



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, Т. С. Тинюкова, Андреевские состояния в квазиодномерном сверхпроводнике на поверхности топологического изолятора, *ТМФ*, 2022, том 212, номер 3, 414–428

DOI: 10.4213/tmf10297

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.153.44

3 ноября 2024 г., 00:43:51



© 2022 г.

Ю. П. Чубурин\*, Т. С. Тинюкова†

## АНДРЕЕВСКИЕ СОСТОЯНИЯ В КВАЗИОДНОМЕРНОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИЗОЛЯТОРА

Исследуются локализованные состояния в  $s$ -волновой сверхпроводящей полосе на поверхности топологического изолятора с перпендикулярным полем Зеемана. Аналитически доказано, что сколь угодно малое локальное возмущение поля Зеемана порождает андреевские локализованные состояния с энергиями вблизи границ сверхпроводящей щели, в то время как (немагнитный) примесный потенциал такого эффекта не вызывает. Достаточно большие возмущения поля Зеемана могут привести к появлению андреевских локализованных состояний с энергией вблизи нуля. Аналитически найдены волновые функции рассматриваемых андреевских локализованных состояний. В отличие от одномерного случая, волновые функции не удовлетворяют условиям сопряжения, характерным для майорановских состояний, вследствие влияния ближайших подзон.

**Ключевые слова:** топологический изолятор, сверхпроводящая щель, андреевское локализованное состояние, подзона, поле Зеемана.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10297>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время продолжают активные исследования топологических сверхпроводников, что связано с появлением на их границах в топологически нетривиальной фазе майорановских локализованных состояний (МЛС), представляющих собой квазичастицы вида “электрон-дырка” с нулевой энергией, подчиняющиеся неабелевой квантовой статистике. Существует большая вероятность использования МЛС в квантовых вычислениях (см. обзоры [1]–[3]).

Работа Ю. П. Чубурина поддержана программой финансирования АААА-А16-116021010082-8. Работа Т. С. Тинюковой выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010.

---

\*Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, Ижевск, Россия. E-mail: chuburin@ftiudm.ru

†Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия. E-mail: ttinyukova@mail.ru

В дальнейшем под андреевскими локализованными состояниями (АЛС) будем понимать квазичастицы, порождаемые примесью или локальным изменением постоянного магнитного поля с энергией внутри сверхпроводящей щели (ср. с аналогичным пониманием АЛС, например, в [4], [5]). В эксперименте различие МЛС и АЛС является серьезной проблемой [4], [6], [7], поэтому актуальны исследования происхождения и поведения АЛС. Теоретически данная проблема обычно изучается в рамках одномерного уравнения Боголюбова–де Жена (БдЖ), так что влияние ближайших подзон не учитывается. Однако при значительном заполнении подзон затрудняется идентификация квазичастиц [8].

В настоящей работе исследуются АЛС в сверхпроводящей полосе на поверхности трехмерного топологического изолятора (ТИ) в присутствии постоянного перпендикулярного поля Зеемана. Аналитически доказано, что при сколь угодно малом локальном возмущении поля Зеемана вблизи границ сверхпроводящей щели возникают энергетические уровни, как и в одномерной модели [9]. Однако в одномерном случае АЛС обладают (отдельно для частиц со спином вверх и спином вниз в спиноре вида (4) (см. ниже)) симметрией “частица-дырка” (см. (29) ниже), что не выполняется в случае полосы (ср. с численными результатами [10], [11]).

В отличие от статьи [12], в которой исследована бесспиновая  $p$ -волновая модель, немагнитная примесь не порождает связанных состояний в ТИ. Кроме того, в случае ТИ волновые функции для топологической и тривиальной фаз симметричны, а для  $p$ -волновой модели волновые функции сильно отличаются друг от друга, и симметрия появляется только при учете резонансных состояний. Отметим, что в одномерной сверхпроводящей структуре на границе двумерного ТИ [9] немагнитная примесь может породить локализованные состояния в тривиальной фазе.

## 2. ГАМИЛЬТониАН И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Двумерная граница трехмерного ТИ с индуцированным благодаря эффекту близости сверхпроводящим порядком (см. обсуждение данного эффекта для границы трехмерного ТИ в [1], [13]) в присутствии перпендикулярного поля Зеемана описывается гамильтонианом БдЖ вида (см. [14]–[16])

$$H = \begin{pmatrix} M & -i\partial_x - \partial_y & 0 & \Delta \\ -i\partial_x + \partial_y & -M & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & -M & -i\partial_x + \partial_y \\ \Delta & 0 & -i\partial_x - \partial_y & M \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\Delta = \text{const} \neq 0$  – вещественный спаривающий потенциал,  $M$  – параметр перпендикулярного поля Зеемана.

Гамильтониан  $H$  действует на спиноры вида

$$\Psi(x, y) = (\psi_{e\uparrow}(x, y), \psi_{e\downarrow}(x, y), \psi_{h\uparrow}(x, y), \psi_{h\downarrow}(x, y))^T, \quad (2)$$

где стрелка указывает направление спина, первые две компоненты описывают электроны, а две последние – дырки. Будем рассматривать решения  $\Psi(x, y)$  уравнения БдЖ в полосе  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 < y < W$ , считая решения периодическими по  $y$  с периодом  $W$ . В дальнейшем величина  $W$  считается достаточно большой, что позволяет считать малыми погрешности от выбора граничных условий по  $y$ , но при этом

она не должна существенно превышать длину когерентности [17]. Таким образом,

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{W}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi^{(n)}(x) e^{-2\pi i n y / W}, \quad (3)$$

где

$$\Psi^{(n)}(x) = (\psi_{e\uparrow}^{(n)}(x), \psi_{e\downarrow}^{(n)}(x), \psi_{h\uparrow}^{(n)}(x), \psi_{h\downarrow}^{(n)}(x))^T = \frac{1}{\sqrt{W}} \int_0^W \Psi(x, y) e^{2\pi i n y / W} dy. \quad (4)$$

