T. A. Suslina, R. G. Shterenberg, Absolute continuity of the spectrum of the magnetic Schrödinger operator with a metric in a two-dimensional periodic waveguide,
Algebra i Analiz, 2002, Volume 14, Issue 2, 159–206

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 2

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СПЕКТРА МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С МЕТРИКОЙ В ДВУМЕРНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

© Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг

Рассматривается магнитный оператор Шрёдингера с переменной метрикой в двумерном периодическом волноводе. Все коэффициенты предполагаются периодическими вдоль волновода. Изучаются краевые задачи с условиями Дирихле, Неймана или условием третьего типа. При широких условиях на данные задачи устанавливается абсолютная непрерывность спектра.

§0. Введение

0.1. Проблема абсолютной непрерывности спектра периодических операторов математической физики продолжает привлекать внимание специалистов по спектральной теории операторов. Пусть

$$H(g, \mathbf{A}, V) = (\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x})) + V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{0.1}$$

— оператор Шрёдингера в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь $\mathbf{D} = -i\nabla$, $V(\mathbf{x})$ — скалярный (электрический) потенциал, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ — векторный (магнитный) потенциал, $g(\mathbf{x}) = \{g^{jl}(\mathbf{x})\}$ — положительная матрица (метрика). Все коэффициенты предполагаются вещественными и периодическими относительно решетки Γ в $\mathbb{R}^d$.

Первый результат об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора $H(V) = -\Delta + V(\mathbf{x})$ был установлен в оригинальной работе Л. Томаса [T] в 1973 г. Томасом был предложен метод, который использовался практически во всех дальнейших исследованиях. Подробное изложение метода Томаса приведено в книгах [RSi, Ku], а также в статье [BSu3]. Для магнитного гамильтониана $H(\mathbf{A}, V) = (\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + V(\mathbf{x})$ абсолютная непрерывность спектра в двумерном случае была доказана в работах [BSu1,2]; в [BSu2] предполагалось, что $\mathbf{A} \in L_{r,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $r > 2$, $V \in L_{\rho,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $\rho > 1$. При

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, периодический оператор, магнитный и электрический потенциалы, переменная метрика, волновод, абсолютно непрерывный спектр.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 99-01-00681.

$d \geqslant 3$ задача оказалась значительно сложнее. Она была решена А. В. Соболевым [So] при достаточно гладком магнитном потенциале. В дальнейшем при $d \geqslant 2$ условия на $\mathbf{A}$ и V ослаблялись в различных направлениях рядом авторов (см. обзоры [BSu3, Su] и приведенную в них библиографию).

Наибольшие трудности представляет оператор (0.1) с переменной метрикой. Исключение представляет случай „скалярной“ метрики $g(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})a$, где $\omega(\mathbf{x})$ — вещественная положительная функция, а a — постоянная положительная матрица. В [BSu3] показано, что результат об абсолютной непрерывности спектра легко переносится на этот случай для произвольной размерности $d \geqslant 2$ при некоторых условиях гладкости на функцию ω. В случае метрики общего вида вопрос об абсолютной непрерывности спектра исследован с достаточной полнотой лишь в двумерном случае. Абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1) при $d = 2$, $g \in C^\infty$, $\det g = 1$, $\mathbf{A} \in C^\infty$, $V \in L_\infty$ установлена А. Морамом [Mo]. Доказательство из [Mo] достаточно сложно. Впоследствии в [KuL] был предложен более простой путь доказательства, использующий существование глобальных изотермических координат, сохраняющих периодичность. Это позволяет свести оператор (0.1) с метрикой общего вида к аналогичному оператору со скалярной метрикой. Такой метод позволяет значительно ослабить условия на коэффициенты. При $d \geqslant 3$ абсолютная непрерывность спектра (гладкого) оператора (0.1) недавно установлена в новаторской работе Л. Фридлендера [Fr] при $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ и условии инвариантности оператора относительно отражения $x_1 \mapsto -x_1$. Отметим также недавний отрицательный результат Н. Д. Филонова [F]: при $d \geqslant 3$ построен пример периодического оператора (0.1) с метрикой $g \in \cap_{\alpha<1} C^\alpha$ и $\mathbf{A} = 0$, $V = 0$, имеющего собственное значение бесконечной кратности. В общем случае (без условия инвариантности относительно отражения) при $d \geqslant 3$ вопрос об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора (0.1) с переменной метрикой остается открытым даже для гладких коэффициентов.

Оператор (0.1) с сингулярным электрическим потенциалом при $d = 2$ изучался в [BSuSh, Sh1–3], а при $d \geqslant 3$ — в [SuSh]. В [BSuSh] и [SuSh] рассматривались потенциалы вида $V(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})\delta_\Sigma(\mathbf{x})$, где $V(\mathbf{x})$ — „регулярная“ часть потенциала, Σ — периодическая система кусочно-гладких гиперповерхностей, $\delta_\Sigma(\mathbf{x})$ — дельта-функция, сосредоточенная на Σ, а $\sigma(\mathbf{x})$ — периодическая функция на Σ. В [Sh1–3] при $d = 2$ изучались более широкие классы обобщенных потенциалов, заданных через меры. Во всех этих случаях спектр оператора абсолютно непрерывен.

Подробный обзор большей части результатов об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов можно найти в [BSu3, Su].

0.2. Большинство исследований посвящено периодическим задачам во всем пространстве $\mathbb{R}^d$. Абсолютная непрерывность спектра оператора Шрёдингера в *периодических волноводах* пока изучалась только в двумерном случае. В работе А. В. Соболева и Дж. Валтхо [SoW] установлена абсолютная непрерывность спектра в задачах Дирихле и Неймана для оператора (0.1) в двумерном периодическом волноводе $\Pi \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2$, и $S := \mathbb{R} \times (0,1)$. Предполагается, что область Π периодична: $\mathbf{x} \in \Pi \;\Rightarrow\; \mathbf{x} + \mathbf{e}_1 \in \Pi$, и существует диффеоморфизм $\Phi : \Pi \to S$ класса W^3_∞, обладающий свойством

$$\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) = \Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x} \in \Pi. \tag{0.2}$$

Все коэффициенты предполагаются *периодическими вдоль оси волновода*, причем $g \in W^2_\infty$, $\mathbf{A} \in W^2_\infty$, $V \in L_\infty$. Для задачи Неймана накладывается некоторое дополнительное условие на поведение метрики g на границе волновода. Сначала задача в волноводе редуцируется к аналогичной задаче в полосе S. Затем используется „периодизация“: изучение операторов с условиями Дирихле и Неймана в полосе S сводится к изучению оператора с периодическими граничными условиями в „удвоенной“ полосе $\mathbb{R} \times (-1, 1)$. Абсолютная непрерывность спектра оператора с периодическими граничными условиями устанавливается на основе техники работы [Mo].

0.3. В настоящей работе результат об абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1) в двумерном периодическом волноводе получен при очень широких условиях на данные задачи. Предполагается, что существует отображение $\Phi : \Pi \to S$, причем $\Phi, \Phi^{-1} \in \operatorname{Lip} 1$ и выполнено (0.2). Тем самым допускаются периодические области Π с липшицевой границей. Рассматривается оператор в $L_2(\Pi)$, формально заданный выражением

$$(\phi(\mathbf{x}))^{-1}\left((\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x})) + \mathcal{V}(\mathbf{x})\right)(\phi(\mathbf{x}))^{-1}, \tag{0.3}$$

с коэффициентами, периодическими вдоль волновода. Условия на коэффициенты аналогичны условиям, которые накладывались в работе [Sh3] для периодического оператора в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Как и в [BSuSh, Sh1–3], мы записываем матрицу $g(\mathbf{x})$ в виде $g(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x}) g_0(\mathbf{x})$, где $\det g_0(\mathbf{x}) = 1$, и разделяем условия на ω и g_0. Матрица g_0 предполагается ограниченной и отделенной от нуля; никаких условий гладкости не требуется. На функцию ω помимо требования ограниченности и положительной определенности накладываются минимальные условия гладкости (см. ниже условия (1.9), (1.10)). На магнитный потенциал $\mathbf{A}$ накладывается условие (см. ниже (1.18)), которое, в частности, выполнено, если

$$\int_{\mathcal{O}} |\mathbf{A}|^2 \ln^\rho(1 + |\mathbf{A}|)\, d\mathbf{x} < \infty, \quad \rho > 1; \tag{0.4}$$

здесь $\mathcal{O}$ — ячейка в Π. (Впервые абсолютная непрерывность магнитного периодического оператора Шрёдингера в $L_2(\mathbb{R}^2)$ при условии (1.18) была установлена в работе И. С. Лапина [La].) Электрический потенциал $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ представляет собой обобщенную функцию и задается через вещественный борелевский заряд $d\nu$ в $\overline{\Pi}$. Формально $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = d\nu/d\mathbf{x}$. Как и в [Sh2,3], мы разделяем условия на положительную и отрицательную части заряда (см. ниже условия (i)–(iii) в п. 1.7). Удобно включить в оператор (0.3) весовую функцию $\phi(\mathbf{x})$, относительно которой делаются минимальные предположения (см. условия (1.14), (1.15)). Даже если в исходном операторе считать $\phi = 1$, нетривиальная весовая функция появляется в ходе доказательства при редукциях. Рассматриваются краевые задачи для оператора (0.3) в волноводе П при условиях Дирихле или Неймана на каждой из двух компонент границы — задачи, условно обозначаемые DD, DN, ND, NN. Оператор задается через квадратичную форму. *Если заряд $d\nu$ сосредоточен на границе области* П, *то условие* N *переходит в краевое условие третьего типа.*

Основной результат работы — теорема 1.5 об абсолютной непрерывности спектра четырех операторов, отвечающих задачам DD, DN, ND, NN в волноводе П. Доказательство состоит из серии редукций. Первые две редукции — формально те же, что и в работе [SoW], но проводятся при меньших ограничениях. Сначала операторы в волноводе П сводятся к аналогичным операторам в полосе S. Затем проводится периодизация: задачи типа DD, DN, ND, NN в полосе S сводятся к задаче с периодическими краевыми условиями в „учетверенной" полосе $\widehat{S} := \mathbb{R} \times (-2, 2)$. Далее, *используя глобальные изотермические координаты в* $\mathbb{R}^2$, мы сводим периодическую задачу для оператора с метрикой общего вида в полосе $\widehat{S}$ к периодической задаче для оператора *со скалярной метрикой* в некоторой новой полосе S°. Результат об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора со скалярной метрикой в полосе S° получается по схеме Томаса на основании оценок, установленных в работе [Sh3]. При всех редукциях мы вынуждены скрупулезно прослеживать, что коэффициенты новых задач удовлетворяют условиям того же типа, что и в исходной задаче.

0.4. Одновременно с настоящей работой близкие результаты получены Е. Шаргородским и А. В. Соболевым [ShaSo]. Сопоставим результаты и методы [ShaSo] и настоящей статьи. В [ShaSo] рассматриваются периодические волноводы $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ при несколько иных условиях на границу: предполагается, что граница кусочно-гладкая класса $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$ (что более ограничительно, чем наше условие липшицевости), но зато допускаются локальные особенности типа входящих пиков (чего не допускают наши условия). В [ShaSo] на коэффициенты оператора накладываются более ограничительные условия, чем в данной работе. Именно предполагается, что g_0 — положительно определенная матрица класса C^α, $\alpha > 0$; $\omega \in W^1_{q,\,\mathrm{loc}}(\Pi)$ и $g_0\nabla\omega \in W^1_{q,\,\mathrm{loc}}(\Pi)$ при $q > 1$. На магнитный потенциал $\mathbf{A}$ и на регулярную часть V электрического потенциала накладываются следующие условия: $\mathbf{A} \in L_r(\mathcal{O})$, $r > 2$, $V \in L_\rho(\mathcal{O})$, $\rho > 1$. (Такие же условия накладывались в статьях [BSu2, BSuSh] для оператора в $L_2(\mathbb{R}^2)$.) Сингулярная часть электрического потенциала $\mathcal{V}$ имеет вид $\sigma(\mathbf{x})\delta_\Sigma(\mathbf{x})$, где Σ — система кусочно-гладких кривых класса C^1 в $\overline{\Pi}$. Относительно функции σ предполагается, что $\sigma \in L_{p,\,\mathrm{loc}}(\Sigma)$, $p > 1$. (То же условие использовалось ранее в [BSuSh] для оператора в $L_2(\mathbb{R}^2)$). Предполагается, что $\phi \in L_r(\mathcal{O})$, $r > 2$.

Доказательство в [ShaSo] основано на квазиконформном отображении, позволяющем одновременно преобразовать волновод в прямую полосу и превратить метрику g_0 в единичную матрицу. Именно на этом этапе существенны кусочная гладкость границы (класса $C^{1+\alpha}$) и гладкость матрицы g_0 (класса C^α). Затем используется периодизация, сводящая вопрос к исследованию периодического оператора с единичной метрикой в прямой полосе. Результат об абсолютной непрерывности спектра последнего оператора получается по схеме Томаса на основании оценок из статьи [BSuSh].

Основное отличие техники работы [ShaSo] и настоящей работы в том, что мы не используем теорем о конформных отображениях области П на полосу (требующих определенной гладкости границы и метрики), а сводим дело к использованию квазиконформного отображения (изотермических координат) во всей плоскости (что требует лишь ограниченности и положительной определенности матрицы g_0).

