left(\frac{\theta}{\mu} - 1\right) < \frac{1}{2} d\,\frac{\theta}{\mu} . \qquad (34)$$

Обозначая

$$V = \sum_{j=1}^{s} |\tilde{v}_j| ,$$

так что в силу (26)

$$\rho < \frac{V}{s} \leqslant 1 ,$$

и используя неравенство между средними и неравенство Коши, получаем:

$$S(\tilde{z})\, S(-\tilde{z}) = \prod_{j=1}^{s} \left(1 - |\tilde{v}_j|^2\right) \leqslant \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{s} |\tilde{v}_j|^2}{s}\right)^s \leqslant$$

$$\leqslant \left\{1 - \left(\frac{V}{s}\right)^2\right\}^s \leqslant \exp\left\{-s\left(\frac{V}{s}\right)^2\right\} \leqslant \exp\left(-s\rho^2\right) . \qquad (35)$$

Далее предполагаем, что для рассматриваемых n

$$\lambda^2 \leqslant 2\mu . \qquad (36)$$

Тогда

$$2\left(\frac{1+\theta\frac{d}{r}}{1+\mu}\right)^2(1-\varepsilon)^2-1\leqslant\left(1+4\theta\frac{d}{r}\right)(1-\varepsilon)^2\quad,$$

так что из (32) следует, что

$$R(\tilde{\tilde{z}})R(-\tilde{\tilde{z}})<(1-\varepsilon)^{2r}\left(1+4\theta\frac{d}{r}\right)^r<(1-\varepsilon)^2\exp(4\theta d).\qquad(37)$$

Из (30) и (37) выводим:

$$S(\tilde{\tilde{z}})S(-\tilde{\tilde{z}})>\exp(-4\theta d).\qquad(38)$$

Сравнивая (35) и (38), получаем:

$$s<\frac{4\theta d}{\left(\frac{V}{S}\right)^2}<\frac{4\theta d}{\rho^2}.\qquad(39)$$

Для оценки $P(\tilde{\tilde{z}})$ оценим $R(-\tilde{\tilde{z}})$ и $S(-\tilde{\tilde{z}})$, ибо в силу (28) и (27)-(25)

$$P(\tilde{\tilde{z}})\leqslant\left\{P(-\tilde{\tilde{z}})\right\}^{-1}\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}R(-\tilde{\tilde{z}})\,S(-\tilde{\tilde{z}}).\qquad(40)$$

Имеем, используя неравенство для средних, (3I), (2I) и (34):

$$R(-\tilde{\tilde{z}})=\prod_{i_1=1}^{r_1}\left(|\tilde{u}'_{i_1}|-1\right)\prod_{i_2=1}^{r_2}\left(|\tilde{u}''_{i_2}|+1\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{U_1}{r_1}-1\right)^{r_1}\left(\frac{U_2}{r_2}+1\right)^{r_2}\leqslant\left\{\frac{(1+\theta)\sigma}{a}-1\right\}^{r_1}\left\{\frac{(1-\theta)\sigma}{a}+1\right\}^{r_2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sqrt{2}\,\frac{1+\theta}{1+\mu}(1-\varepsilon)-1\right\}^{r_1}\left\{\sqrt{2}\,\frac{1-\theta}{1+\mu}(1-\varepsilon)+1\right\}^{r_2}\leqslant$$

$$\leqslant \left\{(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\,\theta)(1-\varepsilon)\right\}^{d}\left\{\left(\sqrt{2}-(1-\sqrt{2}\,\theta)\right)\left(\sqrt{2}+(1-\sqrt{2}\,\theta)\right)\right\}^{\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant (1-\varepsilon)\left\{(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\,\theta)\left[2-(1-\sqrt{2}\,\theta)^2\right]^{\tau_2/d}\right\}^{d} \leqslant$$

$$\leqslant (1-\varepsilon)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}+1}\left(1+(2+\sqrt{2})\theta\right)\left(1+2\sqrt{2}\,\theta\right)^{\frac{1}{2}\frac{\theta}{\mu}}\right\}^{d} \leqslant$$

$$\leqslant (1-\varepsilon)\exp\left\{d\left[-\log(\sqrt{2}+1)+(2+\sqrt{2})\theta+\sqrt{2}\,\frac{\theta^2}{\mu}\right]\right\}. \qquad (41)$$

