Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. A. Shlik, The metrical characteristics of $N_p$-compacts and removed singularities for $L_p^{(1)}$-space, $p \in (1, \infty)$,
*Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1991, Volume 196, 162–171

https://www.mathnet.ru/eng/znsl5048

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.173
December 11, 2025, 21:00:25

В.А.Шлык

# МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ $N_p$-КОМПАКТОВ И УСТРАНИМЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА $L_p^1$, $p\in(1,\infty)$

По определению, $NC_p$- множество, устранимое для пространства $L_p^1(G)$, не изменяет $p$-емкость $C_p(F_0,F_1,G)$ конденсатора $(F_0,F_1,G)$ [I]. Иначе говоря, $C_p(F_0,F_1,G\setminus E)=$ $=C_p(F_0,F_1,G)$, если $E$ - $NC_p$-множество в $G$ (см.[2]). Отсюда и из равенства (см.[I, теорема 6]).

$$M_q(F_0,F_1,G)=C_p(F_0,F_1,G)^{-q/p},\ q^{-1}+p^{-1}=1, \qquad (I)$$

сразу следует, что $NC_p$-множество не влияет на $q$-модуль семейства $\Sigma(F_0,F_1G)$. Естественно, возникает вопрос о существовании других семейств поверхностей, $q$-модули которых ведут себя сходным образом по отношению к $NC_p$-множеству.

Ниже устанавливаются новые метрические характеристики $N_p$-компактов, порождающих $p$-нормальные области, и $NC_p$-множеств, что позволяет дать ответ на поставленный выше вопрос в применении к семейству достаточно гладких поверхностей. При этом мы используем обозначения и понятия из работы [I] (отметим, что там в доказательстве теоремы 3 вместо $u_K$, $u$ нужно читать $v_K$ и в следствии теоремы 4 вместо $\int_\sigma|\nabla u|^p dL_n$ нужно читать $\int_G|\nabla u|^p dL_n$).

I. Пусть $\Pi=\{x:(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n: a_i<x_i<b_i,\ i=\overline{1,n}\}$,- невырожденный координатный прямоугольник, стороны $\sigma_{0,i}$, $\sigma_{1,i}$ которого параллельны координатной гиперплоскости $x_i=0$. Будем говорить, что компакт $E\subset\Pi$ порождает $p$-нормальную область $G=\Pi\setminus E$ относительно гиперплоскости $x_i=0$ или, другими словами, $E$ - $N_p$-компакт относительно $x_i=0$, если

$$C_p(G)=C_p(\sigma_{0,i},\sigma_{1,i},G)=C_p(\sigma_{0,i},\sigma_{1,i},\Pi)=C_p(\Pi).$$

ТЕОРЕМА I. Пусть $\Sigma_i=\Sigma_i(\Pi\setminus E)$- семейство всех поверхностей $\sigma$ из $\Sigma(\sigma_{0,i},\sigma_{1,i},\Pi\setminus E)$ таких, что $H^{n-1}(\sigma)<H^{n-1}(\sigma_{0,i})$. Тогда $G=\Pi\setminus E$, $E\subset\Pi$, - $p$-нормальная область относительно $x_i=0$ в том и только в том случае, когда $q$-модуль $M_q(\Sigma_i)$ семейства $\Sigma_i$ равен нулю $(q^{-1}+p^{-1}=1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. По условию, $C_p(\Pi\setminus E)=C_p(\Pi)$. Поэтому функция $u=(x_i-b_i)/(b_i-a_i)$, $x\in\Pi$,- экстремальная для



© В.А. Шлык, 1991

$C_p(\Pi)$ и для $C_p(\Pi\setminus E)$. Тогда оценка (см. [I])

$$\int_{\sigma}|\nabla u|^{p-1}dH^{n-1}\geqslant C_p(\Pi\setminus E)=C_p(\Pi)$$

справедлива для $M_q$-почти всех $\sigma\in\Sigma(\sigma_{0,i},\sigma_{1,i},\Pi\setminus E)$. Другими словами, если $\rho=1/H^{n-1}(\sigma_{0,i})$, $x\in\Pi$, то $\rho\wedge(\Sigma(G\setminus E)\setminus\Sigma_i)$, где $M_q(\Sigma_i)=0$. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Заметим, что $L_n(E)=0$ (см. доказательство утверждения о достаточности в теореме 2). Тогда

$$M_q(\Pi)=\int\limits_{\Pi\setminus E}(H^{n-1}(\sigma_{0,i}))^{-q}dL_n\geqslant M_q(\Pi\setminus E)\geqslant M_q(\Pi),$$

что приводит к равенству $C_p(\Pi\setminus E)=C_p(\Pi)$. Теорема доказана.