Гамильтониан (1) действует на  $n$ -е слагаемое в (3) по формуле

$$\begin{aligned} H(\Psi^{(n)}(x) e^{-2\pi i n y / W}) = \\ = \begin{pmatrix} M & -i\partial_x + 2\pi i n / W & 0 & \Delta \\ -i\partial_x - 2\pi i n / W & -M & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & -M & -i\partial_x - 2\pi i n / W \\ \Delta & 0 & -i\partial_x + 2\pi i n / W & M \end{pmatrix} \times \\ \times (\psi_{e\uparrow}^{(n)}(x), \psi_{e\downarrow}^{(n)}(x), \psi_{h\uparrow}^{(n)}(x), \psi_{h\downarrow}^{(n)}(x))^T, \quad n = 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Матрицу в соотношении (5), определяющую гамильтониан  $H$  в  $n$ -й подзоне, обозначим через  $H^{(n)}$ . В дальнейшем понадобится функция Грина гамильтониана  $H^{(n)}$ , она приведена в приложении.

Спектр  $H^{(n)}$  описывается неравенством (см. (П.3))

$$|E| \geq \sqrt{(|M| - |\Delta|)^2 + \left(\frac{2\pi n}{W}\right)^2},$$

где  $E$  – энергия. Ширина энергетической щели растет с ростом  $|n|$ . Спектр  $H$  совпадает со спектром  $H^{(0)}$  и определяется неравенством  $|E| \geq ||M| - |\Delta||$ .

Рассмотрим уравнение БдЖ

$$(H + V)\Psi = E\Psi \quad (6)$$

с потенциалом

$$V = V(x, y) = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (e^{-2\pi i y / W} + e^{2\pi i y / W}) \delta(x), \quad (7)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака. Потенциал  $V$  описывает локальное по  $x$  возмущение постоянного поля Зеемана и благодаря гармоникам порождает связь между подзонами. Считаем, что потенциальная энергия распределена симметрично относительно нуля, т. е. в вычислениях используются четные приближения дельта-функции  $\delta(x)$ . В дальнейшем нас интересуют лишь ближайšie к  $E = 0$  подзоны

с  $n = 0, \pm 1$ , так что уравнение (6) приближенно записываем в виде

$$\begin{aligned} & (H^{(0)} - E)\Psi^{(0)}(x) + (H^{(1)} - E)\Psi^{(1)}(x)e^{-2\pi iy/W} + (H^{(-1)} - E)\Psi^{(-1)}(x)e^{2\pi iy/W} = \\ & = -m \left( \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(0)}(x) \\ -\psi_{e\downarrow}^{(0)}(x) \\ -\psi_{h\uparrow}^{(0)}(x) \\ \psi_{h\downarrow}^{(0)}(x) \end{pmatrix} (e^{-2\pi iy/W} + e^{2\pi iy/W}) + \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(1)}(x) \\ -\psi_{e\downarrow}^{(1)}(x) \\ -\psi_{h\uparrow}^{(1)}(x) \\ \psi_{h\downarrow}^{(1)}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(x) \\ -\psi_{e\downarrow}^{(-1)}(x) \\ -\psi_{h\uparrow}^{(-1)}(x) \\ \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(x) \end{pmatrix} \right) \delta(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда получаем

$$(H^{(0)} - E) \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(0)}(x) \\ \psi_{e\downarrow}^{(0)}(x) \\ \psi_{h\uparrow}^{(0)}(x) \\ \psi_{h\downarrow}^{(0)}(x) \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(1)}(x) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(x) \\ -(\psi_{e\downarrow}^{(1)}(x) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(x)) \\ -(\psi_{h\uparrow}^{(1)}(x) + \psi_{h\uparrow}^{(-1)}(x)) \\ \psi_{h\downarrow}^{(1)}(x) + \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(x) \end{pmatrix} \delta(x), \quad (9)$$

$$(H^{(\pm 1)} - E) \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(x) \\ \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(x) \\ \psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(x) \\ \psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(x) \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(0)}(x) \\ -\psi_{e\downarrow}^{(0)}(x) \\ -\psi_{h\uparrow}^{(0)}(x) \\ \psi_{h\downarrow}^{(0)}(x) \end{pmatrix} \delta(x). \quad (10)$$

Далее предполагаем, что

$$M, \Delta > 0, \quad |M - \Delta| \ll \min\{M, \Delta\}, \quad |E| < |M - \Delta|, \quad (11)$$

в частности, сверхпроводящая щель мала. Мы также предполагаем, что величины  $p$ ,  $1/W$  и  $M - \Delta$  примерно одного порядка, в частности,  $(1/W)^2 \ll |M - \Delta|$ , а  $|M - \Delta|^2 \ll 1/W$ . Положим

$$a_n^2 = E^2 - \left( \frac{2\pi n}{W} \right)^2 - (M - \Delta)^2. \quad (12)$$

Перейдем, используя вид (II.7) функции Грина  $G^{(n)}(x - x', E)$  гамильтониана  $H^{(n)}$  при  $n = 0$ , от (9) к уравнению

$$\begin{aligned} & (\psi_{e\uparrow}^{(0)}(x), \psi_{e\downarrow}^{(0)}(x), \psi_{h\uparrow}^{(0)}(x), \psi_{h\downarrow}^{(0)}(x))^T = \frac{me^{ia_0|x|}}{4ia_0} \times \\ & \times \begin{pmatrix} M - \Delta + E & a_0 \operatorname{sgn}(x) & -a_0 \operatorname{sgn}(x) & -(M - \Delta + E) \\ a_0 \operatorname{sgn}(x) & -(M - \Delta - E) & M - \Delta - E & -a_0 \operatorname{sgn}(x) \\ -a_0 \operatorname{sgn}(x) & M - \Delta - E & -(M - \Delta - E) & a_0 \operatorname{sgn}(x) \\ -(M - \Delta + E) & -a_0 \operatorname{sgn}(x) & a_0 \operatorname{sgn}(x) & M - \Delta + E \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) \\ -(\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0)) \\ -(\psi_{h\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{h\uparrow}^{(-1)}(0)) \\ \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