Из неравенства для средних и (39) выводим:

$$S(\pm\tilde{Z}) \leqslant \prod_{j=1}^{s}\left(1+|v_j|\right) \leqslant \left(1+\frac{V}{s}\right)^{s} = \left\{\left(1+\frac{V}{s}\right)^{\frac{s}{d}}\right\}^{d} <$$

$$< \left\{\left(1+\frac{V}{s}\right)^{4\theta/\left(\frac{V}{s}\right)^2}\right\}^{d} < \exp\left\{d\,\frac{4\theta}{\frac{V}{s}}\right\} < \exp\left(\frac{4d\,\theta}{\varrho}\right). \qquad (42)$$

Из (40), (41) и (42) следует:

$$P(\tilde{Z}) < \exp\left\{d\left[-\log(\sqrt{2}+1)+(2+\sqrt{2})\theta+\sqrt{2}\,\frac{\theta^2}{\mu}+\frac{4\theta}{\varrho}\right]\right\}. \qquad (43)$$

6. Оценки $R(t\tilde{z})$, $S(t\tilde{z})$, $P(t\tilde{z})$ и $F(t\tilde{z})$.

Пусть t – целое число, для которого

$$t_0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\rho}, \tag{44}$$

где $t_0 \geqslant 1$ – некоторая постоянная. Тогда учитывая неравенство для средних, (3I), (2I) и (33), получаем:

$$R(t\tilde{z}) = \prod_{i=1}^{r} |t\tilde{u}_i + 1| \leqslant \prod_{i=1}^{r} (t|\tilde{u}_i| + 1) \leqslant \left(\frac{tU}{r} + 1\right)^{r} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{t\,\frac{\sigma}{a}\left(1+\theta\,\frac{d}{r}\right)+1\right\}^{r} \leqslant \left\{\sqrt{2}\,t\,\frac{1+\theta\frac{d}{r}}{1+\mu}+1\right\}^{r} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sqrt{2}\,t(1+\theta)+1\right\}^{r} \leqslant \left\{\sqrt{2}\left(1+\theta+\frac{1}{\sqrt{2}\,t_0}\right)t\right\}^{d\frac{\theta}{\mu}} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{d\,\frac{\theta}{\mu}\left[\frac{\log 2}{2} + \log t + \theta + \frac{1}{\sqrt{2}\,t_0}\right]\right\},$$

$$R(t\tilde{z}) < \exp\left\{d\,\frac{\lambda}{\mu}\left[\frac{\log 2}{2} + \log t + \lambda + \frac{1}{\sqrt{2}\,t_0}\right]\right\}. \tag{45}$$

Из (26) и (39) выводим:

$$S(t\tilde{z}) = \prod_{j=1}^{s} |tv_j + 1| \leqslant (t+1)^{s} \leqslant \left\{\left(1+\frac{1}{t_0}\right)t\right\}^{\frac{4\theta d}{\rho^2}} <$$

$$< \exp\left\{d\,\frac{4\theta}{\rho^2}\left(\log t + \frac{1}{t_0}\right)\right\},$$

$$S(t\tilde{z}) < \exp\left\{d\,\frac{4\lambda}{\rho^2}\left(\log t + \frac{1}{t_0}\right)\right\}. \tag{46}$$

Далее, так как в силу (26) и (44)

$$|tw_k| \leqslant 1, \quad |tw_k + 1| \leqslant |w_k + 1|^t \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

то используя (43), получаем:

$$P(t\tilde{z}) \leqslant \left\{P(\tilde{z})\right\}^t < \exp\left\{dt\left[-\log(\sqrt{2}+1) + (2+\sqrt{2})\theta + \sqrt{2}\,\frac{\theta^2}{\mu} + \frac{4\theta}{\rho}\right]\right\},$$

$$P(t\tilde{z}) < \exp\left\{dt\left[-\log(\sqrt{2}+1) + (2+\sqrt{2})\lambda + \sqrt{2}\,\frac{\lambda^2}{\mu} + \frac{4\lambda}{\rho}\right]\right\}. \tag{47}$$