0.5. В §1 приведена постановка задачи и сформулированы основные результаты. В §2 проводится первая редукция — сведение к задаче в полосе. §3 посвящен „периодизации" — сведению к периодическому оператору в полосе. В §4 с помощью изотермических координат проводится сведение к периодическому оператору со скалярной метрикой в полосе. Наконец, в §5 доказана теорема об абсолютной непрерывности спектра последнего оператора, из которой вытекает и основная теорема 1.5.

0.6. Работа над [ShaSo] и настоящей статьей проходила параллельно. В процессе работы авторы и А. В. Соболев неоднократно обсуждали и сопоставляли свои подходы и результаты, что, как мы надеемся, пошло на пользу обоим текстам. Авторы очень признательны А. В. Соболеву за плодотворное сотрудничество. Особо отметим, что А. В. Соболев указал нам статью [ABe]. Знакомство с результатами этой статьи позволило ослабить условия на метрику g_0 и предполагать лишь ограниченность и положительную определенность. Авторы глубоко благодарны М. Ш. Бирману за многочисленные обсуждения и постоянное внимание к работе.

§1. Определение операторов. Основные результаты

1.1. Обозначения. Через e_1, e_2 обозначим стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2$. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla = \nabla_{\mathbf{x}} = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$, $\mathbf{D} = (D_1, D_2) = -i\nabla$. Далее, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $|\cdot|$ — стандартные скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^2$. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая область, $\overline{\mathcal{D}} = \operatorname{clos}\mathcal{D}$. Классы Соболева порядка $s \in \mathbb{N}$ с показателем суммируемости p обозначаются через $W_p^s(\mathcal{D})$; при $p = 2$ — через $H^s(\mathcal{D})$. Положим $B_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < R\}$,

$R > 0$. Через $C_0(\overline{\mathcal{D}})$ обозначается класс непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}$ функций $u(\mathbf{x})$ таких, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{\mathcal{D}} \cap B_R$ при каком-либо $R < \infty$. Через $\operatorname{Lip}(\overline{\mathcal{D}})$ обозначается класс функций f, удовлетворяющих условию $|f(\mathbf{x}) - f(\widetilde{\mathbf{x}})| \leqslant c|\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}}|$, $\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}} \in \overline{\mathcal{D}}$, $c = c(f)$.

Пусть $\alpha > 0$ и $\gamma_\alpha := \{n\alpha\mathbf{e}_1,\ n \in \mathbb{Z}\}$ — одномерная решетка. Введем обозначения $S_{a,b} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 :\ a < x_2 < b\}$, $\Omega_{a,b} = (0,1) \times (a,b)$. Граница полосы $S_{a,b}$ состоит из двух прямых $\Xi_a := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 = a\}$, $\Xi_b := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 = b\}$. Через $\widetilde{H}^s(\Omega_{a,b})$ обозначим класс функций $u \in H^s(\Omega_{a,b})$, γ_1-периодическое продолжение которых на $S_{a,b}$ принадлежит $H^s(S_{a,b} \cap B_R)$ для любого $R < \infty$. Через $\widetilde{C}(\overline{\Omega_{a,b}})$ обозначается множество сужений на $\overline{\Omega_{a,b}}$ γ_1-периодических непрерывных в $\overline{S_{a,b}}$ функций.

Положим $S := S_{0,1}$, $\Omega := \Omega_{0,1}$. Через c, C (с индексами или без них) обозначаются различные оценочные постоянные. Символ $\mathbf{1}$ означает единичную (2×2)-матрицу. Для матрицы h символ h^t означает транспонированную матрицу. Для вещественной функции $f(\mathbf{x})$ используем обозначения $2f_\pm(\mathbf{x}) := |f(\mathbf{x})| \pm f(\mathbf{x})$.

1.2. Условие на область. Предположим, что „периодический волновод" $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 1.1. 1°. *Область* $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ *периодична относительно решетки* γ_α, $\alpha > 0$:

$$\mathbf{x} \in \Pi \implies \mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1 \in \Pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2°. *Существует гомеоморфизм* $\Phi : \overline{\Pi} \to \overline{S}$ *со следующими свойствами*:

$$\Phi \in \operatorname{Lip}(\overline{\Pi}), \quad \Phi^{-1} \in \operatorname{Lip}(\overline{S}); \tag{1.1}$$

$$\Phi(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = \Phi(\mathbf{x}) + n\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x} \in \Pi,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

При этом $\Pi = \Phi^{-1}(S)$.

Будем говорить, что кривая $l \subset \mathbb{R}^2$ допускает *билипшицеву параметризацию*, если l есть образ отображения $\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ такого, что

$$c|t_1 - t_2| \leqslant |\mathcal{F}(t_1) - \mathcal{F}(t_2)| \leqslant C|t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 < c \leqslant C < \infty.$$

Отметим, что наличие билипшицевой параметризации *не гарантирует* того, что локально кривая представима как график липшицевой функции в подходящих декартовых координатах.

Из условия 1.1, очевидно, вытекает, что Π — односвязная γ_α-периодическая область, причем $\partial\Pi = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, где $\Sigma_0 := \Phi^{-1}(\Xi_0)$, $\Sigma_1 := \Phi^{-1}(\Xi_1)$. Кривые Σ_0 и Σ_1 отделены друг от друга и допускают билипшицеву параметризацию. Как выяснено в [ShaSo, теорема 6.3], справедливо следующее обратное утверждение.

Предложение 1.2. *Пусть* $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ *— односвязная* γ_α*-периодическая область. Пусть* $\partial\Pi = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, *где* Σ_0 *и* Σ_1 *— непересекающиеся кривые, допускающие билипшицеву параметризацию. Тогда существует отображение* $\Phi : \overline{\Pi} \to \overline{S}$, *удовлетворяющее* (1.1) *и* (1.2), *причем* $\Pi = \Phi^{-1}(S)$.

Через $\Phi'(\mathrm{x})$ обозначим матрицу Якоби отображения Φ в точке $\mathrm{x} \in \Pi$. Из (1.1) следует, что

$$|\det \Phi'| + |\det \Phi'|^{-1} \in L_\infty(\Pi). \tag{1.3}$$

Положим $\mathcal{O} := \Phi^{-1}(\Omega)$. Очевидно, $\mathcal{O}$ — фундаментальная область в Π относительно решетки γ_α.

Условие 1.1 заведомо выполнено, если область Π подчинена следующему условию.

Условие 1.1$'$. 1°. *Область* $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ *односвязна и периодична относительно решетки* γ_α, $\alpha > 0$. 2°. $\partial\Pi = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, *где* Σ_0 *и* Σ_1 *— непересекающиеся липшицевы кривые, т.е. каждая точка* $\mathrm{x} \in \Sigma_j$ *обладает (двумерной) окрестностью* $U \subset \mathbb{R}^2$ *такой, что* $\Sigma_j \cap U$ *есть график липшицевой функции в подходящих декартовых координатах*, $j = 0, 1$.

Действительно, легко убедиться, что при условии 1.1$'$ кривые Σ_0 и Σ_1 допускают билипшицеву параметризацию. Тогда в силу предложения 1.2 выполнено условие 1.1.

1.3. Классы функций. В силу (1.1) преобразование $u \mapsto u \circ \Phi^{-1}$ отображает $H^1(\Pi)$ *на* $H^1(S)$, $H^1(\mathcal{O})$ *на* $H^1(\Omega)$. Положим

$$\widetilde{H}^1(\mathcal{O}) := \{u \in H^1(\mathcal{O}) : u \circ \Phi^{-1} \in \widetilde{H}^1(\Omega)\},$$
$$\widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}}) := \{u \in C(\overline{\mathcal{O}}) : u \circ \Phi^{-1} \in \widetilde{C}(\overline{\Omega})\}.$$

Ясно, что $\widetilde{H}^1(\mathcal{O})$ совпадает с классом функций из $H^1(\mathcal{O})$, γ_α-периодическое продолжение которых на Π принадлежит $H^1(\Pi \cap B_R)$ при любом $R < \infty$. Аналогично $\widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}})$ — класс сужений на $\overline{\mathcal{O}}$ γ_α-периодических непрерывных в $\overline{\Pi}$ функций.

Мы изучаем оператор Шрёдингера в волноводе Π с краевыми условиями Дирихле либо Неймана на кривых Σ_0, Σ_1. Соответственно рассматриваются краевые задачи четырех типов, условно обозначаемых через DD, DN, ND, NN. Введем следующие обозначения, где значки λ и μ принимают значения D либо N:

$$C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{\Pi}) := \begin{cases} \{u \in C_0(\overline{\Pi}) : u|_{\Sigma_0} = u|_{\Sigma_1} = 0\}, & \lambda = \mu = D, \\ \{u \in C_0(\overline{\Pi}) : u|_{\Sigma_0} = 0\}, & \lambda = D,\ \mu = N, \\ \{u \in C_0(\overline{\Pi}) : u|_{\Sigma_1} = 0\}, & \lambda = N,\ \mu = D, \\ C_0(\overline{\Pi}), & \lambda = \mu = N. \end{cases}$$

Аналогичный смысл имеют обозначения $C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{S_{a,b}})$. Положим $\Sigma_0^{(\mathcal{O})} := \partial\mathcal{O} \cap \Sigma_0$, $\Sigma_1^{(\mathcal{O})} := \partial\mathcal{O} \cap \Sigma_1$ и введем классы

$$\widetilde{C}^{(\lambda\mu)}(\overline{\mathcal{O}}) := \begin{cases} \{u \in \widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}}) : u|_{\Sigma_0^{(\mathcal{O})}} = u|_{\Sigma_1^{(\mathcal{O})}} = 0\}, & \lambda = \mu = D, \\ \{u \in \widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}}) : u|_{\Sigma_0^{(\mathcal{O})}} = 0\}, & \lambda = D,\ \mu = N, \\ \{u \in \widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}}) : u|_{\Sigma_1^{(\mathcal{O})}} = 0\}, & \lambda = N,\ \mu = D, \\ \widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}}), & \lambda = \mu = N. \end{cases}$$

Аналогично вводятся классы $\widetilde{C}^{(\lambda\mu)}(\overline{\Omega_{a,b}})$.

1.4. Условия на метрику. Пусть $g(\mathbf{x}) = \{g_{jl}(\mathbf{x})\}$ — измеримая вещественная (2×2)-матрица-функция в Π такая, что

$$g(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.4}$$

$$c_0\mathbf{1} \leqslant g(\mathbf{x}) \leqslant c_1\mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \in \Pi,\ 0 < c_0 \leqslant c_1 < \infty. \tag{1.5}$$

Представим матрицу $g(\mathbf{x})$ в виде

$$g(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})g_0(\mathbf{x}), \quad \det g_0(\mathbf{x}) = 1,\ \omega(\mathbf{x}) := (\det g(\mathbf{x}))^{1/4}. \tag{1.6}$$

В силу (1.4)–(1.6) матрица g_0 и функция ω ограничены и отделены от нуля:

$$c_0'\mathbf{1} \leqslant g_0(\mathbf{x}) \leqslant c_1'\mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \in \Pi,\ 0 < c_0' \leqslant c_1' < \infty, \tag{1.7}$$

$$0 < \omega_0 \leqslant \omega(\mathbf{x}) \leqslant \omega_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \Pi, \tag{1.8}$$

а также γ_α-периодичны. Относительно ω дополнительно предполагается, что

$$\omega \in \widetilde{H}^1(\mathcal{O}) \tag{1.9}$$

и что для любого $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнена оценка

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla\omega|^2|u|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\omega)\int_{\mathcal{O}} |u|^2\,d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,\ u \in \widetilde{H}^1(\mathcal{O}). \tag{1.10}$$

Можно указать „явные“ достаточные условия на ω, обеспечивающие оценку (1.10).