(для краткости обозначаем  $\psi(0) = (\psi(+0) + \psi(-0))/2$ ). Умножая (13) на  $\delta(x)$  и интегрируя, получим два уравнения

$$\begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(0)}(0) \\ \psi_{h\downarrow}^{(0)}(0) \end{pmatrix} = \frac{m(M - \Delta + E)}{4ia_0} (\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{e\downarrow}^{(0)}(0) \\ \psi_{h\uparrow}^{(0)}(0) \end{pmatrix} = \frac{m(M - \Delta - E)}{4ia_0} (\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(-1)}(0)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично из (П.7) и (10) находим

$$\begin{aligned} (\psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0), \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0), \psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(0), \psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(0)) &= \frac{m}{4ia_1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} M - \Delta + E & \pm 2\pi i/W & \mp 2\pi i/W & -(M - \Delta + E) \\ \mp 2\pi i/W & -(M - \Delta - E) & M - \Delta - E & \pm 2\pi i/W \\ \pm 2\pi i/W & M - \Delta - E & -(M - \Delta - E) & \mp 2\pi i/W \\ -(M - \Delta + E) & \mp 2\pi i/W & \pm 2\pi i/W & M - \Delta + E \end{pmatrix} \times \\ &\times (\psi_{e\uparrow}^{(0)}(0), -\psi_{e\downarrow}^{(0)}(0), -\psi_{h\uparrow}^{(0)}(0), \psi_{h\downarrow}^{(0)}(0))^T. \end{aligned} \quad (15)$$

### 3. АЛС С ЭНЕРГИЯМИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ЩЕЛИ

Сначала рассмотрим случай топологически тривиальной фазы, когда  $M - \Delta > 0$  (см. [1], [2]). Докажем существование АЛС с энергиями  $E = M - \Delta - \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon \ll |M - \Delta|$ , т. е. вблизи верхней границы сверхпроводящей щели. Из (14) приближенно находим

$$\begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(0)}(0) \\ \psi_{h\downarrow}^{(0)}(0) \end{pmatrix} = \frac{(M - \Delta)m}{2ia_0} (\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\psi_{e\downarrow}^{(0)}(0) = \psi_{h\uparrow}^{(0)}(0) = 0.$$

Пользуясь (16) и введенными выше предположениями, запишем (15) в виде

$$\begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0) \\ \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0) \\ \psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(0) \\ \psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(0) \end{pmatrix} = -\frac{(M - \Delta)m^2}{4a_0a_1} (\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0)) \times \\ \times \begin{pmatrix} M - \Delta, \mp \frac{\pi i}{W}, \pm \frac{\pi i}{W}, -(M - \Delta) \end{pmatrix}^T. \quad (17)$$

Согласно (12) приближенно имеем

$$a_0 = \pm i\sqrt{2\varepsilon(M - \Delta)}, \quad (18)$$

где знаки  $+$  и  $-$  соответствуют локализованному и резонансному состояниям соответственно. Резонансные состояния возникают, когда энергия  $\varepsilon$ , отсчитываемая

от границы щели, переходит на второй лист римановой поверхности квадратного корня. В этом случае в силу (13) волновая функция возрастает на бесконечности за счет множителя  $e^{ia_0|x|}$ . Отметим, что величина  $1/|a_0|$  характеризует время жизни частицы [18], как и величины  $1/|a_{\pm}|$ , где

$$a_1 = a_{-1} = \pm i \sqrt{\left(\frac{2\pi}{W}\right)^2 + (M - \Delta)^2 - E^2} = \pm i \sqrt{\left(\frac{2\pi}{W}\right)^2 + 2\varepsilon(M - \Delta)} \approx \pm \frac{2\pi i}{W}. \quad (19)$$

Далее, если не указано иное, выбираем знак +, в (18) и (19) он соответствует локализованным состояниям. Введем обозначение

$$\alpha = -\frac{m^2(M - \Delta)}{2a_0 a_1} = \frac{m^2 \sqrt{M - \Delta}}{4\sqrt{2\varepsilon}(\pi/W)}. \quad (20)$$

Из (17) получим равенства

$$\psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(0) = -\psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0), \quad \psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(0) = -\psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0). \quad (21)$$

Используя (20), (21), запишем систему уравнений с неизвестными  $\psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0)$ ,  $\psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0)$ :

$$\begin{aligned} \psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0) &= 2\alpha(M - \Delta)(\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0)), \\ \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0) &= \mp 2\alpha \frac{\pi i}{W}(\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0)). \end{aligned} \quad (22)$$

Определитель системы (22) равен  $d = 1 - 4\alpha(M - \Delta)$ . Тогда условие существования ненулевого решения системы имеет вид

$$1 - 4\alpha(M - \Delta) = 0 \quad (23)$$

или, в силу (20),

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{m^2(M - \Delta)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi/W}. \quad (24)$$

Условие (24) означает, что при всех достаточно малых  $m$  существует устойчивый уровень энергии вблизи границы щели. В отличие от одномерного случая [9], это условие не зависит от знака  $m$ .