Применяя принцип локализации нормальных областей [3] и равенство (I), дополним утверждение теоремы I следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если $E$ - $N_p$-компакт относительно $x_i=0$, то $M_q(\Sigma_i)=0$ для произвольного невырожденного координатного прямоугольника $\Pi\subset\mathbb{R}^n$.

2. Пусть $\omega$, $E$ - ограниченные борелевские множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\sigma=\omega\setminus E$ назовем составной поверхностью (с.п.). Будем говорить, что с.п. $\sigma$ удовлетворяет $A_i$-условию, если найдутся прямоугольник $\Pi$ и множество $\sigma(\Pi)\subset\omega$ такие, что

$$\sigma(\Pi)\in\Sigma(\sigma_{0,i},\sigma_{1,i},\Pi)\quad\text{и}\quad H^{n-1}(\sigma(\Pi)\setminus E)<AH^{n-1}(\sigma_{0,i}),$$

где $A$ - некоторая постоянная из промежутка $(0,1]$. Если $\omega$ имеет диаметр $d$, то $\sigma$ назовем с.п. диаметра $d$. Компакт $E$ назовем $A_q^{(i)}$-компактом, если для любого заданного $\varepsilon>0$ $q$-модуль семейства $\Sigma^{\varepsilon}$ всех с.п. диаметра $\leqslant\varepsilon$, удовлетворяющих $A_i$-условию, равен нулю. Здесь $q$-модуль $M_q(\Sigma^{\varepsilon})$ семейства $\Sigma^{\varepsilon}$ и в дальнейшем $q$-модуль для других семейств определяется аналогично $M_q(F_0,F_1,G)$ (см. [I]). При этом, если $\varnothing\subset\Sigma^{\varepsilon}$, то $M_q(\Sigma^{\varepsilon})\overset{\text{def}}{=}\infty$.

ТЕОРЕМА 2. $E$ - $N_p$-компакт относительно $x_i=0$ в том и только в том случае, когда $E$ - $A_q^{(i)}$-компакт.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы проведем для $i=n$. Необходимость. Пусть $E$ - $N_p$-компакт (относительно $x_n=0$). Обозначим через $\{\Pi\}$ семейство всех невырожденных координатных прямоугольников $\Pi=\{x\in\mathbb{R}^n: a_i<x<b_i,\ i=\overline{1,n}\}$,

где $a_i$, $b_i$ - рациональные числа для каждого $i=\overrightarrow{1,n}$. Тогда $\{\Pi\}$ - счетное множество. Через $\Sigma_\Pi$ обозначим семейство всех $\sigma$ из $\Sigma(\sigma_{0,n},\sigma_{1,n},\Pi\setminus E)$, $\Pi\in\{\Pi\}$, удовлетворяющих условию $H^{n-1}(\sigma)<H^{n-1}(\sigma_{0,n})$. В силу предложения I и известных свойств модуля [4],

$$M_q\Big(\bigcup_{\Pi\in\{\Pi\}}\Sigma_\Pi\Big)\leqslant\sum_{\Pi\in\{\Pi\}}M_q(\Sigma_n)=0. \qquad (2)$$