Из (25) и (45)–(47) выводим:

$$F(t\tilde{z}) < \exp\left\{d\,G_t\right\}, \tag{48}$$

где

$$G_t = -t\log(\sqrt{2}+1) + (2+\sqrt{2})\lambda t + \sqrt{2}\,\frac{\lambda^2}{\mu}t + \frac{4\lambda}{\rho}t +$$

$$+ \frac{\lambda}{\mu}\left(\log t + \frac{\log 2}{2} + \lambda + \frac{1}{\sqrt{2}\,t_0}\right) + \frac{4\lambda}{\rho^2}\left(\log t + \frac{1}{t_0}\right).$$

Полагая $t = \left[\frac{1}{\rho}\right] = t_0$, получаем, учитывая, что $d \geqslant 1$:

$$F(t\tilde{z}) = F\left(\left[\frac{1}{\rho}\right]\tilde{z}\right) < \exp\left\{-\frac{d}{\rho}H\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{H}{\rho}\right\}, \tag{49}$$

где

$$H = H(\lambda, \mu, \rho) = \log(\sqrt{2}+1) - L; \tag{50}$$

здесь

$$L = L(\lambda, \mu, \varrho) = L_0 + \ell, \tag{51}$$

$$L_0 = \frac{4\lambda}{\varrho} \log\frac{1}{\varrho} + \frac{\lambda\varrho}{\mu} \log\frac{1}{\varrho} = \lambda \log\frac{1}{\varrho}\left(\frac{4}{\varrho} + \frac{\varrho}{\mu}\right), \tag{52}$$

$$\ell = \ell^{(1)} + \ell^{(2)} + \ell^{(3)}, \tag{53}$$

$$\ell^{(1)} = 4\,\frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\log 2}{2}\,\frac{\lambda\varrho}{\mu} = \lambda\left(\frac{4}{\varrho} + \frac{\varrho \log 2}{2\mu}\right),$$

$$\ell^{(2)} = \sqrt{2}\,\frac{\lambda^2}{\mu},$$

$$\ell^{(3)} = \left(\log(\sqrt{2}+1)\right)\varrho + \left(2+\sqrt{2} + \frac{4}{1-\varrho} + \frac{1}{\sqrt{2}(1-\varrho)}\,\frac{\varrho^2}{\mu}\right)\lambda + \frac{\lambda^2\varrho}{\mu}.$$

7. Завершение доказательства теоремы I. Если для некоторого n мы сможем подобрать величины $\lambda = \lambda(n)$, $\mu = \mu(n)$ и $\varrho = \varrho(n)$,

$$0 < \mu < \lambda < \tfrac{1}{2}, \quad 0 < \varrho < 1, \quad \lambda^2 < 2\mu, \tag{54}$$

так, чтобы

$$L < \log(\sqrt{2}+1), \tag{55}$$

то ж) в силу (49) и (50)

$$F\left(\left[\tfrac{1}{\varrho}\right]\tilde{Z}\right) < \exp\left\{-\frac{H}{\varrho}\right\} < 1, \tag{56}$$

где $\exp\left\{-\frac{H}{\varrho}\right\}$ зависит только от n. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ это неравенство противоречит неравенству (I8) при $x = \left[\frac{1}{\varrho}\right]\tilde{x}$. Поэтому при так выбранных λ, μ, ϱ и n неравенство (2I) противоречиво, так что

ж) Аналогичный вывод можно сделать и в случае, если для некоторого t, $t_0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\varrho}$, $G_t < 0$.

$$a \leqslant 2^{-\frac{1}{2}} \sigma \frac{1+\mu}{1-\varepsilon}, \quad M_n \leqslant a^n \leqslant \frac{2^{-\frac{n}{2}} \sigma^n (1+\mu)^n}{1-\varepsilon},$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то

$$M_n \leqslant 2^{-\frac{n}{2}} \delta^{-1}, \tag{57}$$

где

$$\delta = \frac{1}{\sigma^n (1+\mu)^n} = \frac{1+n\lambda}{(1+\mu)^n}. \tag{58}$$