Найдем волновую функцию, соответствующую этому уровню. При условии (23) система (22) может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ i\pi/(2W(M - \Delta)) & i\pi/(2W(M - \Delta)) & 1 & 0 \\ -i\pi/(2W(M - \Delta)) & -i\pi/(2W(M - \Delta)) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) \\ \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) \\ \psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) \\ \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) \end{pmatrix} = 0, \quad (25)$$

откуда  $\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) = \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) = C = \text{const}$ ,  $\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) = -\psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) = -\pi i C / (W(M - \Delta))$ . Подставляя эти величины в (13) и используя (21), при  $C = 1$  имеем

$$\begin{aligned} (\psi_{e\uparrow}^{(0)}(x), \psi_{e\downarrow}^{(0)}(x), \psi_{h\uparrow}^{(0)}(x), \psi_{h\downarrow}^{(0)}(x))^T &= \frac{me^{ia_0|x|}}{2ia_0} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 2(M - \Delta) & a_0 \operatorname{sgn}(x) & -a_0 \operatorname{sgn}(x) & -2(M - \Delta) \\ a_0 \operatorname{sgn}(x) & 0 & 0 & -a_0 \operatorname{sgn}(x) \\ -a_0 \operatorname{sgn}(x) & 0 & 0 & a_0 \operatorname{sgn}(x) \\ -2(M - \Delta) & -a_0 \operatorname{sgn}(x) & a_0 \operatorname{sgn}(x) & 2(M - \Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{me^{ia_0|x|}}{ia_0} (2(M - \Delta), a_0 \operatorname{sgn}(x), -a_0 \operatorname{sgn}(x), -2(M - \Delta))^T. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично, используя (10), (26), (П.7), получим

$$\begin{aligned} (\psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(x), \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(x), \psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(x), \psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(x))^T &= -\frac{(M - \Delta)m^2 e^{ia_1|x|}}{2a_0 a_1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 2(M - \Delta) & 0 & 0 & -2(M - \Delta) \\ a_1 \operatorname{sgn}(x) \mp 2\pi i/W & 0 & 0 & -(a_1 \operatorname{sgn}(x) \mp 2\pi i/W) \\ -(a_1 \operatorname{sgn}(x) \mp 2\pi i/W) & 0 & 0 & a_1 \operatorname{sgn}(x) \mp 2\pi i/W \\ -2(M - \Delta) & 0 & 0 & 2(M - \Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{2(M - \Delta)m^2 e^{ia_1|x|}}{a_0 a_1} \begin{pmatrix} M - \Delta \\ (\pi i/W)(\operatorname{sgn}(x) \mp 1) \\ -(\pi i/W)(\operatorname{sgn}(x) \mp 1) \\ -(M - \Delta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (26), (27) в (3) при  $n = 0, \pm 1$ , используя (18), (19) и убирая общий множитель  $m/ia_0$ , находим волновую функцию локализованного состояния (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{W}} \left( e^{-\sqrt{2\varepsilon(M-\Delta)}|x|} \times \right. \\ &\times (2(M - \Delta), i\sqrt{2\varepsilon(M - \Delta)} \operatorname{sgn}(x), -i\sqrt{2\varepsilon(M - \Delta)} \operatorname{sgn}(x), -2(M - \Delta)) - \\ &- \frac{(M - \Delta)m e^{-(2\pi/W)|x|}}{\pi/W} \left( \left( M - \Delta, \frac{2\pi i}{W} \theta(x), -\frac{2\pi i}{W} \theta(x), -(M - \Delta) \right) e^{2\pi i y/W} + \right. \\ &\left. \left. + \left( M - \Delta, -\frac{2\pi i}{W} \theta(-x), \frac{2\pi i}{W} \theta(-x), -(M - \Delta) \right) e^{-2\pi i y/W} \right) \right)^T. \end{aligned} \quad (28)$$

“Впадина” на рис. 1 обусловлена вторым слагаемым в правой части (28), т. е. влиянием соседних подзон. Аналогичный вид имеет амплитуда волновой функции АЛС с энергией вблизи нижней границы.

В отличие от одномерной модели [9], волновая функция (28) не обладает симметрией “частица-дырка”, которая описывается условиями сопряжения

$$(\Psi_{e\uparrow})^*(x, y) = \Psi_{h\downarrow}(x, y), \quad (\Psi_{e\downarrow})^*(x, y) = \Psi_{h\uparrow}(x, y) \quad (29)$$

(эта симметрия характерна для МЛС). Отметим, что с увеличением  $\varepsilon$  увеличивается локализация АЛС.



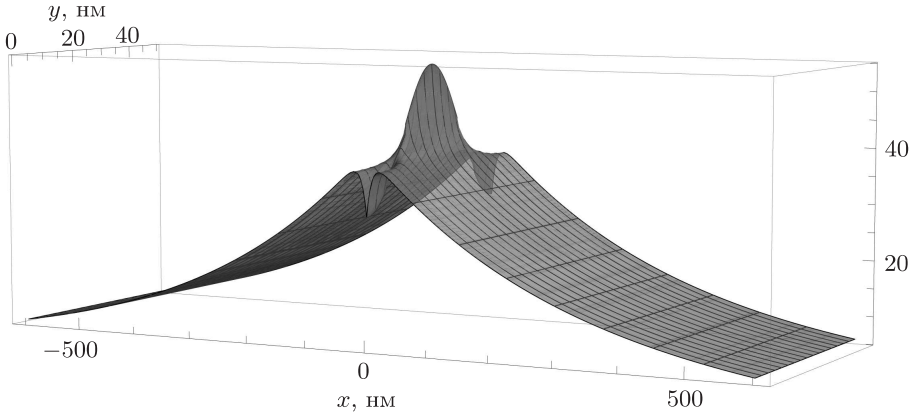


Рис. 1. Амплитуда  $|\Psi|^2$  волновой функции АЛС с энергией вблизи верхней границы щели. Здесь  $M - \Delta = 0.1$  мэВ,  $m = 0,1$  мэВ.