Предложение 1.3. *Пусть $\mathcal{D} = \Omega_{a,b}$ либо $\mathcal{D} = \mathcal{O}$. Пусть F — измеримая функция в $\mathcal{D}$ такая, что*

$$\int_{\mathcal{D}} |F(\mathbf{x})|\ln(1 + |F(\mathbf{x})|)\,d\mathbf{x} < \infty. \tag{1.11}$$

Тогда для любого $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\int_{\mathcal{D}} |F(\mathbf{x})||u|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon)\int_{\mathcal{D}} |u|^2\,d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \ u \in H^1(\mathcal{D}). \tag{1.12}$$

Доказательство. Утверждение в случае $\mathcal{D} = \Omega_{a,b}$ вытекает из [S, лемма 2.1], а в случае $\mathcal{D} = \mathcal{O}$ получается пересчетом. Действительно, если функция F в области $\mathcal{O}$ удовлетворяет условию (1.11), то $\widetilde{F} = F \circ \Phi^{-1}$ удовлетворяет такому же условию в области Ω. Тогда выполнена оценка

$$\int_{\Omega} |\widetilde{F}(\mathbf{z})||\widetilde{u}|^2\,d\mathbf{z} \leqslant \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla\widetilde{u}|^2\,d\mathbf{z} + C(\varepsilon)\int_{\Omega} |\widetilde{u}|^2\,d\mathbf{z}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \ \widetilde{u} \in H^1(\Omega).$$

Выполняя здесь подстановки $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, $u = \widetilde{u} \circ \Phi$ и используя (1.1), приходим к соотношению (1.12). •

Таким образом, оценка (1.10) заведомо выполнена, если

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla\omega|^2 \ln(1 + |\nabla\omega|)\,d\mathbf{x} < \infty.$$

1.5. Условия на весовую функцию. Пусть $\phi(\mathbf{x})$ — вещественная измеримая функция в Π, причем

$$\phi(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.13}$$

$$\phi(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{п. в. } \mathbf{x} \in \Pi. \tag{1.14}$$

Кроме того, предполагается, что при любом $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнена оценка

$$\int_{\mathcal{O}} \phi^2|u|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\phi)\int_{\mathcal{O}} |u|^2\,d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad u \in \widetilde{H}^1(\mathcal{O}). \tag{1.15}$$

Условие (1.15) равносильно компактности вложения $\widetilde{H}^1(\mathcal{O})$ в весовое пространство $L_2(\mathcal{O};\phi^2)$. В силу предложения 1.3 условие (1.15) заведомо выполнено, если

$$\int_{\mathcal{O}} \phi^2 \ln(1 + |\phi|)\,d\mathbf{x} < \infty.$$

На основании леммы 1.5 статьи [Sh3], используя отображение Φ, легко убедиться, что (1.15) равносильно такому же условию на классе $H^1(\mathcal{O})$:

$$\int_{\mathcal{O}} \phi^2|u|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\phi)\int_{\mathcal{O}} |u|^2\,d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad u \in H^1(\mathcal{O}). \tag{1.16}$$

1.6. Условия на магнитный потенциал. Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + A_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$, где $A_1(\mathbf{x})$, $A_2(\mathbf{x})$ — вещественные измеримые функции в Π, причем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + n\alpha\mathbf{e}_1) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.17}$$

Предположим, что для каких-либо чисел $m \in \mathbb{N}$ и $\rho > 1$ выполнено неравенство

$$\int_{\mathcal{O}} |\mathbf{A}|^2 l_m^\rho(|\mathbf{A}|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\mathbf{A}|)\, d\mathbf{x} < \infty, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho > 1, \tag{1.18}$$

где

$$l_1(t) := 1 + \ln(1+t), \ l_j(t) := 1 + \ln l_{j-1}(t), \quad j = 2, \dots, m, \ t \geqslant 0. \tag{1.19}$$

1.7. Условия на заряд. Пусть $d\nu$ — вещественный борелевский заряд в $\overline{\Pi}$ локально-конечной вариации, т.е.

$$\int_{\mathcal{B}} |d\nu| < \infty \tag{1.20}$$

для любого ограниченного борелевского множества $\mathcal{B} \subset \overline{\Pi}$. Предположим также, что заряд $d\nu$ периодичен относительно решетки γ_α:

$$\int_{\mathcal{B}+n\alpha\mathbf{e}_1} d\nu = \int_{\mathcal{B}} d\nu, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.21}$$

Представим заряд $d\nu$ в виде $d\nu = d\nu_+ - d\nu_-$, где $2d\nu_\pm := |d\nu| \pm d\nu$. На заряд $d\nu$ накладываются следующие „неявные“ условия.

(i) *Форма*

$$m_+[u,u] := \int_{\Pi} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + \int_{\overline{\Pi}} |u|^2\, d\nu_+, \quad u \in H^1(\Pi) \cap C_0(\overline{\Pi}), \tag{1.22}$$

допускает замыкание в $L_2(\Pi)$. (Это означает, что для любой последовательности $\{u_j\}$, $u_j \in H^1(\Pi) \cap C_0(\overline{\Pi})$, сходящейся в $L_2(\Pi)$ к нулю и фундаментальной относительно формы m_+, выполнено $m_+[u_j, u_j] \to 0$ при $j \to \infty$.)

(ii) *При некотором* $\tau < 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\overline{\Pi}} |u|^2\, d\nu_- \leqslant \tau\Big(\int_{\Pi} \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\, d\mathbf{x} + \int_{\overline{\Pi}} |u|^2\, d\nu_+\Big) + C\int_{\Pi} |u|^2\, d\mathbf{x},$$
$$u \in H^1(\Pi) \cap C_0(\overline{\Pi}), \quad \tau < 1, \quad C = C(\tau, g, d\nu). \tag{1.23}$$

(iii) *При любом* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнена оценка*

$$\int_{\overline{\mathcal{O}}} |u|^2\, |d\nu| \leqslant \varepsilon\Big(\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + \max_{\mathbf{x}\in\overline{\mathcal{O}}} |u(\mathbf{x})|^2\Big) + C(\varepsilon; d\nu)\int_{\mathcal{O}} |u|^2\, d\mathbf{x},$$
$$0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad u \in \widetilde{H}^1(\mathcal{O}) \cap \widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}}). \tag{1.24}$$

1.8. Определение операторов. В гильбертовом пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m_{\lambda\mu}[v,v] := \int_{\Pi} \langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})\phi^{-1}v, (\mathbf{D}-\mathbf{A})\phi^{-1}v\rangle\, d\mathbf{x} + \int_{\overline{\Pi}} |\phi^{-1}v|^2\, d\nu, \tag{1.25}$$

$$\operatorname{Dom} m_{\lambda\mu} := \{v = \phi u : u \in H^1(\Pi) \cap C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{\Pi})\}, \quad \lambda = D, N, \ \mu = D, N. \tag{1.26}$$

Из условия 1.1 и условий (1.13), (1.14), (1.16) вытекает, что множество (1.26) плотно в $L_2(\Pi)$.

Предложение 1.4. *Пусть область* Π *удовлетворяет условию* 1.1. *Пусть* $g(\mathbf{x})$ — *измеримая вещественная* (2×2)*-матрица-функция в* Π, *удовлетворяющая условию* (1.5). *Пусть вещественная функция* $\phi(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (1.13)–(1.15), *а вектор-функция* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (1.17), (1.18). *Пусть вещественный борелевский заряд* $d\nu$ *в* $\overline{\Pi}$ *удовлетворяет условиям* (1.20), (1.21), *а также условиям* (i), (ii). *Тогда форма* $m_{\lambda\mu}$, *определенная соотношениями* (1.25), (1.26), *полуограничена снизу и допускает замыкание в* $L_2(\Pi)$.

Доказательство. Вложение $H^1(\mathcal{O}) \subset L_2(\mathcal{O})$ компактно (что проверяется с помощью отображения $u \mapsto u \circ \Phi^{-1}$ и компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$). Отсюда и из условий (1.14), (1.16), на основании леммы 1.2 из [Sh3], вытекает оценка

$$\int_{\mathcal{O}} |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\phi)\int_{\mathcal{O}} |\phi u|^2\, d\mathbf{x}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad u \in H^1(\mathcal{O}). \tag{1.27}$$

В силу предложения 1.3 условие (1.18) на $\mathbf{A}$ *заведомо* обеспечивает оценку

$$\int_{\mathcal{O}} |\mathbf{A}|^2|u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon \int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\mathbf{A})\int_{\mathcal{O}} |u|^2\, d\mathbf{x}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad u \in H^1(\mathcal{O}). \tag{1.28}$$

Используя периодичность ϕ и $\mathbf{A}$ (условия (1.13), (1.17)), запишем неравенства (1.27), (1.28) для интегралов по областям $\mathcal{O} + n\alpha\mathbf{e}_1$ и просуммируем по $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\int_{\Pi} |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon \int_{\Pi} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\phi)\int_{\Pi} |\phi u|^2\, d\mathbf{x}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad u \in H^1(\Pi), \tag{1.29}$$

$$\int_{\Pi} |\mathbf{A}|^2|u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon \int_{\Pi} |\nabla u|^2\, d\mathbf{x} + C(\varepsilon;\mathbf{A})\int_{\Pi} |u|^2\, d\mathbf{x}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad u \in H^1(\Pi). \tag{1.30}$$

Из (1.5) и (1.30) вытекают неравенства

$$\int_\Pi \langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})u, (\mathbf{D}-\mathbf{A})u\rangle\,d\mathbf{x} \geqslant (1-\varepsilon)\int_\Pi \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\,d\mathbf{x} - C(\varepsilon; g, \mathbf{A})\int_\Pi |u|^2\,d\mathbf{x},$$
$$0<\varepsilon\leqslant 1,\quad u\in H^1(\Pi), \tag{1.31}$$

$$\int_\Pi \langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})u, (\mathbf{D}-\mathbf{A})u\rangle\,d\mathbf{x} \leqslant (1+\varepsilon)\int_\Pi \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\,d\mathbf{x} + C(\varepsilon; g, \mathbf{A})\int_\Pi |u|^2\,d\mathbf{x},$$
$$0<\varepsilon\leqslant 1,\quad u\in H^1(\Pi). \tag{1.32}$$

Из (1.5), (1.25), (1.29), (1.31) и условия (ii) следует неравенство

$$m_{\lambda\mu}[v,v] \geqslant (1-\tau-\varepsilon)\int_\Pi \langle g\nabla u, \nabla u\rangle\,d\mathbf{x} + (1-\tau)\int_{\overline{\Pi}} |u|^2\,d\nu_+ - C\int_\Pi |v|^2\,d\mathbf{x},$$
$$u=\phi^{-1}v,\quad v\in \operatorname{Dom} m_{\lambda\mu},\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\quad \tau<1,\quad C=C(\varepsilon,\tau,g,\phi,\mathbf{A},d\nu). \tag{1.33}$$

Положим в (1.33) $2\varepsilon = 1-\tau$ и учтем нижнюю оценку (1.5). Тогда с учетом (1.22)

$$m_{\lambda\mu}[v,v] \geqslant C_1 m_+[u,u] - C\int_\Pi |v|^2\,d\mathbf{x},$$
$$u=\phi^{-1}v,\quad v\in \operatorname{Dom} m_{\lambda\mu},$$
$$C_1 = C_1(g,\tau)>0,\quad C=C(\tau,g,\phi,\mathbf{A},d\nu). \tag{1.34}$$

Из (1.5), (1.22), (1.25), (1.29) и (1.32) следует неравенство

$$m_{\lambda\mu}[v,v] \leqslant C_2 m_+[u,u] + C\int_\Pi |v|^2\,d\mathbf{x},$$
$$u=\phi^{-1}v,\quad v\in \operatorname{Dom} m_{\lambda\mu},$$
$$C_2 = C_2(g),\quad C=C(g,\phi,\mathbf{A}). \tag{1.35}$$

Неравенство (1.34) показывает, что форма $m_{\lambda\mu}$ полуограничена снизу. Из (1.29), (1.34), (1.35) и условия (i) видно, что форма $m_{\lambda\mu}$ допускает замыкание в $L_2(\Pi)$. •

Замкнутая форма $\overline{m_{\lambda\mu}}$ порождает в $L_2(\Pi)$ самосопряженный оператор $M_{\lambda\mu}$. Оператор $M_{\lambda\mu}$ интерпретируется как оператор Шрёдингера в области Π, формально заданный выражением (0.3), где $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = d\nu/d\mathbf{x}$. Оператор M_{DD} отвечает задаче Дирихле в Π; оператор M_{DN} (соответственно M_{ND}) отвечает условию Дирихле на Σ_0 (соответственно на Σ_1). При этом условия на Σ_1 (соответственно на Σ_0) естественные. Оператор M_{NN} отвечает естественным краевым условиям на всей границе $\partial\Pi$. (См. обсуждение ниже в п. 1.10.)

1.9. Основной результат работы составляет следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть область* Π *удовлетворяет условию* 1.1. *Пусть измеримая вещественная* (2×2)*-матрица-функция* $g(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (1.4)–(1.6), (1.9), (1.10). *Пусть вещественная функция* $\phi(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (1.13)–(1.15), *а вектор-функция* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (1.17), (1.18). *Пусть вещественный борелевский заряд* $d\nu$ *в* $\overline{\Pi}$ *удовлетворяет условиям* (1.20), (1.21), *а также условиям* (i)–(iii). *Пусть квадратичная форма* $m_{\lambda\mu}$ *(где* λ *и* μ *принимают значения* D *и* N*) определена соотношениями* (1.25), (1.26), *а форма* $\overline{m_{\lambda\mu}}$ *есть замыкание формы* $m_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(\Pi)$. *Пусть самосопряженный оператор* $M_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(\Pi)$ *порожден формой* $\overline{m_{\lambda\mu}}$. *Тогда спектр каждого из четырех операторов* M_{DD}, M_{DN}, M_{ND}, M_{NN} *абсолютно непрерывен.*

1.10. Частный случай. Обсудим важный для приложений частный случай. Предположим, что выполнено условие 1.1$'$. Пусть $V(\mathbf{x})$ („регулярная" часть потенциала $\mathcal{V}$) — вещественная измеримая функция в Π, причем

$$V(\mathbf{x}+n\alpha\mathbf{e}_1)=V(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\Pi,\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{1.36}$$

$$V\in L_1(\mathcal{O}). \tag{1.37}$$

Предположим, что „сингулярная" часть потенциала $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ сосредоточена на некоторой *периодической системе кривых* Σ в $\overline{\Pi}$. Положим

$$\widetilde{\Omega}:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2: 0\leqslant x_1<1,\ 0\leqslant x_2\leqslant 1\},\qquad \widetilde{\mathcal{O}}:=\Phi^{-1}(\widetilde{\Omega}).$$

Предположим, что система кривых Σ подчинена следующему условию.