Ищем λ, μ и ρ в виде

$$\rho = b_0 n^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda = b_1 \frac{\rho}{\log\frac{1}{\rho}} = \frac{a_1 n^{-\frac{1}{2}}}{\log\frac{n}{a_2}}, \quad \mu = \frac{1}{b_2}\rho^2 = \frac{a_3}{n}, \tag{59}$$

где

$$a_1 = 2b_0 b_1, \quad a_2 = b_0^2, \quad a_3 = \frac{b_0^2}{b_2}. \tag{60}$$

Тогда

$$\delta_n = \frac{n\lambda+1}{(1+\mu)^n} \sim \frac{n\lambda}{e^{n\mu}} = \frac{a_4 n^{\frac{1}{2}}}{\log\frac{n}{a_2}} \sim a_4 \frac{\sqrt{n}}{\log n}, \quad a_4 = \frac{a_1}{e^{a_3}}, \quad n \to \infty. \tag{61}$$

При этом

$$L_0 = 4b_1 + b_1 b_2 = b_1(4+b_2), \tag{62}$$

$$\ell^{(1)} = \left(4b_1 + \frac{\log 2}{2} b_1 b_2\right) \frac{1}{\log\frac{1}{\rho}} = (8b_1 + b_1 b_2 \log 2)\, \frac{1}{\log\frac{n}{a_2}}, \tag{63}$$

$$\ell^{(2)}=\sqrt{2}\, b_1^2 b_2 \frac{1}{\log\frac{1}{\rho}} = 4\sqrt{2}\, b_1^2 b_2 \frac{1}{\log^2\frac{n}{a_2}}, \tag{64}$$

$$\ell^{(3)}=\left\{\log(\sqrt{2}+1)+\left(2+\sqrt{2}+\frac{4}{1-\rho}+\frac{b_2}{\sqrt{2}(1-\rho)}\right)\frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}+b_1^2 b_2\frac{1}{\log^2\frac{1}{\rho}}\right\}\rho=$$

$$=b_0\left\{\log(\sqrt{2}+1)+\left(4+2\sqrt{2}+\frac{8+b_2\sqrt{2}}{1-b_0 n^{-\frac{1}{2}}}\right)\frac{1}{\log\frac{n}{a_2}}+\frac{4b_1^2 b_2}{\log^2\frac{n}{a_2}}\right\}n^{-\frac{1}{2}}. \tag{65}$$

Зададимся числом C ,

$$0 < c < \log(\sqrt{2}+1). \tag{66}$$

Если для некоторого n мы сможем подобрать b_0 , b_1 и b_2 так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} &4b_1 + b_1 b_2 = c, \\ &\ell=\ell^{(1)}+\ell^{(2)}+\ell^{(3)}<\tau,\ \tau=\log(\sqrt{2}+1)-c, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

то для этого n справедлива оценка (57)-(58).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть C удовлетворяет условиям (66). Положим: [ж)]

$$b_0=\sqrt{2},\quad b_1=\frac{c}{8},\quad b_2=4, \tag{68}$$

так что

$$a_1=\frac{c}{\sqrt{8}},\quad a_2=2,\quad a_3=\frac{1}{2},\quad a_4=\frac{c}{\sqrt{8e}}. \tag{69}$$

Первое из условий (67) выполнено. Для достаточно больших n выполняется и второе условие (67), ибо $\ell=\ell(n)\longrightarrow 0$ при $n\to\infty$.