Возьмем теперь любую с.п. $\sigma$, имеющую диаметр $\leqslant\varepsilon$ и удовлетворяющую $A_n$-условию. Согласно $A_n$-условию, существуют прямоугольник $\Pi^1$ и элемент $\sigma(\Pi^1)\in\Sigma(\sigma^1_{0,n},\sigma^1_{1,n},\Pi)$ такие, что

$$H^{n-1}(\sigma(\Pi^1)\setminus E)<AH^{n-1}(\sigma^1_{0,n}).$$

Здесь $\sigma^1_{0,n}$, $\sigma^1_{1,n}$ - стороны прямоугольника $\Pi^1$, параллельные гиперплоскости $x_n=0$. Ясно, что $H^{n-1}(\sigma(\Pi^1)\setminus E)<$ $<H^{n-1}(\sigma^1_{0,n})$, и можно подобрать прямоугольник $\Pi\subset\Pi^1$ из $\{\Pi\}$, для которого

$$(\sigma(\Pi^1)\setminus E)\cap\Pi\in\Sigma(\sigma_{0,n},\sigma_{1,n},\Pi\setminus E) \text{ и } H^{n-1}((\sigma(\Pi^1)\setminus E)\cap\Pi)<H^{n-1}(\sigma_{0,n}).$$

Тем самым с.п. $\sigma\in\Sigma^\varepsilon$ содержит элемент $(\sigma(\Pi^1)\setminus E)\cap\Pi$ из $\bigcup_{\Pi\in\{\Pi\}}\Sigma_n$. Иначе говоря, $\bigcup_{\Pi\in\{\Pi\}}\Sigma_\Pi<\Sigma^\varepsilon$. Ввиду (2) это дает требуемое равенство $M_q(\Sigma^\varepsilon)=0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $M_q(\Sigma^\varepsilon)=0$. Покажем сначала, что $L_n(E)=0$. В самом деле, если $L_n(E)>0$, то можно указать координатный прямоугольник $\Pi=\{x\in\mathbb{R}^n: a_i<x_i<b_i,$ $i=\overrightarrow{1,n}\}$ диаметра $\leqslant\varepsilon$, удовлетворяющий условию $L_n(E\cap\Pi)>0$. Обозначим через $H(s)$ гиперплоскость $x_n=s$, где $s\in(a_n,b_n)$. В силу выбора $\Pi$ можно указать число $b>0$ и компакт $S\subset[a_n,b_n]$, $L_1(S)>0$, такие, что

$$H^{n-1}((H(s)\cap\Pi)\setminus E)\leqslant H^{n-1}(H(s)\cap\Pi)-b$$

для каждого $s\in S$. По построению, $H^{n-1}(H(s)\cap E)>0$

и $H^{n-1}$ -мера, $L_{n-1}$ -мера борелевского множества, расположенного в $H(s)$ , совпадают (см.[5]), где $s \in S$ . Тем самым для любого $s \in S$ можно указать точку плотности $x(s) \in \in H(s) \cap E$ относительно $H^{n-1}$-меры. Другими словами,

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \{H^{n-1}(E \cap D)/H^{n-1}(D)\} = 1, \tag{3}$$

где $D$ - $(n-1)$-мерный квадрат в $H(s)$ с центром симметрии в точке $x(s)$ . Тогда существует квадрат $D = D(s) \subset \Pi$ , удовлетворяющий требованию

$$H^{n-1}(D \setminus E) < A H^{n-1}(D).$$

Заключим $D(s)$ в $n$-мерный прямоугольник $\Pi(s) \subset \Pi$ таким образом, чтобы $D(s) \subset \Sigma(\sigma_{0,n}(s), \sigma_{1,n}(s), \Pi(s))$, где $\sigma_{0,n}(s), \sigma_{1,n}(s)$ - стороны прямоугольника $\Pi(s)$ , параллельные гиперплоскости $x_n = 0$ . Положим

$$\Sigma^0 = \{H(s) \cap \Pi : s \in S\}, \ \tilde{\Sigma}^0 = \{D(s) \setminus E : s \in S\}.$$

Так как $\Sigma^0 > \tilde{\Sigma}^0$ , то $0 < M_q(\Sigma^0) \leqslant M_q(\tilde{\Sigma}^0)$ . Отсюда и из условия $\tilde{\Sigma}^0 \subset \Sigma^\varepsilon$ получаем неравенство $M_q(\Sigma^\varepsilon) > 0$ , что противоречит определению $A_p^{(n)}$-компакта. Следовательно, $L_n(E) = 0$.