Условие 1.6. *Пусть* $\mathfrak{l}_j\subset\widetilde{\mathcal{O}}$, $j=0,\dots,K$, *— липшицевы кривые (замкнутые, открытые или полуоткрытые). Положим*

$$\mathcal{L}_j:=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{l}_j+n\alpha\mathbf{e}_1),\quad j=0,\dots,K.$$

Через Σ *обозначается набор множеств* $\Sigma:=\{\mathcal{L}_j\}$, $j=0,\dots,K$.

Дифференциал длины дуги на $\mathcal{L}_j$ обозначим через ds_j. Пусть на каждом множестве $\mathcal{L}_j$ задана измеримая (по одномерной мере Лебега) вещественная функция σ_j, причем

$$\sigma_j(\mathbf{x}+n\alpha\mathbf{e}_1)=\sigma_j(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathcal{L}_j,\quad n\in\mathbb{Z},\quad j=0,\dots,K, \tag{1.38}$$

$$\sigma_j\in L_1(\mathfrak{l}_j),\quad j=0,\dots,K. \tag{1.39}$$

Рассмотрим заряд вида

$$d\nu(\mathbf{x})=V(\mathbf{x})d\mathbf{x}+\sum_{j=0}^{K}\sigma_j(\mathbf{x})ds_j(\mathbf{x}). \tag{1.40}$$

Из (1.36), (1.37), условия 1.6 и (1.38), (1.39) вытекает, что заряд (1.40) удовлетворяет условиям (1.20), (1.21), а также условиям (i) и (iii). Чтобы обеспечить выполнение условия (ii), потребуем, чтобы при некотором $\tau < 1$ выполнялось неравенство

$$\int_\Pi V_-(\mathbf{x})|u|^2\,d\mathbf{x} + \sum_{j=0}^{K}\int_{\mathcal{L}_j}(\sigma_j)_-(\mathbf{x})|u|^2\,ds_j(\mathbf{x})$$
$$\leqslant \tau\Big(\int_\Pi \big(\langle g\nabla u, \nabla u\rangle + V_+(\mathbf{x})|u|^2\big)\,d\mathbf{x} + \sum_{j=0}^{K}\int_{\mathcal{L}_j}(\sigma_j)_+(\mathbf{x})|u|^2\,ds_j(\mathbf{x})\Big)$$
$$+ C\int_\Pi |u|^2\,d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\Pi)\cap C_0(\overline{\Pi}), \quad \tau < 1, \quad C = C(\tau, g, V, \Sigma, \sigma). \tag{1.41}$$

Сейчас форма (1.25) приобретает вид

$$m_{\lambda\mu}[v,v] = \int_\Pi \big(\langle g(\mathbf{D}-\mathbf{A})u, (\mathbf{D}-\mathbf{A})u\rangle + V(\mathbf{x})|u|^2\big)\,d\mathbf{x} + \sum_{j=0}^{K}\int_{\mathcal{L}_j}\sigma_j(\mathbf{x})|u|^2\,ds_j(\mathbf{x}),$$
$$u = \phi^{-1}v, \quad u \in H^1(\Pi)\cap C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{\Pi}), \quad \lambda = D, N, \quad \mu = D, N. \tag{1.42}$$

Прямым следствием теоремы 1.5 является следующая теорема.

Теорема 1.7. *Пусть область* Π *удовлетворяет условию* 1.1$'$, *а измеримая вещественная* (2×2)*-матрица-функция* $g(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (1.4)–(1.6), (1.9), (1.10). *Пусть вещественная функция* $\phi(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (1.13)–(1.15), *вектор-функция* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *подчинена условиям* (1.17), (1.18), *а вещественная функция* $V(\mathbf{x})$ *— условиям* (1.36), (1.37). *Пусть система кривых* Σ *удовлетворяет условию* 1.6, *а вещественные функции* σ_j *в* $\mathcal{L}_j$, $j = 0, \dots, K$, *подчинены условиям* (1.38), (1.39). *Пусть, кроме того, выполнено условие* (1.41). *Пусть форма* $m_{\lambda\mu}$ *(где* λ *и* μ *принимают значения* D, N*) определена в* (1.42), *а форма* $\overline{m_{\lambda\mu}}$ *есть замыкание формы* $m_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(\Pi)$. *Пусть самосопряженный оператор* $M_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(\Pi)$ *порожден формой* $\overline{m_{\lambda\mu}}$. *Тогда спектр каждого из четырех операторов* $M_{\lambda\mu}$ *абсолютно непрерывен.*

Отметим, что условие (1.41) выпадает, если $V \geqslant 0$, $\sigma_j \geqslant 0$, $j = 0, \dots, K$. Удобно включить две компоненты Σ_0 и Σ_1 границы $\partial\Pi$ в систему Σ, полагая $\mathcal{L}_0 = \Sigma_0$, $\mathcal{L}_1 = \Sigma_1$. Это позволяет рассматривать задачу с третьим краевым условием. Например, в случае, когда $\Sigma = \{\Sigma_0, \Sigma_1\}$, оператор M_{NN} формально задан выражением $\phi^{-1}((\mathbf{D}-\mathbf{A})^* g(\mathbf{D}-\mathbf{A}) + V)\phi^{-1}$ на функциях, удовлетворяющих *естественному* краевому условию

$$\langle g(\mathbf{x})(\nabla\phi^{-1}v - i\mathbf{A}(\mathbf{x})\phi^{-1}v), \mathbf{n}_j(\mathbf{x})\rangle + \sigma_j(\mathbf{x})\phi^{-1}v = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_j, \quad j = 0, 1. \tag{1.43}$$

Здесь $\mathbf{n}_j(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней (по отношению к П) нормали к Σ_j в точке $\mathbf{x} \in \Sigma_j$, $j = 0, 1$. Разумеется, функции из $\mathrm{Dom}\, M_{NN}$ удовлетворяют (1.43) в смысле теоремы о следах лишь при дополнительных ограничениях на коэффициенты. Для оператора M_{DN} на Σ_0 накладывается условие Дирихле, а на Σ_1 — естественное условие. Аналогично для оператора M_{ND} на Σ_1 накладывается условие Дирихле, а на Σ_0 — естественное условие.

§2. Первая редукция. Сведение к задаче в полосе

2.1. В этом параграфе мы сводим задачу в волноводе П к аналогичной задаче в полосе S. В соответствии с условием 1.1, выполним замену переменных $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi$. Введем следующие обозначения

$$\phi^{(1)}(\mathbf{z}) := |\det \Phi'(\mathbf{x})|^{-1/2}\phi(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

$$\omega^{(1)}(\mathbf{z}) := \omega(\mathbf{x}), \tag{2.2}$$

$$g_0^{(1)}(\mathbf{z}) := |\det \Phi'(\mathbf{x})|^{-1}\Phi'(\mathbf{x})g_0(\mathbf{x})(\Phi'(\mathbf{x}))^t, \tag{2.3}$$

$$g^{(1)}(\mathbf{z}) := (\omega^{(1)}(\mathbf{z}))^2 g_0^{(1)}(\mathbf{z}), \tag{2.4}$$

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{z}) := (\Phi'(\mathbf{x})^t)^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \tag{2.5}$$

$$d\nu^{(1)}(\mathbf{z}) := d\nu(\mathbf{x}), \tag{2.6}$$

где $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi$. Наша цель — убедиться в том, что коэффициенты (2.1)–(2.6) в полосе S удовлетворяют условиям того же типа, что и исходные коэффициенты в области П.

Из свойства (1.2) отображения Φ, условий (1.4), (1.6), (1.13), (1.17) и соотношений (2.1)–(2.5) видно, что *коэффициенты* $\phi^{(1)}$, $\omega^{(1)}$, $g_0^{(1)}$ *и* $\mathbf{A}^{(1)}$ *периодичны в полосе* S *относительно решетки* γ_1.

2.2. Условия на метрику $g^{(1)}$. Из (1.8) и (2.2), очевидно, вытекает неравенство

$$0 < \omega_0 \leqslant \omega^{(1)}(\mathbf{z}) \leqslant \omega_1 < \infty, \quad \mathbf{z} \in S. \tag{2.7}$$

В силу (1.1), (1.3), (2.3), для $g_0^{(1)}$ выполнено условие, аналогичное (1.7):

$$c_0^{(1)}\mathbf{1} \leqslant g_0^{(1)}(\mathbf{z}) \leqslant c_1^{(1)}\mathbf{1}, \quad \mathbf{z} \in S, \quad 0 < c_0^{(1)} \leqslant c_1^{(1)} < \infty, \tag{2.8}$$

где $c_0^{(1)} = c_0^{(1)}(g_0, \Phi)$, $c_1^{(1)} = c_1^{(1)}(g_0, \Phi)$. Далее, из (1.9) следует, что $\omega^{(1)} = \omega \circ \Phi^{-1}$ удовлетворяет условию

$$\omega^{(1)} \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{2.9}$$

Проверим, что для $\omega^{(1)}$ выполнен аналог условия (1.10). Отображение $u \mapsto u^{(1)} = u \circ \Phi^{-1}$ переводит $\widetilde{H}^1(\mathcal{O})$ на $\widetilde{H}^1(\Omega)$. В силу (1.1), (1.10) и (2.2), для произвольной функции $u^{(1)} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla_{\mathbf z}\omega^{(1)}|^2|u^{(1)}(\mathbf z)|^2\,d\mathbf z &= \int_{\mathcal O} |(\Phi'(\mathbf x)^t)^{-1}\nabla\omega|^2|u(\mathbf x)|^2\,|\det\Phi'|d\mathbf x\\ &\leqslant C(\Phi)\int_{\mathcal O}|\nabla\omega|^2|u|^2\,d\mathbf x\\ &\leqslant \varepsilon\int_{\mathcal O}|\nabla u|^2\,d\mathbf x + C(\varepsilon;\omega,\Phi)\int_{\mathcal O}|u|^2\,d\mathbf x,\quad u = u^{(1)}\circ\Phi.\end{aligned}$$

Выполняя в правой части замену переменных $\mathbf z = \Phi(\mathbf x)$ и снова используя (1.1), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla_{\mathbf z}\omega^{(1)}|^2|u^{(1)}|^2\,d\mathbf z\\ &\leqslant \varepsilon\int_\Omega |\nabla_{\mathbf z}u^{(1)}|^2\,d\mathbf z + C(\varepsilon)\int_\Omega |u^{(1)}|^2\,d\mathbf z,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\ u^{(1)}\in\widetilde{H}^1(\Omega),\end{aligned}\tag{2.10}$$

где $C(\varepsilon) = C(\varepsilon;\omega,\Phi)$.

2.3. Условия на весовую функцию $\phi^{(1)}$. Из (1.3), (1.14) и (2.1) видно, что

$$\phi^{(1)}(\mathbf z) > 0,\quad \text{п. в. } \mathbf z\in S. \tag{2.11}$$

Соотношения (1.15), (2.1) и свойство (1.1) приводят (ср. вывод (2.10)) к условию

$$\int_\Omega |\phi^{(1)}|^2|u^{(1)}|^2\,d\mathbf z \leqslant \varepsilon\int_\Omega |\nabla_{\mathbf z}u^{(1)}|^2\,d\mathbf z + C(\varepsilon)\int_\Omega |u^{(1)}|^2\,d\mathbf z,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\quad u^{(1)}\in\widetilde{H}^1(\Omega), \tag{2.12}$$

где $C(\varepsilon) = C(\varepsilon;\phi,\Phi)$.

2.4. Условия на магнитный потенциал $\mathbf A^{(1)}$. Функции $l_j(t)$, введенные в (1.19), очевидно, удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}&l_j(ct)\leqslant \hat C_j l_j(t),\\ &\qquad t\geqslant 0,\ c\geqslant 1,\ j=1,\dots,m,\\ &\qquad \hat C_1 = 1+\ln c,\ \hat C_j = 1+\ln\hat C_{j-1},\ j=2,\dots,m.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Из (1.18) и (2.5), выполняя замену $\mathbf z = \Phi(\mathbf x)$ и учитывая (1.1) и (2.13), получаем

$$\int_\Omega |\mathbf A^{(1)}|^2 l_m^\rho(|\mathbf A^{(1)}|)\prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\mathbf A^{(1)}|)\,d\mathbf z<\infty,\quad m\in\mathbb N,\quad \rho>1, \tag{2.14}$$

с теми же m и ρ, что и в (1.18).

2.5. Условия на заряд $d\nu^{(1)}$. Условия (1.20), (1.21) и (1.1), (1.2) показывают, что заряд (2.6) — борелевский γ_1-периодический заряд в $\overline{S}$ локально-конечной вариации. В силу (1.1) отображение $u \mapsto u^{(1)} = u \circ \Phi^{-1}$ переводит $H^1(\Pi) \cap C_0(\overline{\Pi})$ на $H^1(S) \cap C_0(\overline{S})$. В $L_2(S)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m_+^{(1)}[u^{(1)}, u^{(1)}] := \int\limits_S |\nabla_{\mathbf{z}} u^{(1)}|^2 \, d\mathbf{z} + \int\limits_{\overline{S}} |u^{(1)}|^2 \, d\nu_+^{(1)}, \quad u^{(1)} \in H^1(S) \cap C_0(\overline{S}). \quad (2.15)$$

Выполняя в (2.15) замену $\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z})$ и используя (1.1), (1.22) и (2.6), получаем двустороннюю оценку

$$\begin{aligned} c(\Phi)\, m_+[u, u] &\leqslant m_+^{(1)}[u^{(1)}, u^{(1)}] \\ &\leqslant C(\Phi)\, m_+[u, u], \quad u = u^{(1)} \circ \Phi, \ u^{(1)} \in H^1(S) \cap C_0(\overline{S}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Кроме того, из (1.3) вытекает двусторонняя оценка

$$c(\Phi) \int\limits_\Pi |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_S |u^{(1)}|^2 \, d\mathbf{z} \leqslant C(\Phi) \int\limits_\Pi |u|^2 \, d\mathbf{x}, \quad u = u^{(1)} \circ \Phi, \quad u^{(1)} \in L_2(S). \quad (2.17)$$

Соотношения (2.16), (2.17) вместе с условием (i) для $d\nu$ (см. п. 1.7) показывают, что для $d\nu^{(1)}$ выполнено следующее условие.