Рассмотрим теперь случай  $E = -(M - \Delta) + \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon \ll \Delta - M$ . В силу (14) имеем

$$\begin{aligned} \psi_{e\uparrow}^{(0)}(0) &= \psi_{h\downarrow}^{(0)}(0) = 0, \\ \begin{pmatrix} \psi_{e\downarrow}^{(0)}(0) \\ \psi_{h\uparrow}^{(0)}(0) \end{pmatrix} &= \frac{m(M - \Delta)}{2ia_0} (\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(-1)}(0)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно (15), как и выше, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0) \\ \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0) \\ \psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(0) \\ \psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(0) \end{pmatrix} &= \frac{(M - \Delta)m^2}{2a_0a_1} (\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(-1)}(0)) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \pm \frac{\pi i}{W}, -(M - \Delta), M - \Delta, \mp \frac{\pi i}{W} \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) получим равенства  $\psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(0) = -\psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0)$ ,  $\psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(0) = -\psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0)$  и систему

$$\begin{aligned} \psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0) &= \mp 2\alpha \frac{\pi i}{W} (\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0)), \\ \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0) &= 2\alpha(M - \Delta) (\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0)). \end{aligned}$$

Условие существования ненулевого решения этой системы совпадает с (23). Для нахождения волновой функции имеем аналогичное (25) уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i\pi}{2W(M-\Delta)} & \frac{i\pi}{2W(M-\Delta)} \\ 0 & 1 & -\frac{i\pi}{2W(M-\Delta)} & -\frac{i\pi}{2W(M-\Delta)} \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) \\ \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) \\ \psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) \\ \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) \end{pmatrix} = 0. \quad (32)$$

Волновая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & \frac{1}{\sqrt{W}} \left( e^{-\sqrt{2\varepsilon(M-\Delta)}|x|} \times \right. \\ & \times (-i\sqrt{2\varepsilon(M-\Delta)} \operatorname{sgn}(x), 2(M-\Delta), -2(M-\Delta), i\sqrt{2\varepsilon(M-\Delta)} \operatorname{sgn}(x)) + \\ & + \frac{(M-\Delta)m e^{-(2\pi/W)|x|}}{\pi/W} \left( \left( -\frac{2\pi i}{W} \theta(-x), -(M-\Delta), M-\Delta, \frac{2\pi i}{W} \theta(-x) \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times e^{2\pi i y/W} + \left( \frac{2\pi i}{W} \theta(x), -(M-\Delta), M-\Delta, -\frac{2\pi i}{W} \theta(x) \right) e^{-2\pi i y/W} \right) \right)^T. \quad (33) \end{aligned}$$

Заметим, что состояния с энергиями вблизи верхней и нижней границ щели имеют противоположные спины (ср. [19], [20]).

Если одновременно поменять знаки  $a_0, a_1$  в (20), что соответствует второму листу римановой поверхности функции Грина, это равенство не изменится, но локализованное состояние станет резонансным с конечным временем жизни (см. выше). Однако в рамках сделанных выше предположений непрерывный переход связанного состояния в резонансное невозможен (ср. [21]), так как величины  $\varepsilon$  и  $M-\Delta$  при изменении знака  $a_1$  должны иметь один и тот же порядок малости, что не согласуется с приведенными выше условиями.

Рассмотрим теперь случай топологически нетривиальной фазы  $\Delta - M > 0$ . Положим  $E = \Delta - M - \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon \ll \Delta - M$ . Тогда из (14) получим (30) и затем (31), но с  $a_0 = i\sqrt{2\varepsilon(\Delta - M)}$ . Условие существования АЛС имеет вид (ср. (24))

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{m^2(\Delta - M)^{3/2}}{\sqrt{2\pi}/W}. \quad (34)$$

Изменения волновой функции аналогичны изменениям при переходе от верхней границы щели к нижней в тривиальной фазе.

#### 4. АЛС С ЭНЕРГИЕЙ ВБЛИЗИ НУЛЯ

Рассмотрим состояния с энергиями  $E = \varepsilon \approx 0$ . Из (14), (15) имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(0)}(0) \\ \psi_{h\downarrow}^{(0)}(0) \end{pmatrix} &= \frac{m(M-\Delta)}{4ia_0} (\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \psi_{e\downarrow}^{(0)}(0) \\ \psi_{h\uparrow}^{(0)}(0) \end{pmatrix} &= \frac{m(M-\Delta)}{4ia_0} (\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(-1)}(0)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

и

$$\begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0) \\ \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0) \\ \psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(0) \\ \psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(0) \end{pmatrix} = -\frac{(M - \Delta)m^2}{16a_0a_1} \times \begin{pmatrix} M - \Delta & \pm 2\pi i/W & \mp 2\pi i/W & -(M - \Delta) \\ \mp 2\pi i/W & -(M - \Delta) & M - \Delta & \pm 2\pi i/W \\ \pm 2\pi i/W & M - \Delta & -(M - \Delta) & \mp 2\pi i/W \\ -(M - \Delta) & \mp 2\pi i/W & \pm 2\pi i/W & M - \Delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0) \\ -(\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\uparrow}^{(-1)}(0)) \\ \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0) \\ -(\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) - \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0)) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Из (36) получим

$$\psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0) = -\psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(0), \quad \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0) = -\psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(0). \quad (37)$$

Используя (20), получим систему

$$\begin{aligned} \psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0) &= \frac{\alpha}{2} \left( (M - \Delta)(\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0)) \mp \frac{2\pi i}{W}(\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0)) \right), \\ \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0) &= \frac{\alpha}{2} \left( \mp \frac{2\pi i}{W}(\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0)) + (M - \Delta)(\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0)) \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Определитель матрицы системы (38) равен  $(1 - \alpha(M - \Delta))^2$ , поэтому условие существования локализованного состояния имеет вид

$$\frac{m^2|M - \Delta|}{2\sqrt{(2\pi/W)^2 + (M - \Delta)^2}} = 1 \quad (39)$$

и не зависит от фазы. Если выполняется (39), из (38) получаем

$$\begin{aligned} \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) - \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) &= -\frac{2\pi i}{W(M - \Delta)}(\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0)), \\ \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) &= -\frac{W(M - \Delta)}{2\pi i}(\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) - \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0)), \end{aligned}$$

где  $\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) = C_1$ ,  $\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) - \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) = C_2$  – произвольные константы. Пусть  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ , тогда

$$\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) = \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) = \frac{1}{2}, \quad \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) = -\psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) = -\frac{\pi i}{W(M - \Delta)}. \quad (40)$$