Возьмем теперь некоторый координатный прямоугольник $\Pi \supset E$ и покажем, что $\Pi \setminus E$ - $p$-нормальная область (относительно гиперплоскости $x_n = 0$ ). Пусть $U$ - открытое множество, для которого $\overline{U} \subset \Pi$ , $E \subset U$ и $\int_U A^{-q} d L_n < \delta$ , где $\delta$ - заданное положительное число. Удалим из семейства $\Sigma(\sigma_{0,n}, \sigma_{1,n}, \Pi \setminus E)$ все те элементы $\sigma$ , которые содержат с.п. диаметра $\leqslant \varepsilon$ , удовлетворяющие $A_n$-условию, или же имеют бесконечную $H^{n-1}$-меру. Ясно, что $q$-модуль семейства $\Sigma_1$ всех таких $\sigma$ равен нулю. Положим

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Pi \setminus U \\ A^{-1}, & x \in U \end{cases},$$

и пусть $\sigma = \omega \cap (\Pi \setminus E)$ - некоторая поверхность из $\Sigma(\sigma_{0,n}, \sigma_{1,n}, \Pi \setminus E) \setminus \Sigma_1$, где $\omega \in \Sigma(\sigma_{0,n}, \sigma_{1,n}, \mathbb{R}^n)$. Поскольку $L_n(E) = 0$ и $H^{n-1}(\sigma) < \infty$, то можно указать невырожденные координатные прямоугольники $T^1, \ldots, T^m$ диаметра $\leqslant \varepsilon$, не имеющие попарно общих внутренних точек и такие, что $E \subset \bigcup_{j=1}^{m} \bar{T}^j \subset U$, $H^{n-1}(H \cap (E \cup \sigma)) = 0$ для каждой $(n-1)$-мерной гиперплоскости $H$, содержащей, по крайней мере, одну из сторон $T^j$, $j = \overrightarrow{1,m}$. Стороны прямоугольника $T^j$, параллельные $\sigma_{0,n}$, обозначим через $\tau^j_{0,n}$, $\tau^j_{1,n}$. Осуществляя, если требуется, дополнительное разбиение прямоугольников $T^j$, $j \in \overrightarrow{1,m}$, $(n-1)$-мерными координатными гиперплоскостями, ортогональными гиперплоскости $x_n = 0$, представим набор $\{T^j\}$ в виде блоков, удовлетворяющих следующим условиям: для всех прямоугольников из одного и того же блока ортогональные проекции этих прямоугольников на гиперплоскость $x_n = 0$ совпадают; для разных блоков указанные проекции не пересекаются. Поскольку рассуждения дальше носят локальный характер относительно гиперплоскости $x_n = 0$, то будем считать, что набор $\{T^j\}$ состоит из одного блока, в котором находятся два прямоугольника $T^1$ и $T^2$: По построению, $H^{n-1}(\tau^1_{0,n}) = H^{n-1}(\tau^2_{0,n})$. Покажем, что

$$\int_\sigma \rho \, dH^{n-1} \geqslant H^{n-1}(\sigma_{0,n}). \tag{4}$$

Пусть $\Pi p_n(\cdot)$ - ортогональная проекция на гиперплоскость $x_n = 0$. Положим

$$\varkappa = \{x \in \sigma : \Pi p_n x \in \Pi p_n T^1\}, \ \omega_1 = \omega \cap T^1,$$
$$\omega_2 = \omega \cap T^2, \ \sigma_0 = \sigma \setminus \varkappa, \ \varkappa_0 = \varkappa \setminus (\omega_1 \cup \omega_2).$$

В силу условия $\omega \in \Sigma(\sigma_0, \sigma_1, \mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\sigma_0} \rho \, dH^{n-1} \geqslant \int_{\sigma_0} 1 \cdot dH^{n-1} \geqslant H^{n-1}(\sigma_{0,n}) - H^{n-1}(\tau^1_{0,n}).$$

Возможны две ситуации:

$$\begin{aligned} &1) \ \int_\varkappa \rho \, dH^{n-1} \geqslant H^{n-1}(\tau^1_{0,n}), \\ &2) \ \int_\varkappa \rho \, dH^{n-1} < H^{n-1}(\tau^1_{0,n}). \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку в первой ситуации неравенство (4) очевидно, то перейдем к рассмотрению второй ситуации.