(i$'$) *Форма* (2.15) *допускает замыкание в* $L_2(S)$.

Далее, в силу (2.2)–(2.4), (2.6) справедливы тождества

$$\int\limits_S \langle g^{(1)} \nabla_{\mathbf{z}} u^{(1)}, \nabla_{\mathbf{z}} u^{(1)} \rangle \, d\mathbf{z} = \int\limits_\Pi \langle g \nabla u, \nabla u \rangle \, d\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

$$\int\limits_{\overline{S}} |u^{(1)}|^2 \, d\nu_\pm^{(1)} = \int\limits_{\overline{\Pi}} |u|^2 \, d\nu_\pm, \quad (2.19)$$

где $u = u^{(1)} \circ \Phi$, $u^{(1)} \in H^1(S) \cap C_0(\overline{S})$. Условие (ii) для $d\nu$ (см. (1.23)), с учетом (2.17)–(2.19), приводит к следующему условию.

(ii$'$) *При некотором* $\tau < 1$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\overline{S}} |u^{(1)}|^2 \, d\nu_-^{(1)} \leqslant \tau \Big(\int\limits_S \langle g^{(1)} \nabla_{\mathbf{z}} u^{(1)}, \nabla_{\mathbf{z}} u^{(1)} \rangle \, d\mathbf{z} + \int\limits_{\overline{S}} |u^{(1)}|^2 \, d\nu_+^{(1)} \Big) + C \int\limits_S |u^{(1)}|^2 \, d\mathbf{z},$$
$$u^{(1)} \in H^1(S) \cap C_0(\overline{S}), \quad \tau < 1. \quad (2.20)$$

Число τ в (2.20) — то же, что и в (1.23), $C = C(\tau, g, d\nu, \Phi)$.

Отображение $u \mapsto u^{(1)}$ переводит $\widetilde{H}^1(\mathcal{O}) \cap \widetilde{C}(\overline{\mathcal{O}})$ на $\widetilde{H}^1(\Omega) \cap \widetilde{C}(\overline{\Omega})$. Выполняя в (1.24) подстановку $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ и учитывая (1.1), приходим к следующему условию.

(iii′) *При любом* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнена оценка*

$$\int_{\overline{\Omega}} |u^{(1)}|^2 \, |d\nu^{(1)}| \leqslant \varepsilon \biggl(\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{z}} u^{(1)}|^2 \, d\mathbf{z} + \max_{\mathbf{z}\in\overline{\Omega}} |u^{(1)}(\mathbf{z})|^2 \biggr) + C(\varepsilon) \int_{\Omega} |u^{(1)}|^2 \, d\mathbf{z},$$
$$0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega) \cap \widetilde{C}(\overline{\Omega}), \tag{2.21}$$

где $C(\varepsilon) = C(\varepsilon; d\nu, \Phi)$.

2.6. Операторы в полосе S. В $L_2(S)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m^{(1)}_{\lambda\mu}[w, w] := \int_S \langle g^{(1)}(\mathbf{D} - \mathbf{A}^{(1)})(\phi^{(1)})^{-1} w, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^{(1)})(\phi^{(1)})^{-1} w \rangle \, d\mathbf{z}$$
$$+ \int_{\overline{S}} |(\phi^{(1)})^{-1} w|^2 \, d\nu^{(1)}, \tag{2.22}$$

$$\operatorname{Dom} m^{(1)}_{\lambda\mu} := \{ w = \phi^{(1)} u^{(1)} : u^{(1)} \in H^1(S) \cap C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{S}) \}, \quad \lambda = D, N, \quad \mu = D, N. \tag{2.23}$$

В силу предложения 1.4 (примененного при $\Pi = S$), с учетом условий (2.7), (2.8), (2.11), (2.12), (2.14), а также условий (i′), (ii′), форма (2.22) полуограничена снизу и допускает замыкание в $L_2(S)$. Замкнутая форма $m^{(1)}_{\lambda\mu}$ порождает самосопряженный оператор $M^{(1)}_{\lambda\mu}$ в $L_2(S)$.

Для $v \in L_2(\Pi)$ положим $w(\mathbf{z}) = |\det \Phi'(\mathbf{x})|^{-1/2} v(\mathbf{x})$, где $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$. Отображение $v \mapsto w$ *унитарно переводит* $L_2(\Pi)$ *на* $L_2(S)$. При этом $\operatorname{Dom} m_{\lambda\mu}$ отображается на $\operatorname{Dom} m^{(1)}_{\lambda\mu}$. Действительно, в силу (1.1) отображение $u \mapsto u^{(1)} = u \circ \Phi^{-1}$ переводит $H^1(\Pi) \cap C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{\Pi})$ на $H^1(S) \cap C_0^{(\lambda\mu)}(\overline{S})$. Остается учесть (1.26), (2.1) и (2.23).

В соответствии с (2.1)–(2.6), после подстановок $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{z}) = |\det \Phi'(\mathbf{x})|^{-1/2} v(\mathbf{x})$, форма (1.25) перейдет в форму (2.22):

$$m_{\lambda\mu}[v, v] = m^{(1)}_{\lambda\mu}[w, w], \quad v \in \operatorname{Dom} m_{\lambda\mu}.$$

Отсюда следует, что *операторы* $M_{\lambda\mu}$ *и* $M^{(1)}_{\lambda\mu}$ *унитарно эквивалентны*. Поэтому *теорема 1.5 вытекает из следующей теоремы* (представляющей частный случай теоремы 1.5).

Теорема 2.1. *Пусть* $S = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : 0 < z_2 < 1\}$. *Пусть измеримая вещественная* γ_1*-периодическая* (2×2)*-матрица-функция* $g^{(1)}(\mathbf{z})$ *подчинена условиям* (2.4), (2.7)–(2.10). *Пусть вещественная* γ_1*-периодическая функция* $\phi^{(1)}(\mathbf{z})$ *удовлетворяет условиям* (2.11), (2.12), *а* γ_1*-периодическая вектор-функция* $\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{z})$ *подчинена условию* (2.14). *Пусть вещественный* γ_1*-периодический борелевский заряд* $d\nu^{(1)}$ *локально-конечной вариации в* $\overline{S}$ *удовлетворяет условиям* (i′)–(iii′).

Пусть квадратичная форма $m^{(1)}_{\lambda\mu}$ *(где* λ *и* μ *принимают значения* D, N) *определена соотношениями* (2.22), (2.23), *а форма* $\overline{m^{(1)}_{\lambda\mu}}$ *есть замыкание формы* $m^{(1)}_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(S)$. *Пусть самосопряженный оператор* $M^{(1)}_{\lambda\mu}$ *в* $L_2(S)$ *порожден формой* $\overline{m^{(1)}_{\lambda\mu}}$. *Тогда спектр каждого из четырех операторов* $M^{(1)}_{\lambda\mu}$ *абсолютно непрерывен.*

§3. Вторая редукция. Сведение к периодической задаче в полосе

3.1. Обозначения. Пусть $\beta > 0$ и $\gamma^*_\beta := \{n\beta \mathrm{e}_2,\ n \in \mathbb{Z}\}$ — одномерная решетка. Через $\widehat{H}^s(S_{a,b})$ обозначается класс функций $u \in H^s(S_{a,b})$, γ^*_{b-a}-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^2$ принадлежит $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Через $\widehat{C}(\overline{S_{a,b}})$ обозначается множество функций, являющихся сужением на $\overline{S_{a,b}}$ γ^*_{b-a}-периодических непрерывных в $\mathbb{R}^2$ функций. Положим $\widehat{C}_0(\overline{S_{a,b}}) := C_0(\overline{S_{a,b}}) \cap \widehat{C}(\overline{S_{a,b}})$. Далее, пусть $\Gamma_\beta := \gamma_1 \times \gamma^*_\beta = \{n_1\mathrm{e}_1 + n_2\beta\mathrm{e}_2,\ (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$ — решетка в $\mathbb{R}^2$. Через $\widehat{H}^s(\Omega_{a,b})$ обозначим класс функций $u \in H^s(\Omega_{a,b})$, Γ_{b-a}-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^2$ принадлежит $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Через $\widehat{C}(\overline{\Omega_{a,b}})$ обозначается множество сужений на $\overline{\Omega_{a,b}}$ Γ_{b-a}-периодических непрерывных в $\mathbb{R}^2$ функций.

3.2. Операторы продолжения. В этом параграфе мы сведем изучение всех четырех операторов $M^{(1)}_{DD}$, $M^{(1)}_{DN}$, $M^{(1)}_{ND}$, $M^{(1)}_{NN}$ в полосе S к изучению *оператора с периодическими граничными условиями в полосе*

$$\widehat{S} := S_{-2,2} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : -2 < z_2 < 2\}. \tag{3.1}$$

Положим $\widehat{\Omega} := \Omega_{-2,2} = (0,1) \times (-2,2)$. Редукция проводится в два этапа. Вначале изучение четырех операторов в полосе S сводится к изучению двух операторов $M^{(2)}_{DD}$, $M^{(2)}_{NN}$ с условиями Дирихле и Неймана в „удвоенной“ полосе $S_2 := S_{0,2}$, а затем операторы в S_2 сводятся к периодическому оператору в $\widehat{S}$. Положим $\Omega_2 := \Omega_{0,2} = (0,1) \times (0,2)$.

Определим подпространства

$$L^{(\pm)}_2(S_2) := \{u \in L_2(S_2) : u(z_1, 2 - z_2) = \pm u(z_1, z_2),\ \text{п. в. } \mathbf{z} \in S_2\} \tag{3.2}$$

всех четных ($L^{(+)}_2$) и нечетных ($L^{(-)}_2$) функций относительно прямой $z_2 = 1$. Проекторы $P_\pm$ в $L_2(S_2)$ на $L^{(\pm)}_2(S_2)$ имеют вид

$$(P_\pm u)(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(u(z_1, z_2) \pm u(z_1, 2 - z_2)).$$

Определим *операторы продолжения* $W_\pm : L_2(S) \to L^{(\pm)}_2(S_2)$, заданные формулами

$$(W_\pm u)(z_1, z_2) = \begin{cases} u(z_1, z_2)/\sqrt{2}, & 0 < z_2 \leqslant 1, \\ \pm u(z_1, 2 - z_2)/\sqrt{2}, & 1 < z_2 < 2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Очевидно, $W_\pm$ — *унитарные* операторы. Элементарно проверяется (ср. [SoW, лемма 7.1]) следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть* $W_\pm : L_2(S) \to L_2^{(\pm)}(S_2)$ — *операторы продолжения, определенные формулами* (3.3). *Тогда справедливы следующие соотношения*:

$$\begin{aligned} W_+\left(H^1(S)\cap C_0(\overline{S})\right) &= H^1(S_2)\cap C_0(\overline{S_2})\cap L_2^{(+)}(S_2),\\ W_-\left(H^1(S)\cap C_0^{(ND)}(\overline{S})\right) &= H^1(S_2)\cap C_0(\overline{S_2})\cap L_2^{(-)}(S_2),\\ W_+\left(H^1(S)\cap C_0^{(DN)}(\overline{S})\right) &= H^1(S_2)\cap C_0^{(DD)}(\overline{S_2})\cap L_2^{(+)}(S_2),\\ W_-\left(H^1(S)\cap C_0^{(DD)}(\overline{S})\right) &= H^1(S_2)\cap C_0^{(DD)}(\overline{S_2})\cap L_2^{(-)}(S_2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.3. Продолжим коэффициенты оператора $M_{\lambda\mu}^{(1)}$ с S на S_2 следующим образом:

$$\phi^{(2)} := \sqrt{2}W_+\phi^{(1)}, \tag{3.5}$$

$$\omega^{(2)} := \sqrt{2}W_+\omega^{(1)}, \tag{3.6}$$

$$(g_0^{(2)})_{jj} := \sqrt{2}W_+(g_0^{(1)})_{jj}, \quad j=1,2, \tag{3.7}$$

$$(g_0^{(2)})_{12} = (g_0^{(2)})_{21} := \sqrt{2}W_-(g_0^{(1)})_{12}, \tag{3.8}$$

$$g^{(2)} := (\omega^{(2)})^2 g_0^{(2)}, \tag{3.9}$$

$$A_1^{(2)} := \sqrt{2}W_+A_1^{(1)}, \quad A_2^{(2)} := \sqrt{2}W_-A_2^{(1)}. \tag{3.10}$$

Заряд $d\nu^{(1)}$ продолжим четным образом с „удвоением“ на линии $z_2 = 1$. Иными словами, определим заряд $d\nu^{(2)}$ следующим образом. Для любого ограниченного борелевского множества $\mathcal{B}^{(2)} \subset \overline{S_2}$ введем множества $\mathcal{B}_l^{(2)} := \{\mathbf{z} \in \mathcal{B}^{(2)} : 0 \leqslant z_2 \leqslant 1\}$ и $\mathcal{B}_u^{(2)} := \{\mathbf{z} \in \mathcal{B}^{(2)} : 1 \leqslant z_2 \leqslant 2\}$. Положим $\widetilde{\mathcal{B}}_u^{(2)} := \{\mathbf{z} : (z_1, 2-z_2) \in \mathcal{B}_u^{(2)}\}$. Тогда $\widetilde{\mathcal{B}}_u^{(2)} \subset \overline{S}$. По определению

$$\int_{\mathcal{B}^{(2)}} d\nu^{(2)} = \int_{\mathcal{B}_l^{(2)}} d\nu^{(1)} + \int_{\widetilde{\mathcal{B}}_u^{(2)}} d\nu^{(1)}.$$

Ясно, что все коэффициенты $\phi^{(2)}$, $g^{(2)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$ и заряд $d\nu^{(2)}$ периодичны в S_2 относительно решетки γ_1.