Если  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$ , имеем

$$\psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) = -\psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) = \frac{1}{2}, \quad \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) = \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) = -\frac{W(M - \Delta)}{4\pi i}. \quad (41)$$

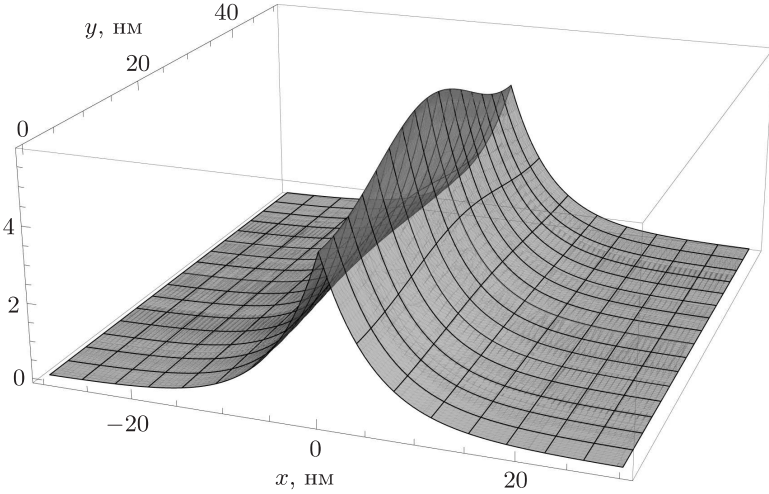


Рис. 2. Амплитуда  $|\Psi|^2$  волновой функции для АЛС с околонулевой энергией. Здесь  $M - \Delta = 0.1$  мэВ,  $m = 0,1$  мэВ.

Из двух аналогичных волновых функций выпишем функцию, соответствующую (40). Из (35) имеем

$$\psi_{e\uparrow}^{(0)}(0) = \psi_{h\downarrow}^{(0)}(0) = 0, \quad \psi_{e\downarrow}^{(0)}(0) = -\psi_{h\uparrow}^{(0)}(0) = -\frac{m}{2} \operatorname{sgn}(M - \Delta). \quad (42)$$

Используя (10), (13) и (П.7), выпишем волновую функцию:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & \frac{1}{\sqrt{W}} \left( \frac{m}{2} e^{-|M-\Delta||x|} (i \operatorname{sgn}(x), -\operatorname{sgn}(M - \Delta), \operatorname{sgn}(M - \Delta), -i \operatorname{sgn}(x)) - \right. \\ & \left. - \frac{m^2 \operatorname{sgn}(M - \Delta)}{4\sqrt{(2\pi/W)^2 + (M - \Delta)^2}} e^{-\sqrt{(2\pi/W)^2 + (M - \Delta)^2}|x|} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{j=1,2} (c_1, -(M - \Delta), M - \Delta, -c_1) e^{(-1)^{j+1} 2\pi i y / W} \right)^T, \quad (43) \end{aligned}$$

где  $c_1 = i\sqrt{(2\pi/W)^2 + (M - \Delta)^2} \operatorname{sgn}(x) + (-1)^j 2\pi i / W$  (см. рис. 2). Очевидно, что она не удовлетворяет условиям (29). Эта функция сильно локализована по  $x$ , в отличие от функции на рис. 1. Второе слагаемое в правой части (43) сглаживает колебания  $|\Psi|^2$  вдоль оси  $y$ .

Итак, локальное по  $x$  возмущение постоянного поля Зеемана может порождать АЛС с близкой к нулю энергией кратности 2, которые, в отличие от одномерного случая [9], не являются майораноподобными (ср. [10]).

## 5. НЕМАГНИТНЫЙ ПРИМЕСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим теперь примесный потенциал  $\mathcal{W}(x, y)$  вида

$$\mathcal{W}(x, y) = w \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (e^{-2\pi iy/W} + e^{2\pi iy/W}) \delta(x). \quad (44)$$

Пусть сначала  $E = M - \Delta + \varepsilon$ ,  $M - \Delta > 0$ , где  $0 < \varepsilon \ll M - \Delta$ . Рассуждая, как и раньше, получаем уравнение (13) с заменой спинора в правой части на

$$\begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) \\ \psi_{e\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\downarrow}^{(-1)}(0) \\ -(\psi_{h\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{h\uparrow}^{(-1)}(0)) \\ -(\psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0)) \end{pmatrix}.$$

Вместо (16), (17) имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(0)}(0) \\ \psi_{h\downarrow}^{(0)}(0) \end{pmatrix} &= \frac{(M - \Delta)w}{2ia_0} (\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) + \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \psi_{e\downarrow}^{(0)}(0) &= \psi_{h\uparrow}^{(0)}(0) = 0, \\ (\psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0), \psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0), \psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(0), \psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(0))^T &= \\ &= -\frac{(M - \Delta)w^2}{2a_0a_1} \left( M - \Delta, \mp \frac{\pi i}{W}, \pm \frac{\pi i}{W}, -(M - \Delta) \right)^T \times \\ &\quad \times (\psi_{e\uparrow}^{(1)}(0) + \psi_{e\uparrow}^{(-1)}(0) + \psi_{h\downarrow}^{(1)}(0) + \psi_{h\downarrow}^{(-1)}(0)). \end{aligned} \quad (45)$$

Следовательно,  $\psi_{e\uparrow}^{(\pm 1)}(0) = -\psi_{h\downarrow}^{(\pm 1)}(0)$ ,  $\psi_{e\downarrow}^{(\pm 1)}(0) = -\psi_{h\uparrow}^{(\pm 1)}(0)$ , и система (45) не имеет ненулевых решений для энергий вблизи границ щели, так что состояний с такими энергиями нет. Аналогичным образом можно доказать, что немагнитная примесь не порождает локализованных состояний с энергией, близкой к нулю. (В одномерном случае [9] существование АЛС зависит от фазы.)