Итак, пусть имеет место оценка (5). Тогда $Q = \text{пр}_n T^1 \setminus \text{пр}_n \varkappa_0 \neq \emptyset$ – открытое множество в топологии гиперплоскости $x_n = 0$, естественным образом индуцированной топологией в $\mathbb{R}^n$. Аппроксимируем $Q$ изнутри по $L_{n-1}$-мере объединением конечного числа $(n-1)$-мерных квадратов $D_1, \ldots, D_m$, попарно не имеющих общих внутренних точек. Возьмем, например, $(n-1)$-мерный квадрат $D_1$ и введем в рассмотрение прямоугольник

$$T_1^j = \{(x', x_n) \in T^j : (x', 0) \in D_1\}, \; j = 1, 2.$$

Предположим, что одновременно не выполняются вложения

$$D_1 \subset \text{пр}_n(T_1^1 \cap \omega), \; D_1 \subset \text{пр}_n(T_1^2 \cap \omega).$$

В таком случае можно указать отрезок $\ell_j$, соединяющих стороны $\tau_{0,n}^j$, $\tau_{1,n}^j$ таким образом, что $\ell_j \cap \omega = \emptyset$, $j = 1, 2$. Поскольку $D_1 \cap \text{пр}_n \varkappa_0 = \emptyset$, то стороны $\sigma_{0,n}$, $\sigma_{1,n}$ прямоугольника $\Pi$ можно соединить ломаной $\ell$, для которой отрезки $\ell_1$, $\ell_2$ являются ее звеньями и $\ell \cap \omega = \emptyset$, $\text{пр}_n \ell \subset D_1$. Это противоречит условию $\omega \in \Sigma(\sigma_{0,n}, \sigma_{1,n}, \mathbb{R}^n)$. Следовательно, наше предположение было неверным. Пусть теперь выполняется, например, соотношение $D_1 \subset \text{пр}_n(T_1^1 \cap \omega)$. Из него сразу вытекает, что $(T_1^1 \cap \omega) \setminus E$ разделяет в $T_1^1$ стороны, параллельные $x_n = 0$. С учетом выбора $\sigma$ имеем оценку

$$A^{-1} H^{n-1}((T_1^1 \cap \omega) \setminus E) = A^{-1} H^{n-1}(\sigma \cap T_1^1) \geqslant H^{n-1}(D_1).$$

Аналогичные оценки получим для остальных $(n-1)$-мерных квадратов $D_2, \ldots, D_m$. Объединяя эти оценки и используя соотношения

$$\int_{\varkappa_0} \rho \, dH^{n-1} \geqslant \int_{\varkappa_0} dH^{n-1} \geqslant H^{n-1}(\text{пр}_n \varkappa_n),$$

придем к неравенству $\int_{\varkappa} \rho \, dH^{n-1} \geqslant H^{n-1}(\tau_{0,n}^1)$, что противоречит условию (5). Следовательно, реализуется только первая ситуация, при которой неравенство (4) справедливо. Тогда

$$\rho_1 = \rho / H^{n-1}(\sigma_{0,n}) \wedge (\Sigma(\sigma_{0,n}, \sigma_{1,n}, \Pi \setminus E) \setminus \Sigma_1).$$

Отсюда в силу выбора $\rho_1$ получаем

$$M_q(\Pi\setminus E)\leqslant\int_{\Pi\setminus E}\rho_1^q dL_n<\int_{\Pi}(H^{n-1}(\sigma_{0,n}))^{-q}dL_n+O(1)=$$
$$=M_q(\Pi)+O(1).$$

Следовательно, $M_q(\Pi\setminus E)=M_q(\Pi)$ и $E$ - $N_p$-компакт. Теорема доказана.

В ходе доказательства теоремы 2 было установлено еще одно свойство $N_p$-компакта.