Оценим ℓ как функцию n . Пусть $n\geqslant 10^6$. Тогда:

ж) Числа b_0 , b_1 , b_2 выбраны так, что a_4 максимально при данном C . Это приводит к асимптотически (при $n\to\infty$ и C близком к $\log(\sqrt{2}+1)$) оптимальной оценке M_n - при данном методе.

$$\ell^{(1)} = c\left(1+\frac{\log 2}{2}\right)\frac{1}{\log\frac{n}{2}} < 1,18684\,\frac{1}{\log\frac{n}{2}}, \tag{70}$$

$$\ell^{(2)} = \frac{c^2\sqrt{2}}{4}\,\frac{1}{\log^2\frac{n}{2}} < 0,27465\,\frac{1}{\log^2\frac{n}{2}} < 0,02093\,\frac{1}{\log\frac{n}{2}}, \tag{71}$$

$$\ell^{(3)} = \left\{\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)+4(\sqrt{2}+1)\left(1+\frac{2}{1-\sqrt{2}n^{-\frac{1}{2}}}\right)\frac{1}{\log\frac{n}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{c^2\sqrt{2}}{4}\,\frac{1}{\log^2\frac{n}{2}}\right\} n^{-\frac{1}{2}} < 3,457855\, n^{-\frac{1}{2}} < 0,04538\,\frac{1}{\log\frac{n}{2}}, \tag{72}$$

$$\ell < 1,25315\,\frac{1}{\log\frac{n}{2}}. \tag{73}$$

Поэтому при $n_0 \geqslant 10^6$ и C , определенном (4), для всех $n \geqslant n_0$ выполнены условия (67), так что

$$M_n \leqslant 2^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\frac{c}{\sqrt{8}}\,\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log\frac{n}{2}}+1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}}\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{c}{\sqrt{8e}}\,\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log\frac{n}{2}}\right)^{-1}$$

Тем самым мы доказали теорему I. При $n_0=1{,}1\cdot 10^6$ мы получаем следствие 2. Первое следствие очевидным образом содержится в теореме.

8. Заключительные замечания. В ходе доказательства теоремы I мы получили оценки для M_n, более сильные, чем (4)-(6). Сформулируем полученные предложения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для некоторых n_0 и c, $0<c<\log(\sqrt{2}+1)$,

$$\left. \ell^{(1)}+\ell^{(2)}+\ell^{(3)} \right|_{n=n_0} < \log(\sqrt{2}+1)-c,$$

где $\ell^{(1)}$, $\ell^{(2)}$, $\ell^{(3)}$ определены равенствами (70)-(72). Тогда при $n \geqslant n_0$ имеет место оценка (5)-(6).

В силу (73) теорема I является прямым следствием теоремы 2. При не слишком больших n выбор (68) параметров b_1, b_2, b_3 уже не является оптимальным. Поэтому здесь полезным может быть предложение, более общее, чем теорема 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для некоторого n величины $\lambda=\lambda(n)$, $\mu=\mu(n)$ и $\rho=\rho(n)$ удовлетворяют условиям (54) и (55), где $L=L(\lambda,\mu,\rho)$ определено формулами (5I), (52) и (53). Тогда при этом n:

$$M_n \leqslant 2^{-\frac{n}{2}}\,\delta^{-1}\,\Delta, \qquad \delta=\frac{n\lambda+1}{(1+\mu)^n}. \tag{74}$$

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть некоторые постоянные n_0, c, $0<c<\log(\sqrt{2}+1)$, b_0, b_1 и b_2 удовлетворяют условиям (67) и (54)-(59)-(60) для $n=n_0$. Тогда при $n \geqslant n_0$:

$$M_n \leqslant 2^{-\frac{n}{2}}\,\delta_n^{-1}\,\Delta, \tag{75}$$

где

$$\delta_n=\frac{\dfrac{a_1\sqrt{n}}{\log\frac{n}{a_2}}+1}{\left(1+\dfrac{a_3}{n}\right)^n} \geqslant a_4\,\frac{\sqrt{n}}{\log\frac{n}{a_2}}\left(1+\frac{a_5}{\sqrt{n}}\right) \geqslant a_4\,\frac{\sqrt{n}}{\log\frac{n}{a_2}}; \tag{76}$$

здесь

$$a_1=2b_0b_1,\quad a_2=b_0^2,\quad a_3=\frac{b_0^2}{b_2},\quad a_4=\frac{a_1}{e^{a_3}},\quad a_5=\frac{1}{a_1}\log\frac{n_0}{a_2}. \tag{77}$$