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается квазиодномерная сверхпроводящая структура на поверхности топологического изолятора в присутствии перпендикулярного постоянного поля Зеемана. Аналитически доказано, что локальное возмущение поля Зеемана порождает устойчивые локализованные состояния с энергиями вблизи границ энергетической щели, а также АЛС с энергиями, близкими к нулю. В отличие от одномерного случая, эти состояния не обладают симметрией “частица-дырка”. Немагнитная примесь не порождает АЛС.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы получить функцию Грина гамильтониана  $H^{(n)}$ , найдем функцию  $\Psi$  из уравнения  $(H^{(n)} - E)\Psi = \Phi$ . Перепишем это уравнение в виде

$$\begin{pmatrix} M - E & -i\partial_x + 2\pi in/W & 0 & \Delta \\ -i\partial_x - 2\pi in/W & -M - E & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & -M - E & -i\partial_x - 2\pi in/W \\ \Delta & 0 & -i\partial_x + 2\pi in/W & M - E \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \psi_{e\uparrow}^{(n)}(x) \\ \psi_{e\downarrow}^{(n)}(x) \\ \psi_{h\uparrow}^{(n)}(x) \\ \psi_{h\downarrow}^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{e\uparrow}^{(n)}(x) \\ \varphi_{e\downarrow}^{(n)}(x) \\ \varphi_{h\uparrow}^{(n)}(x) \\ \varphi_{h\downarrow}^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

или, после преобразования Фурье  $\tilde{\varphi}(p) = F\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \varphi(x) dx$ ,

$$\begin{pmatrix} M - E & p + 2\pi in/W & 0 & \Delta \\ p - 2\pi in/W & -M - E & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & -M - E & p - 2\pi in/W \\ \Delta & 0 & p + 2\pi in/W & M - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{e\uparrow}^{(n)}(p) \\ \tilde{\psi}_{e\downarrow}^{(n)}(p) \\ \tilde{\psi}_{h\uparrow}^{(n)}(p) \\ \tilde{\psi}_{h\downarrow}^{(n)}(p) \end{pmatrix} = \\ = (\tilde{\varphi}_{e\uparrow}^{(n)}(p), \tilde{\varphi}_{e\downarrow}^{(n)}(p), \tilde{\varphi}_{h\uparrow}^{(n)}(p), \tilde{\varphi}_{h\downarrow}^{(n)}(p))^T. \quad (\text{П.1})$$

Определитель матрицы (П.1) равен

$$d = \left( p^2 + \left( \frac{2\pi n}{W} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( p^2 + \left( \frac{2\pi n}{W} \right)^2 \right) (M^2 + \Delta^2 - E^2) + (M^2 - E^2)^2 - 2\Delta^2(M^2 + E^2) + \Delta^4. \quad (\text{П.2})$$

Из (П.2) находим закон дисперсии для  $n$ -й подзоны

$$E^2 = (M \pm \Delta)^2 + p^2 + \left( \frac{2\pi n}{W} \right)^2 \quad (\text{П.3})$$

и равенство

$$\frac{1}{d} = -\frac{1}{4M\Delta} \left( \frac{1}{p^2 + (2\pi n/W)^2 + (M + \Delta)^2 - E^2} - \frac{1}{p^2 + (2\pi n/W)^2 + (M - \Delta)^2 - E^2} \right). \quad (\text{П.4})$$

Используя формулы Крамера и пренебрегая величинами порядка малости  $(M - \Delta)^2$ , получаем функцию Грина гамильтониана  $H^{(n)}$  в импульсном представлении

$$\tilde{G}^{(n)}(p, p', E) = \frac{\delta(p - p')}{2} \left( \frac{1}{p^2 - a_n^2} - \frac{1}{p^2 - b_n^2} \right) \times \\ \times \begin{pmatrix} M - \Delta + E & p + 2\pi in/W & -(p + 2\pi in/W) & -(M - \Delta + E) \\ p - 2\pi in/W & -(M - \Delta - E) & M - \Delta - E & -(p - 2\pi in/W) \\ -(p - 2\pi in/W) & M - \Delta - E & -(M - \Delta - E) & p - 2\pi in/W \\ -(M - \Delta + E) & -(p + 2\pi in/W) & p + 2\pi in/W & M - \Delta + E \end{pmatrix}, \quad (\text{П.5})$$

где  $a_n^2 = E^2 - (2\pi n/W)^2 - (M - \Delta)^2$ ,  $b_n^2 = E^2 - (2\pi n/W)^2 - (M + \Delta)^2$ . Для перехода к координатному представлению будем использовать известные формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx} \tilde{\varphi}(p) dp}{p^2 - a^2} &= -\frac{1}{2ia} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia|x-x'|} \varphi(x') dx', \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{pe^{ipx} \tilde{\varphi}(p) dp}{p^2 - a^2} &= -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia|x-x'|} \operatorname{sgn}(x - x') \varphi(x') dx', \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

полагая  $a = a_n$  или  $a = b_n$ .

При нахождении функции Грина в координатном представлении с помощью формул (П.6), производится интегрирование равенства (П.5) по  $p$ . Вследствие условий на величины  $1/W$  и  $|M - \Delta|$  (см. раздел 2), при взятии интегралов по области, где  $p$  малы, знаменатель второго слагаемого в множителе перед матрицей в (П.5) много больше знаменателя первого слагаемого, а интегралы по области, где  $p$  достаточно велики, малы. Таким образом, вторым слагаемым в (П.5) можно пренебречь. Несмотря на то что оставшиеся интегралы берутся по всей числовой прямой, вследствие малости их знаменателей при малых  $p$  при заданных условиях для параметров эти интегралы формируются в основном малыми  $p$ , и условие малости импульсов  $p$  (см. предположения после (11)) соблюдено. Приведенные рассуждения легко подтвердить численными оценками.