СЛЕДСТВИЕ. $E$ - $N_p$-компакт относительно $x_i=0$ в том и только в том случае, когда существует $\varepsilon>0$ такое, что $q$-модуль семейства $\sum^{\varepsilon}$ равен нулю.

4. Пусть $\omega$, $E$ - ограниченные борелевские множества в $\mathbb{R}^n$. Образуем с.п. $\sigma=\omega\setminus E$. Будем говорить, что с.п. $\sigma$ удовлетворяет $A$-условию, если найдутся прямоугольник $T$ (не обязательно координатный) и множество $\sigma(T)\subset\omega$ такие, что $\sigma(T)\in\sum(\varkappa_0,\varkappa_1,T)$ и

$$H^{n-1}(\sigma(T)\setminus E)<AH^{n-1}(\varkappa_0). \tag{6}$$

Здесь $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ - две параллельные стороны прямоугольника $T$ и $A$ - некоторая постоянная из промежутка $(0,1]$.

Компакт $E$ назовем $A_q$-компактом, если для любого заданного $\varepsilon>0$ $q$-модуль семейства всех с.п., имеющих диаметр $\leqslant\varepsilon$ и удовлетворяющих $A$-условию, равен нулю.

Если $E$ - $NC_p$-множество в $G$ и $E$ - компакт, то $E$ назовем $NC_p$-компактом. В этом случае, учитывая принцип локализации нормальных областей (см.[3]), нетрудно заключить, что любая функция $f\in L_p^1(D\setminus E)$, где $D$ - произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, продолжается до функции $\tilde{f}\in L_p^1(D)$.

ТЕОРЕМА 3. $E$ - $NC_p$-компакт в том и только в том случае, когда $E$ - $A_q$-компакт.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $E$ - $NC_p$-компакт. Рассмотрим систему всех прямоугольников $T_j$, $j\in\mathbb{N}$, из $\mathbb{R}^n$, вершины каждого из которых - точки с рациональными координатами. Нетрудно заметить, что эта система плотна в хаусдорфовой метрике на множестве всех прямоугольников из $\mathbb{R}^n$. Кроме того, вместе с каждым прямоугольником $Q\in\{T_j\}$ она содержит прямоугольники, подобные $Q$ и имеющие одинаковые с $Q$ центры симметрии, сколь угодно большого диаметра.

Пусть теперь $\sigma$ - некоторая с.п., удовлетворяющая $A$-условию относительно прямоугольника $T$. Покажем, что $\sigma$

удовлетворяет $A$-условию относительно некоторого прямоугольника $Q$ из системы $\{T_j\}$. В самом деле, из неравенства (6) следует, что найдется прямоугольник $T^1$, $\overline{T}^1 \subset T$, подобный $T$ и имеющий одинаковый с $T$ центр симметрии. При этом, если $\varkappa_0^1$, $\varkappa_1^1$ - стороны прямоугольника $T^1$, параллельные $\varkappa_0$, то $\sigma(T) \cap T^1$ разделяет эти стороны в $T^1$ и справедливы оценки

$$H^{n-1}((\sigma(T) \cap T^1) \setminus E) < AH^{n-1}(\varkappa_0^1),$$

$$H^{n-1}(\sigma(T) \setminus E) < AH^{n-1}(\varkappa_0^1).$$

Пусть теперь прямоугольник $T^2$ выбирается аналогично $T^1$ с той лишь разницей, что $\overline{T}^1 \subset T^2$, $\overline{T}^2 \subset T$. Тогда из системы $\{T_j\}$ можно выделить последовательность $T(k)$, $k \in \mathbb{N}$, которая при $k \longrightarrow \infty$ сходится в хаусдорфовой метрике к прямоугольнику $T^2$. Кроме того, можно указать параллельные стороны $\varkappa_0(k)$, $\varkappa_1(k)$ прямоугольника $T(k)$, которые в $T(k)$ разделяются множеством $T(k) \cap \sigma(T)$ и удовлетворяют соотношениям

$$H^{n-1}(\varkappa_0) \geqslant H^{n-1}(\varkappa_0(k)) \geqslant H^{n-1}(\varkappa_0^1).$$