В частности,[ж)]

$$\lambda=2{,}3556\cdot 10^{-5}, \quad \mu=0{,}571\cdot 10^{-6}, \quad \rho=1{,}828\cdot 10^{-3}$$

удовлетворяют условиям (54) и (55). При $n_0=10^6$ им соответствуют:

$$b_0=1{,}828; \quad b_1=0{,}08124156; \quad b_2=5{,}8522; \quad a_1=0{,}297019;$$

$$a_2=3{,}34; \quad a_3=0{,}571; \quad a_4=0{,}1678; \quad a_5=42{,}45,$$

и следствие I приводит к следующей оценке M_n, более сильной, чем оценка Бомбиери (при $n_0\geqslant 10^6$).

СЛЕДСТВИЕ 2. При $n\geqslant 10^6$

$$M_n\leqslant 2^{-\frac{n}{2}}\delta_n^{-1}\Delta, \quad \delta_n=0{,}1678\frac{\sqrt{n}}{\log\frac{n}{3{,}34}}\left(1+\frac{42{,}45}{\sqrt{n}}\right). \tag{78}$$

Литература

1. М у х с и н о в Х.Х. Применение теоремы переноса к задаче Чеботарева и метод выпуклых тел в проблеме Минковского. – Тр. Самарканд.ун-та (н.с.), 1971, вып.191, с.99–108.
2. М у х с и н о в Х.Х. Уточнение оценок арифметического минимума произведения неоднородных линейных форм для малых размерностей. – Докл.АН УзССР, 1981.
3. Н а р з у л л а е в Х.Н., С к у б е н к о Б.Ф. Уточнение оценки арифметического минимума произведения неоднородных линейных форм. – Зап.научн.семинаров ЛОМИ, 1979, т.82, с.88–94.
4. С к у б е н к о Б.Ф. Доказательство гипотезы Минковского о произведении n линейных форм от n переменных для $n\leqslant 5$. – Зап.научн.семинаров ЛОМИ, 1973, т.33, с.4–36.
5. С к у б е н к о Б.Ф. Новый вариант доказательства неоднородной гипотезы Минковского для $n=5$. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.142, с.240–253.
6. С к у б е н к о Б.Ф. К гипотезе Минковского при больших n. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1978, т.148, с.218–224.

[ж)] Выбор λ, μ, ρ осуществлялся с помощью ЭВМ. Он близок к оптимальному при $n=10^6$.

7. Ч е б о т а р е в Н.Г. Заметки по алгебре и теории чисел. – Уч.зап.Казанск.ун-та, 1934, т.94, № 7, с.3–16. Перепеч.: Собр.соч., т.I, М.–Л., 1949, с.208–221.
8. B a m b a h R.P., W o o d s A.C. On a theorem of Dyson. – J.Number Theory,1974,v.6,№ 6,p.422–433.
9. B a m b a h R.P., W o o d s A.C. Minkowski's conjecture for n=5; a theorem of Skubenko. – J.Number Theory,1980,v.12, №1,p.27–48.
10. B o m b i e r i E. Sul teorema di Tschebotarev. – Acta arithm.,1963,v.8,№3,p.273–281.
11. D a v e n p o r t H. On a theorem of Tschebotareff. – J. London Math.Soc.,1946,v.21,№1,p.28–34. Corr.: J.London Math. Soc.,1949,v.24,p.316.
12. G r u b e r P. Eine Erweiterung des Blichfeldtschen Satzes mit einer Anwendung auf inhomogene Linearformen. – Monatsh. Math.,1967,Bd.71,№2,S.143–147.
13. M i n k o w s k i H. Diophantische Approximationen.Leipzig, 1907.
14. M o r d e l l L.J. Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms. – Vierteljschr.Naturforsch. Gesellsch. Zürich,1940,v.85,№1-2,p.47–51.
15. M o r d e l l L.J. Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms (II). – J.London Math.Soc., 1960,v.35,№1,p.91–97.
16. W o o d s A.C. On a theorem of Tschebotareff. – Duke Math. J.,1958,v.25,№4,p.631–637.