Учитывая сказанное, из (П.5) с помощью (П.6) получаем функцию Грина гамильтониана  $H^{(n)}$  в координатном представлении:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x - x', E) &= -\frac{e^{ia_n|x-x'|}}{4ia_n} \times \\ &\times \begin{pmatrix} M - \Delta + E & b_n^+ & -b_n^+ & -(M - \Delta + E) \\ b_n^- & -(M - \Delta - E) & M - \Delta - E & -b_n^- \\ -b_n^- & M - \Delta - E & -(M - \Delta - E) & b_n^- \\ -(M - \Delta + E) & -b_n^+ & b_n^+ & M - \Delta + E \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

где  $b_n^\pm = a_n \operatorname{sgn}(x - x') \pm 2\pi in/W$ .

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] J. Alicea, “New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems”, *Rep. Prog. Phys.*, **75**:7 (2012), 076501, 36 pp.
- [2] F. von Oppen, Y. Peng, F. Pientka, “Topological superconducting phases in one dimension”, *Topological Aspects of Condensed Matter Physics: Lecture Notes of the Les Houches Summer School* (École de Physique des Houches, Session CIII, 4–29 August, 2014), eds. C. Chamon, M. O. Goerbig, R. Moessner, L. F. Cugliandolo, Oxford Univ. Press, Oxford, 2017, 389–449.
- [3] M. Sato, S. Fujimoto, “Majorana fermions and topology in superconductors”, *J. Phys. Soc. Japan*, **85**:7 (2016), 072001, 32 pp.
- [4] C.-X. Liu, J. D. Sau, T. D. Stanescu, S. Das Sarma, “Andreev bound states versus Majorana bound states in quantum dot-nanowire-superconductor hybrid structures: Trivial versus topological zero-bias conductance peaks”, *Phys. Rev. B*, **96**:7 (2017), 075161, 29 pp.
- [5] T. D. Stanescu, S. Tewari, “Robust low-energy Andreev bound states in semiconductor-superconductor structures: Importance of partial separation of component Majorana bound states”, *Phys. Rev. B*, **100**:5 (2019), 155429, 21 pp., arXiv:1811.02557.

- [6] C. Moore, C. Zeng, T. D. Stanescu, S. Tewari, “Quantized zero bias conductance plateau in semiconductor-superconductor heterostructures without non-Abelian Majorana zero modes”, *Phys. Rev. B*, **98** (2018), 155314, 6 pp., arXiv: 1804.03164.
- [7] J. Cayao, A. M. Black-Schaffer, “Distinguishing trivial and topological zero-energy states in long nanowire junctions”, *Phys. Rev. B*, **104**:2 (2021), L020501, 6 pp.
- [8] B. D. Woods, S. Das Sarma, T. D. Stanescu, “Subband occupation in semiconductor-superconductor nanowires”, *Phys. Rev. B*, **101**:4 (2020), 045405, 13 pp., arXiv: 1910.04362.
- [9] Yu. P. Chuburin, T. S. Tinyukova, “The emergence of bound states in a superconducting gap at the topological insulator edge”, *Phys. Lett. A*, **384**:27 (2020), 126694, 7 pp.
- [10] B. D. Woods, J. Chen, S. M. Frolov, T. D. Stanescu, “Zero-energy pinning of topologically trivial bound states in multiband semiconductor-superconductor nanowires”, *Phys. Rev. B*, **100**:12 (2019), 125407, 17 pp., arXiv: 1902.02772.
- [11] Z. Hou, J. Klinovaja, *Zero-energy Andreev bound states in iron-based superconductor Fe(Te,Se)*, arXiv: 2109.08200.
- [12] Ю. П. Чубурин, Т. С. Тинюкова, “Взаимодействие между подзонами в квазиодномерном сверхпроводнике”, *ТМФ*, **210**:3 (2022), 455–469.
- [13] T. D. Stanescu, J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. Das Sarma, “Proximity effect at the superconductor-topological insulator interface”, *Phys. Rev. B*, **81**:24 (2010), 241310, 4 pp., arXiv: 1002.0842.
- [14] J. Linder, Yu. Tanaka, T. Yokoyama, A. Sudbo, N. Nagaosa, “Interplay between superconductivity and ferromagnetism on a topological insulator”, *Phys. Rev. B*, **81**:18 (2010), 184525, 11 pp.
- [15] C. T. Olund, E. Zhao, “Current-phase relation for Josephson effect through helical metal”, *Phys. Rev. B*, **86**:21 (2012), 214515, 7 pp.
- [16] F. Crepin, B. Trauzettel, F. Dolcini, “Signatures of Majorana bound states in transport properties of hybrid structures based on helical liquids”, *Phys. Rev. B*, **89**:20 (2014), 205115, 12 pp.
- [17] A. C. Potter, P. A. Lee, “Multichannel generalization of Kitaev’s Majorana end states and a practical route to realize them in thin films”, *Phys. Rev. Lett.*, **105**:22 (2010), 227003, 4 pp., arXiv: 1007.4569.
- [18] Дж. Тейлор, *Теория рассеяния: квантовая теория нерелятивистских столкновений*, Мир, М., 1985.
- [19] P. Szumniak, D. Chevallier, D. Loss, J. Klinovaja, “Spin and charge signatures of topological superconductivity in Rashba nanowires”, *Phys. Rev. B*, **96**:4 (2017), 041401, 5 pp.
- [20] M. Serina, D. Loss, J. Klinovaja, “Boundary spin polarization as a robust signature of a topological phase transition in Majorana nanowires”, *Phys. Rev. B*, **98**:3 (2018), 035419, 10 pp.
- [21] Ю. П. Чубурин, Т. С. Тинюкова, “Поведение андреевских состояний при топологическом фазовом переходе”, *ТМФ*, **208**:1 (2021), 145–162.

Поступила в редакцию 11.04.2022,  
 после доработки 25.05.2022,  
 принята к публикации 27.05.2022