Отсюда получаем требующееся свойство с.п. $\sigma$:

$$H^{n-1}((\sigma(T) \cap T(k)) \setminus E) < AH^{n-1}(\varkappa_0(k)).$$

Возьмем теперь какой-нибудь прямоугольник $Q \supset E$ из $\{T_j\}$ и зададим вспомогательную декартову систему координат, координатные $(n-1)$-мерные гиперплоскости которой параллельны соответствующим сторонам $Q$. Поскольку $NC_p$-компакт является $N_p$-компактом относительно каждой $(n-1)$-мерной координатной гиперплоскости из новой системы координат (см.[3]), то $q$-модуль семейства $\Sigma_Q$ всех с.п., удовлетворяющих $A$-условию относительно всех прямоугольников $T$, подобных $Q$, в силу теоремы 2, равен $0$. Ясно, что $M_q(\bigcup_{Q \in \{T_j\}} \Sigma_Q) = 0$. По построению, семейство $\bigcup_{Q \in \{T_j\}} \Sigma_Q$ "короче" семейства $\Sigma$ всех с.п. $\sigma$, удовлетворяющих $A$-условию и, значит, $M_q(\Sigma) = 0$. Тем самым необходимость условия теоремы установлена. Утверждение о доста-

точности вытекает из теоремы 2 и предложения 5 из [3].

Применяя принцип локализации $NC_p$-множеств [2], из теоремы 3 получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. $E$ - $NC_p$-множество в $G$ тогда и только тогда, когда для любого заданного $\varepsilon > 0$ $q$-модуль семейства всех с.п. $\sigma \subset G$, удовлетворяющих $A$-условию и имеющих диаметр $\leqslant \varepsilon$, равен нулю.

5. Пусть $\Sigma$ - некоторое семейство кусочно-липшицевых поверхностей (к.-л.п.), расположенных в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Здесь под к.-л.п. $\omega$ будем понимать замкнутое относительно $G$ множество $\sigma$-конечной $H^{n-1}$-меры, для $H^{n-1}$-почти всех точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ которого можно указать окрестность $O(x)$ такую, что $O(x) \cap \omega$ является образом при липшицевом отображении $(n-1)$-мерного координатного прямоугольника $\Pi' = \{x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : a_i < x_i < b_i,\ i = \overline{1, n-1}\} = \pi p_n O(x) \cap \omega$ (см.доказательство теоремы 3). Положим $\Sigma(E) = \{\omega \setminus E : \omega \in \Sigma\}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $E$ - $NC_p$-множество в $G$. Тогда

$$M_q(\Sigma) = M_q(\Sigma(E)).$$

Справедливость теоремы немедленно вытекает из равенства $M_q(\Sigma_1(E)) = 0$, где $\Sigma_1(E)$ - семейство всех поверхностей $\omega$ из $\Sigma$, удовлетворяющих условию $H^{n-1}(\omega \cap E) > 0$. Доказательство данного равенства основано на незначительной модификации рассуждений при выводе условия $L_n(E) = 0$ в п."Достаточность" доказательства теоремы 2 и на формуле Федерера (см. [6, с.262])

$$H^{n-1}(f(T)) = \int_T J_{n-1}\, dL_{n-1},$$

где $J_{n-1}$ - $(n-1)$-мерный якобиан отображения $f : T \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию Липшица, и $H^{n-1}(f(T))$ вычисляется с учетом кратности отображения $f$.

## Литература


I. Ш л ы к В.А. Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей. В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. I0. Зап.научн.семин.ЛОМИ, I990, т.I85, с.I68-I82.

2. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. Критерий устранимости множеств для пространств $L_p^1$, квазиконформных и квазиизометрических отображений. - Сиб.мат.журн., 1977, т.18, № 1, с.48-68.
3. Шлык В.А. Строение компактов, порождающих нормальные области, и устранимые особенности для пространства $L_p^1(D)$. - Мат.сб., 1990, т.181, № 11, с.1558-1572.
4. Fuglede B. Extremal length and functional completion. - Acta Math., 1957, vol.98, N 3-4, p.171-219.
5. Иванов Л.Д. Вариации множеств и функций. М., 1975.
6. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М., 1987.