3.4. Условия на коэффициенты. Из (3.7), (3.8) видно, что собственные значения у матрицы $g_0^{(2)}(\mathbf{z})$ — те же, что у $g_0^{(1)}(\mathbf{z})$ при $0 < z_2 \leqslant 1$, и те же, что у $g_0^{(1)}(z_1, 2-z_2)$ при $1 < z_2 < 2$. Поэтому условие (2.8) переносится на матрицу $g_0^{(2)}$ с теми же постоянными:

$$c_0^{(1)}\mathbf{1} \leqslant g_0^{(2)}(\mathbf{z}) \leqslant c_1^{(1)}\mathbf{1}, \quad \mathbf{z}\in S_2, \quad 0 < c_0^{(1)} \leqslant c_1^{(1)} < \infty. \tag{3.11}$$

Из (2.7) и (3.6), очевидно, вытекает неравенство

$$0 < \omega_0 \leqslant \omega^{(2)}(\mathbf{z}) \leqslant \omega_1 < \infty, \quad \mathbf{z}\in S_2. \tag{3.12}$$

Соотношения (2.9) и (3.6) показывают, что

$$\omega^{(2)} \in \widetilde{H}^1(\Omega_2). \tag{3.13}$$

Пусть $u^{(2)} \in \widetilde{H}^1(\Omega_2)$. Из (3.6) следует тождество

$$\int\limits_{\Omega_2} |\nabla\omega^{(2)}|^2|u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z} = \int\limits_{\Omega} |\nabla\omega^{(1)}(z_1,z_2)|^2\big(|u^{(2)}(z_1,z_2)|^2 + |u^{(2)}(z_1,2-z_2)|^2\big)\,d\mathbf{z}.$$

В силу (2.10) правая часть оценивается через

$$\begin{aligned} &\varepsilon\int\limits_{\Omega}\big(|\nabla u^{(2)}(z_1,z_2)|^2 + |\nabla u^{(2)}(z_1,2-z_2)|^2\big)\,d\mathbf{z} \\ &+ C(\varepsilon;\omega,\Phi)\int\limits_{\Omega}\big(|u^{(2)}(z_1,z_2)|^2 + |u^{(2)}(z_1,2-z_2)|^2\big)\,d\mathbf{z} \\ &= \varepsilon\int\limits_{\Omega_2}|\nabla u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z} + C(\varepsilon;\omega,\Phi)\int\limits_{\Omega_2}|u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega_2}|\nabla\omega^{(2)}|^2|u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z} \leqslant \varepsilon\int\limits_{\Omega_2}|\nabla u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z} + C(\varepsilon;\omega,\Phi)\int\limits_{\Omega_2}|u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z},$$
$$0<\varepsilon\leqslant 1, \quad u^{(2)} \in \widetilde{H}^1(\Omega_2). \tag{3.14}$$

Из (2.11) и (3.5), очевидно, вытекает, что $\phi^{(2)}(\mathbf{z}) > 0$ при почти всех $\mathbf{z} \in S_2$. Соотношения (2.12) и (3.5) приводят (ср. вывод (3.14)) к условию

$$\int\limits_{\Omega_2}|\phi^{(2)}|^2|u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z} \leqslant \varepsilon\int\limits_{\Omega_2}|\nabla u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z} + C(\varepsilon;\phi,\Phi)\int\limits_{\Omega_2}|u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z},$$
$$0<\varepsilon\leqslant 1, \quad u^{(2)} \in \widetilde{H}^1(\Omega_2).$$

Из (3.10) следует, что $|\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{z})|^2 = |\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{z})|^2$ при $0 < z_2 \leqslant 1$, $|\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{z})|^2 = |\mathbf{A}^{(1)}(z_1, 2-z_2)|^2$ при $1 < z_2 < 2$. Отсюда и из (2.14) вытекает условие

$$\int\limits_{\Omega_2}|\mathbf{A}^{(2)}|^2 l_m^\rho(|\mathbf{A}^{(2)}|)\prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\mathbf{A}^{(2)}|)\,d\mathbf{z} < \infty, \quad m\in\mathbb{N}, \quad \rho>1, \tag{3.15}$$

с теми же m и ρ, что в (2.14) (и в (1.18)).

3.5. Условия на заряд. Из определения $d\nu^{(2)}$ ясно, что $d\nu^{(2)}$ — борелевский γ_1-периодический заряд в $\overline{S_2}$ локально-конечной вариации. В $L_2(S_2)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m_+^{(2)}[u^{(2)},u^{(2)}] := \int\limits_{S_2} |\nabla u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z} + \int\limits_{\overline{S_2}} |u^{(2)}|^2\,d\nu_+^{(2)}, \quad u^{(2)} \in H^1(S_2)\cap C_0(\overline{S_2}). \tag{3.16}$$

В силу (2.15), (3.16) и определения заряда $d\nu^{(2)}$ справедливо тождество

$$m_+^{(2)}[u^{(2)},u^{(2)}] = m_+^{(1)}[u^{(1)},u^{(1)}] + m_+^{(1)}[\widetilde{u}^{(1)},\widetilde{u}^{(1)}], \quad u^{(2)} \in H^1(S_2)\cap C_0(\overline{S_2}),$$

где

$$u^{(1)}(z_1,z_2) := u^{(2)}(z_1,z_2), \quad \widetilde{u}^{(1)}(z_1,z_2) := u^{(2)}(z_1,2-z_2), \quad \mathbf{z}\in\overline{S}. \tag{3.17}$$

Отсюда и из условия (i′) (см. п. 2.5) вытекает следующее условие.

(i″) *Форма* (3.16) *допускает замыкание в* $L_2(S_2)$.

Пусть $u^{(2)} \in H^1(S_2)\cap C_0(\overline{S_2})$, а $u^{(1)}$, $\widetilde{u}^{(1)}$ определены в (3.17). В силу (3.6)–(3.9) справедливы тождества

$$\begin{aligned}
&\langle g^{(2)}(\mathbf{z})\nabla u^{(2)}(\mathbf{z}), \nabla u^{(2)}(\mathbf{z})\rangle \\
&\quad = \langle g^{(1)}(\mathbf{z})\nabla u^{(1)}(\mathbf{z}), \nabla u^{(1)}(\mathbf{z})\rangle, \quad 0<z_2\leqslant 1, \\
&\langle g^{(2)}(\mathbf{z})\nabla u^{(2)}(\mathbf{z}), \nabla u^{(2)}(\mathbf{z})\rangle \\
&\quad = \langle g^{(1)}(z_1,2-z_2)(\nabla\widetilde{u}^{(1)})(z_1,2-z_2), (\nabla\widetilde{u}^{(1)})(z_1,2-z_2)\rangle, \quad 1<z_2<2.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

В соответствии с определением заряда $d\nu^{(2)}$ имеем

$$\int\limits_{\overline{S_2}} |u^{(2)}|^2\,d\nu_\pm^{(2)} = \int\limits_{\overline{S}} \big(|u^{(1)}|^2 + |\widetilde{u}^{(1)}|^2\big)\,d\nu_\pm^{(1)}. \tag{3.19}$$

Теперь из (2.20), (3.18), (3.19) получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\overline{S_2}} |u^{(2)}|^2\,d\nu_-^{(2)} \\
&\leqslant \tau\Big(\int\limits_{S} \big(\langle g^{(1)}\nabla u^{(1)}, \nabla u^{(1)}\rangle + \langle g^{(1)}\nabla\widetilde{u}^{(1)}, \nabla\widetilde{u}^{(1)}\rangle\big)\,d\mathbf{z} + \int\limits_{\overline{S}} \big(|u^{(1)}|^2 + |\widetilde{u}^{(1)}|^2\big)\,d\nu_+^{(1)}\Big) \\
&\quad + C\int\limits_{S} \big(|u^{(1)}|^2 + |\widetilde{u}^{(1)}|^2\big)\,d\mathbf{z} \\
&= \tau\Big(\int\limits_{S_2} \langle g^{(2)}\nabla u^{(2)}, \nabla u^{(2)}\rangle\,d\mathbf{z} + \int\limits_{\overline{S_2}} |u^{(2)}|^2\,d\nu_+^{(2)}\Big) + C\int\limits_{S_2} |u^{(2)}|^2\,d\mathbf{z}.
\end{aligned}$$

Таким образом, выполнено следующее условие.

(ii″) *При некотором* $\tau < 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\overline{S_2}} |u^{(2)}|^2\, d\nu_-^{(2)} \leqslant \tau\biggl(\int_{S_2} \langle g^{(2)}\nabla u^{(2)}, \nabla u^{(2)}\rangle\, d\mathbf{z} + \int_{\overline{S_2}} |u^{(2)}|^2\, d\nu_+^{(2)}\biggr) + C\int_{S_2} |u^{(2)}|^2\, d\mathbf{z},$$
$$u^{(2)} \in H^1(S_2) \cap C_0(\overline{S_2}), \quad \tau < 1, \quad C = C(\tau, g, d\nu, \Phi). \tag{3.20}$$

Число τ в (3.20) — то же, что и в (2.20) (и в (1.23)).

Пусть $u^{(2)} \in \widetilde{H}^1(\Omega_2) \cap \widetilde{C}(\overline{\Omega_2})$, а $u^{(1)}$, $\widetilde{u}^{(1)}$ определены в (3.17). В силу (2.21) имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\Omega_2}} |u^{(2)}|^2\, |d\nu^{(2)}| &= \int_{\overline{\Omega}} \bigl(|u^{(1)}|^2 + |\widetilde{u}^{(1)}|^2\bigr)\, |d\nu^{(1)}| \\
&\leqslant \varepsilon\biggl(\int_{\Omega} \bigl(|\nabla u^{(1)}|^2 + |\nabla \widetilde{u}^{(1)}|^2\bigr)\, d\mathbf{z} + \max_{\mathbf{z}\in\overline{\Omega}} |u^{(1)}(\mathbf{z})|^2 + \max_{\mathbf{z}\in\overline{\Omega}} |\widetilde{u}^{(1)}(\mathbf{z})|^2\biggr) \\
&\quad + C(\varepsilon; d\nu, \Phi) \int_{\Omega} \bigl(|u^{(1)}|^2 + |\widetilde{u}^{(1)}|^2\bigr)\, d\mathbf{z} \\
&\leqslant \varepsilon\biggl(\int_{\Omega_2} |\nabla u^{(2)}|^2\, d\mathbf{z} + 2\max_{\mathbf{z}\in\overline{\Omega_2}} |u^{(2)}(\mathbf{z})|^2\biggr) + C(\varepsilon; d\nu, \Phi) \int_{\Omega_2} |u^{(2)}|^2\, d\mathbf{z}.
\end{aligned}$$

Таким образом, выполнено следующее условие.

(iii″) *При любом* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\overline{\Omega_2}} |u^{(2)}|^2\, |d\nu^{(2)}| \leqslant \varepsilon\biggl(\int_{\Omega_2} |\nabla u^{(2)}|^2\, d\mathbf{z} + \max_{\mathbf{z}\in\overline{\Omega_2}} |u^{(2)}(\mathbf{z})|^2\biggr) + C(\varepsilon; d\nu, \Phi) \int_{\Omega_2} |u^{(2)}|^2\, d\mathbf{z},$$
$$0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad u^{(2)} \in \widetilde{H}^1(\Omega_2) \cap \widetilde{C}(\overline{\Omega_2}).$$

Мы проверили, что коэффициенты (3.5)–(3.10) и заряд $d\nu^{(2)}$ удовлетворяют тем же условиям в полосе S_2, что и коэффициенты (2.1)–(2.6) в полосе S.

3.6. В $L_2(S_2)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}
&m_{\lambda\lambda}^{(2)}[w^{(2)}, w^{(2)}] \\
&\quad := \int_{S_2} \langle g^{(2)}(\mathbf{D} - \mathbf{A}^{(2)})(\phi^{(2)})^{-1} w^{(2)}, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^{(2)})(\phi^{(2)})^{-1} w^{(2)}\rangle\, d\mathbf{z} \\
&\quad\quad + \int_{\overline{S_2}} |(\phi^{(2)})^{-1} w^{(2)}|^2\, d\nu^{(2)}(\mathbf{z}), \quad \lambda = D, N,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} m_{DD}^{(2)} &:= \{w^{(2)} = \phi^{(2)} u^{(2)} : u^{(2)} \in H^1(S_2) \cap C_0^{(DD)}(\overline{S_2})\}, \\ \operatorname{Dom} m_{NN}^{(2)} &:= \{w^{(2)} = \phi^{(2)} u^{(2)} : u^{(2)} \in H^1(S_2) \cap C_0(\overline{S_2})\}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

В силу предложения 1.4 (примененного к форме (3.21)), форма $m_{\lambda\lambda}^{(2)}$ полуограничена снизу и допускает замыкание в $L_2(S_2)$. Замкнутая форма $\overline{m_{\lambda\lambda}^{(2)}}$ порождает самосопряженный оператор $M_{\lambda\lambda}^{(2)}$ в $L_2(S_2)$.

Предложение 3.2. *Подпространства* $L_2^{(\pm)}(S_2)$, *определенные в* (3.2), *являются инвариантными подпространствами операторов* $M_{DD}^{(2)}$ *и* $M_{NN}^{(2)}$.

Доказательство. Требуется убедиться, что

$$P_\pm(\operatorname{Dom} m_{\lambda\lambda}^{(2)}) = L_2^{(\pm)}(S_2) \cap \operatorname{Dom} m_{\lambda\lambda}^{(2)}, \tag{3.23}$$

$$m_{\lambda\lambda}^{(2)}[w^{(2)}, w^{(2)}] = m_{\lambda\lambda}^{(2)}[P_+ w^{(2)}, P_+ w^{(2)}] + m_{\lambda\lambda}^{(2)}[P_- w^{(2)}, P_- w^{(2)}], \quad w^{(2)} \in \operatorname{Dom} m_{\lambda\lambda}^{(2)}. \tag{3.24}$$

Тогда по замыканию аналогичные соотношения выполнены и для замкнутой формы $\overline{m_{\lambda\lambda}^{(2)}}$. Равенство (3.23) следует из (3.5), (3.22). Для $w^{(2)} \in \operatorname{Dom} m_{\lambda\lambda}^{(2)}$ положим

$$u_\pm^{(2)} := (\phi^{(2)})^{-1} P_\pm w^{(2)}. \tag{3.25}$$

Тогда

$$u_\pm^{(2)} \in L_2^{(\pm)}(S_2) \cap H^1(S_2) \cap C_0^{(\lambda\lambda)}(\overline{S_2}). \tag{3.26}$$

Для проверки (3.24) достаточно убедиться, что

$$m_{\lambda\lambda}^{(2)}[P_+ w^{(2)}, P_- w^{(2)}] = 0, \quad w^{(2)} \in \operatorname{Dom} m_{\lambda\lambda}^{(2)}. \tag{3.27}$$

Выпишем левую часть (3.27), используя обозначения (3.25):

$$\sum_{j,l=1}^{2} \int_{S_2} g_{jl}^{(2)} (D_j - A_j^{(2)}) u_+^{(2)} \overline{(D_l - A_l^{(2)}) u_-^{(2)}} \, d\mathbf{z} + \int_{\overline{S_2}} u_+^{(2)} \overline{u_-^{(2)}} \, d\nu^{(2)}(\mathbf{z}). \tag{3.28}$$

Во втором интеграле в (3.28) подынтегральная функция $u_+^{(2)} \overline{u_-^{(2)}}$ — нечетная (относительно прямой $z_2 = 1$) функция класса $C_0(\overline{S_2})$ (в частности, эта функция равна нулю при $z_2 = 1$), а заряд $d\nu^{(2)}$ симметричен относительно прямой $z_2 = 1$. Поэтому второй член в (3.28) аннулируется. В силу (3.10), (3.26) функции $(D_1 - A_1^{(2)}) u_+^{(2)}$ и $(D_2 - A_2^{(2)}) u_-^{(2)}$ четные, а $(D_1 - A_1^{(2)}) u_-^{(2)}$ и $(D_2 - A_2^{(2)}) u_+^{(2)}$ нечетные (относительно прямой $z_2 = 1$). Отсюда с учетом (3.6)–(3.9) следует, что и первый член в (3.28) равен нулю. •

Обозначим части оператора $M_{\lambda\lambda}^{(2)}$ ($\lambda = D, N$), действующие в подпространствах $L_2^{(\pm)}(S_2)$, через $M_{\lambda\lambda}^{(\pm)}$. Пусть $m_{\lambda\lambda}^{(\pm)}$ — квадратичная форма в $L_2^{(\pm)}(S_2)$, являющаяся сужением формы $m^{(2)}_{\lambda\lambda}$ на $\mathrm{Dom}\, m^{(2)}_{\lambda\lambda} \cap L^{(\pm)}_2(S_2)$. Форма $m^{(\pm)}_{\lambda\lambda}$ полуограничена снизу и допускает замыкание (вместе с формой $m^{(2)}_{\lambda\lambda}$). Оператор $M^{(\pm)}_{\lambda\lambda}$ — самосопряженный оператор в $L^{(\pm)}_2(S_2)$, отвечающий замкнутой форме $m^{(\pm)}_{\lambda\lambda}$.

Предложение 3.3. *Пусть* $W_\pm : L_2(S) \to L^{(\pm)}_2(S_2)$ — *унитарные операторы, определенные в* (3.3). *Тогда*

$$W_+ M^{(1)}_{NN} W^*_+ = M^{(+)}_{NN}, \quad W_- M^{(1)}_{ND} W^*_- = M^{(-)}_{NN},$$
$$W_+ M^{(1)}_{DN} W^*_+ = M^{(+)}_{DD}, \quad W_- M^{(1)}_{DD} W^*_- = M^{(-)}_{DD}. \tag{3.29}$$

Доказательство. Все четыре соотношения устанавливаются аналогично. Докажем, например, первое соотношение в (3.29). Проверим, что

$$W_+(\mathrm{Dom}\, m^{(1)}_{DN}) = \mathrm{Dom}\, m^{(+)}_{DD}. \tag{3.30}$$

Действительно, в силу (2.23), (3.3) и (3.5) справедливы соотношения

$$W_+(\mathrm{Dom}\, m^{(1)}_{DN}) = W_+\big(\phi^{(1)}(H^1(S) \cap C^{(DN)}_0(\overline{S}))\big) = \phi^{(2)} W_+(H^1(S) \cap C^{(DN)}_0(\overline{S})).$$

Далее, используя (3.4), (3.5) и (3.22), преобразуем последнее выражение к виду

$$\phi^{(2)}(H^1(S_2) \cap C^{(DD)}_0(\overline{S_2}) \cap L^{(+)}_2(S_2)) = \mathrm{Dom}\, m^{(2)}_{DD} \cap L^{(+)}_2(S_2) = \mathrm{Dom}\, m^{(+)}_{DD}.$$

Проверим справедливость соотношения

$$m^{(1)}_{DN}[W^*_+ w_+, W^*_+ w_+] = m^{(+)}_{DD}[w_+, w_+], \quad w_+ \in \mathrm{Dom}\, m^{(+)}_{DD}. \tag{3.31}$$

В соответствии с (3.3) оператор $W^*_+ : L^{(+)}_2(S_2) \to L_2(S)$ действует по формуле

$$(W^*_+ v)(\mathbf{z}) = \sqrt{2} v(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in S, \quad v \in L^{(+)}_2(S_2).$$

Тогда, используя свойства симметрии коэффициентов (см. (3.5)–(3.10) и определение $d\nu^{(2)}$), получаем

$$\begin{aligned}
m^{(1)}_{DN}[W^*_+ w_+, W^*_+ w_+] &= 2 m^{(1)}_{DN}[w_+, w_+] \\
&= 2 \int\limits_S \langle g^{(1)}(\mathbf{D} - \mathbf{A}^{(1)})(\phi^{(1)})^{-1} w_+, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^{(1)})(\phi^{(1)})^{-1} w_+ \rangle \, d\mathbf{z} \\
&\quad + 2 \int\limits_{\overline{S}} |(\phi^{(1)})^{-1} w_+|^2 \, d\nu^{(1)}(\mathbf{z}) \\
&= \int\limits_{S_2} \langle g^{(2)}(\mathbf{D} - \mathbf{A}^{(2)})(\phi^{(2)})^{-1} w_+, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^{(2)})(\phi^{(2)})^{-1} w_+ \rangle \, d\mathbf{z} \\
&\quad + \int\limits_{\overline{S_2}} |(\phi^{(2)})^{-1} w_+|^2 \, d\nu^{(2)}(\mathbf{z}) \\
&= m^{(+)}_{DD}[w_+, w_+], \quad w_+ \in \mathrm{Dom}\, m^{(+)}_{DD}.
\end{aligned}$$

По замыканию соотношения (3.30), (3.31) переносятся на замкнутые формы, что доказывает первое равенство в (3.29). Остальные соотношения проверяются аналогично (с использованием предложения 3.1 и свойств симметрии коэффициентов). •

Предложения 3.2 и 3.3 показывают, что *вопрос об абсолютной непрерывности спектра операторов* $M^{(1)}_{NN}$ *и* $M^{(1)}_{ND}$ *(соответственно,* $M^{(1)}_{DN}$ *и* $M^{(1)}_{DD}$*) сводится к вопросу об абсолютной непрерывности спектра оператора* $M^{(2)}_{NN}$ *(соответственно* $M^{(2)}_{DD}$*).*

3.7. В свою очередь, вопрос для операторов $M^{(2)}_{DD}$ и $M^{(2)}_{NN}$ будет сведен к изучению периодического оператора в полосе $\widehat{S}$. Определим подпространства

$$L_2^{(\pm)}(\widehat{S}) := \{u \in L_2(\widehat{S}) : u(z_1, -z_2) = \pm u(z_1, z_2), \text{ п. в. } \mathbf{z} \in \widehat{S}\}. \tag{3.32}$$

По аналогии с (3.3) определим операторы продолжения $\widehat{W}_\pm : L_2(S_2) \to L_2^{(\pm)}(\widehat{S})$,

$$(\widehat{W}_\pm u)(z_1, z_2) = \begin{cases} u(z_1, z_2)/\sqrt{2}, & 0 \leqslant z_2 < 2, \\ \pm u(z_1, -z_2)/\sqrt{2}, & -2 < z_2 < 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Операторы $\widehat{W}_\pm$ *унитарны*. Элементарно проверяется (ср. [SoW, лемма 7.1]) следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Пусть* $\widehat{W}_\pm : L_2(S_2) \to L_2^{(\pm)}(\widehat{S})$ *— операторы продолжения, определенные формулами* (3.33). *Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\widehat{W}_+(H^1(S_2) \cap C_0(\overline{S_2})) = \widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}}) \cap L_2^{(+)}(\widehat{S}),$$

$$\widehat{W}_-(H^1(S_2) \cap C_0^{(DD)}(\overline{S_2})) = \widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}}) \cap L_2^{(-)}(\widehat{S}).$$

Отметим, что предложение 3.4 согласуется с предложением 3.1 ввиду очевидных соотношений

$$H^1(\widehat{S}) \cap C_0(\overline{\widehat{S}}) \cap L_2^{(+)}(\widehat{S}) = \widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}}) \cap L_2^{(+)}(\widehat{S}),$$

$$H^1(\widehat{S}) \cap C_0^{(DD)}(\overline{\widehat{S}}) \cap L_2^{(-)}(\widehat{S}) = \widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}}) \cap L_2^{(-)}(\widehat{S}).$$

3.8. Продолжим коэффициенты оператора $M^{(2)}_{\lambda\lambda}$ с S_2 на $\widehat{S}$ следующим образом:

$$\widehat{\phi} := \sqrt{2}\widehat{W}_+\phi^{(2)}, \tag{3.34}$$

$$\widehat{\omega} := \sqrt{2}\widehat{W}_+\omega^{(2)}, \tag{3.35}$$

$$(\widehat{g}_0)_{jj} := \sqrt{2}\widehat{W}_+(g_0^{(2)})_{jj}, \quad j = 1, 2, \tag{3.36}$$

$$(\widehat{g}_0)_{12} = (\widehat{g}_0)_{21} := \sqrt{2}\widehat{W}_-(g_0^{(2)})_{12}, \tag{3.37}$$

$$\widehat{g} := \widehat{\omega}^2\widehat{g}_0, \tag{3.38}$$

$$\widehat{A}_1 := \sqrt{2}\widehat{W}_+A_1^{(2)}, \quad \widehat{A}_2 := \sqrt{2}\widehat{W}_-A_2^{(2)}. \tag{3.39}$$

Заряд $d\nu^{(2)}$ продолжим четным образом с „удвоением“ на линии $z_2 = 0$ (ср. построение заряда $d\nu^{(2)}$ по $d\nu^{(1)}$ в п. 3.3). Полученный заряд обозначим через $d\widehat{\nu}$.

Точно так же, как в п. 3.4, 3.5, можно проверить, что коэффициенты (3.34)–(3.39) и заряд $d\widehat{\nu}$ удовлетворяют тем же условиям в полосе $\widehat{S}$, что и коэффициенты (3.5)–(3.10) и заряд $d\nu^{(2)}$ в полосе S_2 (а также коэффициенты (2.1)–(2.6) в полосе S). Выпишем эти условия. При этом для дальнейшего (см. теорему 3.8) существенны условия симметрии для метрики. С другой стороны, некоторые из условий достаточно будет наложить в более слабой форме.

Все коэффициенты $\widehat{\phi}$, $\widehat{\omega}$, $\widehat{g}_0$, $\widehat{\mathbf{A}}$ γ_1-периодичны в полосе $\widehat{S}$. Матрица $\widehat{g}(\mathbf{z})$ в $\widehat{S}$ подчинена условиям

$$\begin{gathered}\widehat{g}_{jj}(z_1,-z_2) = \widehat{g}_{jj}(z_1,z_2), \quad j=1,2, \quad \mathbf{z}\in\widehat{S}, \\ \widehat{g}_{12}(z_1,-z_2) = \widehat{g}_{21}(z_1,-z_2) = -\widehat{g}_{12}(z_1,z_2) = -\widehat{g}_{21}(z_1,z_2), \quad \mathbf{z}\in\widehat{S},\end{gathered} \tag{3.40}$$

$$\widehat{g} = \widehat{\omega}^2\widehat{g}_0, \quad \det\widehat{g}_0(\mathbf{z}) = 1, \quad \widehat{\omega}(\mathbf{z}) := (\det\widehat{g}(\mathbf{z}))^{1/4}, \tag{3.41}$$

$$c_0^{(1)}\mathbf{1} \leqslant \widehat{g}_0(\mathbf{z}) \leqslant c_1^{(1)}\mathbf{1}, \quad \mathbf{z}\in\widehat{S}, \quad 0 < c_0^{(1)} \leqslant c_1^{(1)} < \infty, \tag{3.42}$$

$$0 < \omega_0 \leqslant \widehat{\omega}(\mathbf{z}) \leqslant \omega_1 < \infty, \quad \mathbf{z}\in\widehat{S}. \tag{3.43}$$

Постоянные в (3.42), (3.43) — те же, что и в (3.11), (3.12) (и в (2.7), (2.8)). Далее, из (3.13) и (3.35) видно, что $\widehat{\omega} \in \widetilde{H}^1(\widehat{\Omega})$. С учетом четности (по z_2) функции $\widehat{\omega}$ отсюда следует, что

$$\widehat{\omega} \in \widehat{H}^1(\widehat{\Omega}). \tag{3.44}$$

Функция $\widehat{\omega}$ подчинена также следующему условию:

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla\widehat{\omega}|^2|\widehat{u}|^2\,d\mathbf{z} \leqslant \varepsilon \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla\widehat{u}|^2\,d\mathbf{z} + C(\varepsilon)\int\limits_{\widehat{\Omega}} |\widehat{u}|^2\,d\mathbf{z}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad \widehat{u}\in\widehat{H}^1(\widehat{\Omega}). \tag{3.45}$$

С учетом (3.35) условие (3.45) вытекает из (3.14) с той же постоянной $C(\varepsilon) = C(\varepsilon;\omega,\Phi)$. При этом неравенство (3.45) выполнено *для всех* $\widehat{u} \in \widetilde{H}^1(\widehat{\Omega})$. Однако в дальнейшем мы можем ограничиться формально более свободным условием (3.45). (В действительности, в силу леммы 1.5 из [Sh3] условия (3.45) на классах $\widehat{H}^1(\widehat{\Omega})$ и $\widetilde{H}^1(\widehat{\Omega})$ эквивалентны.)

Функция $\widehat{\phi}$ подчинена следующим условиям:

$$\widehat{\phi}(\mathbf{z}) > 0, \quad \text{п. в. } \mathbf{z}\in\widehat{S}, \tag{3.46}$$

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}} |\widehat{\phi}|^2|\widehat{u}|^2\,d\mathbf{z} \leqslant \varepsilon \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla\widehat{u}|^2\,d\mathbf{z} + C(\varepsilon)\int\limits_{\widehat{\Omega}} |\widehat{u}|^2\,d\mathbf{z}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad \widehat{u}\in\widehat{H}^1(\widehat{\Omega}). \tag{3.47}$$

Вектор-функция $\widehat{\mathbf{A}}$ удовлетворяет условию

$$\int_{\widehat{\Omega}} |\widehat{\mathbf{A}}|^2 l_m^\rho(|\widehat{\mathbf{A}}|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\widehat{\mathbf{A}}|)\,d\mathbf{z} < \infty, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho > 1. \tag{3.48}$$

Числа m и ρ в (3.48) — те же, что в (3.15), (2.14), (1.18).

Заряд $d\widehat{\nu}$ — γ_1-периодический борелевский заряд в $\overline{\widehat{S}}$ локально-конечной вариации. В $L_2(\widehat{S})$ рассмотрим квадратичную форму

$$\widehat{m}_+[\widehat{u},\widehat{u}] := \int_{\widehat{S}} |\nabla \widehat{u}|^2\,d\mathbf{z} + \int_{\overline{\widehat{S}}} |\widehat{u}|^2\,d\widehat{\nu}_+, \quad \widehat{u} \in \widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}}). \tag{3.49}$$

Заряд $d\widehat{\nu}$ подчинен следующим условиям.

($\widehat{\mathrm{i}}$) *Форма* (3.49) *допускает замыкание в* $L_2(\widehat{S})$.

($\widehat{\mathrm{ii}}$) *При некотором* $\tau < 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\overline{\widehat{S}}} |\widehat{u}|^2\,d\widehat{\nu}_- \leqslant \tau\biggl(\int_{\widehat{S}} \langle \widehat{g}\nabla\widehat{u}, \nabla\widehat{u}\rangle\,d\mathbf{z} + \int_{\overline{\widehat{S}}} |\widehat{u}|^2\,d\widehat{\nu}_+\biggr) + \widehat{C}\int_{\widehat{S}} |\widehat{u}|^2\,d\mathbf{z},$$
$$\widehat{u} \in \widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}}), \quad \tau < 1. \tag{3.50}$$

($\widehat{\mathrm{iii}}$) *При любом* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\overline{\widehat{\Omega}}} |\widehat{u}|^2\,|d\widehat{\nu}| \leqslant \varepsilon\biggl(\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla\widehat{u}|^2\,d\mathbf{z} + \max_{\mathbf{z}\in\overline{\widehat{\Omega}}} |\widehat{u}(\mathbf{z})|^2\biggr) + C(\varepsilon)\int_{\widehat{\Omega}} |\widehat{u}|^2\,d\mathbf{z},$$
$$0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad \widehat{u} \in \widehat{H}^1(\widehat{\Omega}) \cap \widehat{C}(\overline{\widehat{\Omega}}). \tag{3.51}$$

Число τ в (3.50) — то же, что и в (3.20), (2.20), (1.23), а $\widehat{C} = \widehat{C}(\tau, g, d\nu, \Phi)$. В (3.51) $C(\varepsilon) = C(\varepsilon; d\nu, \Phi)$. В действительности, из условий (i$''$)–(iii$''$) (см. п. 3.5) вытекают более сильные ограничения на $d\widehat{\nu}$. Именно, форма вида (3.49), рассматриваемая на области $H^1(\widehat{S}) \cap C_0(\overline{\widehat{S}})$, допускает замыкание в $L_2(\widehat{S})$; неравенство (3.50) выполнено на классе $H^1(\widehat{S}) \cap C_0(\overline{\widehat{S}})$, а неравенство (3.51) — на классе $\widetilde{H}^1(\widehat{\Omega}) \cap \widetilde{C}(\overline{\widehat{\Omega}})$. Однако в дальнейшем (см. теорему 3.8) мы в состоянии ограничиться лишь условиями ($\widehat{\mathrm{i}}$)–($\widehat{\mathrm{iii}}$).

3.9. В $L_2(\widehat{S})$ рассмотрим квадратичную форму

$$\widehat{m}[\widehat{w},\widehat{w}] := \int_{\widehat{S}} \langle \widehat{g}(\mathbf{D} - \widehat{\mathbf{A}})\widehat{\phi}^{-1}\widehat{w}, (\mathbf{D} - \widehat{\mathbf{A}})\widehat{\phi}^{-1}\widehat{w}\rangle\,d\mathbf{z} + \int_{\overline{\widehat{S}}} |\widehat{\phi}^{-1}\widehat{w}|^2\,d\widehat{\nu}(\mathbf{z}), \tag{3.52}$$

$$\operatorname{Dom}\widehat{m} := \{\widehat{w} = \widehat{\phi}\widehat{u} : \widehat{u} \in \widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}})\}. \tag{3.53}$$

По аналогии с предложением 1.4, легко установить следующее утверждение.

Предложение 3.5. *Пусть* $\widehat{S}$ *— полоса* (3.1). *Пусть* $\widehat{g}(\mathrm{z})$ *— измеримая* γ_1-*периодическая* (2×2)-*матрица-функция в* $\widehat{S}$, *удовлетворяющая условиям* (3.41)–(3.43). *Пусть вещественная* γ_1-*периодическая функция* $\widehat{\phi}(\mathrm{z})$ *удовлетворяет условиям* (3.46), (3.47), *а* γ_1-*периодическая вектор-функция* $\widehat{\mathbf{A}}(\mathrm{z})$ *подчинена условию* (3.48). *Пусть вещественный* γ_1-*периодический борелевский заряд* $d\widehat{\nu}$ *локально-конечной вариации в* $\overline{\widehat{S}}$ *удовлетворяет условиям* $(\widehat{\mathrm{i}})$, $(\widehat{\mathrm{ii}})$. *Тогда форма* $\widehat{m}$, *определенная соотношениями* (3.52), (3.53), *полуограничена снизу и допускает замыкание в* $L_2(\widehat{S})$.

Замкнутая форма $\overline{\widehat{m}}$ порождает самосопряженный в $L_2(\widehat{S})$ оператор $\widehat{M}$, который интерпретируется как *оператор Шрёдингера в* $\widehat{S}$ *с периодическими граничными условиями.*

3.10. По аналогии с предложением 3.2 (ср. также [SoW, лемма 7.2]), с учетом свойств симметрии коэффициентов, легко установить следующее утверждение.

Предложение 3.6. *Подпространства* $L_2^{(\pm)}(\widehat{S})$, *определенные в* (3.32), *являются инвариантными подпространствами оператора* $\widehat{M}$.

Обозначим части оператора $\widehat{M}$, действующие в подпространствах $L_2^{(\pm)}(\widehat{S})$, через $\widehat{M}^{(\pm)}$. По аналогии с предложением 3.3 (ср. также [SoW, лемма 7.3]), используя предложение 3.4, нетрудно проверить следующее утверждение.

Предложение 3.7. *Пусть* $\widehat{W}_\pm : L_2(S_2) \to L_2^{(\pm)}(\widehat{S})$ *— унитарные операторы, определенные в* (3.33). *Тогда*

$$\widehat{W}_+ M_{NN}^{(2)} \widehat{W}_+^* = \widehat{M}^{(+)}, \quad \widehat{W}_- M_{DD}^{(2)} \widehat{W}_-^* = \widehat{M}^{(-)}.$$

Предложения 3.6 и 3.7 показывают, что *вопрос об абсолютной непрерывности спектра операторов* $M_{DD}^{(2)}$ *и* $M_{NN}^{(2)}$ *сводится к вопросу об абсолютной непрерывности спектра оператора* $\widehat{M}$. С учетом сказанного в конце п. 3.6 *теорема* 2.1 *вытекает из следующей теоремы.*

Теорема 3.8. *Пусть* $\widehat{S}$ *— полоса* (3.1). *Пусть измеримая вещественная* γ_1-*периодическая* (2×2)-*матрица-функция* $\widehat{g}(\mathrm{z})$ *подчинена условиям* (3.40)–(3.45). *Пусть вещественная* γ_1-*периодическая функция* $\widehat{\phi}(\mathrm{z})$ *удовлетворяет условиям* (3.46), (3.47), *а* γ_1-*периодическая вектор-функция* $\widehat{\mathbf{A}}(\mathrm{z})$ *подчинена условию* (3.48). *Пусть вещественный* γ_1-*периодический борелевский заряд* $d\widehat{\nu}$ *локально-конечной вариации в* $\overline{\widehat{S}}$ *удовлетворяет условиям* $(\widehat{\mathrm{i}})$–$(\widehat{\mathrm{iii}})$. *Пусть квадратичная форма* $\widehat{m}$ *определена соотношениями* (3.52), (3.53), *а форма* $\overline{\widehat{m}}$ *есть замыкание формы* $\widehat{m}$ *в* $L_2(\widehat{S})$. *Пусть самосопряженный оператор* $\widehat{M}$ *в* $L_2(\widehat{S})$ *порожден формой* $\overline{\widehat{m}}$. *Тогда спектр оператора* $\widehat{M}$ *абсолютно непрерывен.*

Отметим, что существенным предположением теоремы 3.8 являются свойства симметрии (3.40) для метрики $\widehat{g}(\mathrm{z})$.

§4. Третья редукция. Сведение к периодическому оператору со скалярной метрикой

4.1. Следующий шаг — свести оператор $\widehat{M}$ с периодическими граничными условиями (с метрикой $\widehat{g}$) к оператору со скалярной метрикой. Для этого мы применим теорему о глобальных изотермических координатах в $\mathbb{R}^2$.

Продолжим матрицу $\widehat{g}_0$ на все $\mathbb{R}^2$ периодически по z_2 (относительно решетки γ_4^*). Для продолженной матрицы используем то же обозначение $\widehat{g}_0$. С учетом γ_1-периодичности, матрица $\widehat{g}_0(\mathbf{z})$ периодична в $\mathbb{R}^2$ относительно решетки $\Gamma := \Gamma_4$. Из (3.42) следует, что

$$c_0^{(1)}\mathbf{1} \leqslant \widehat{g}_0(\mathbf{z}) \leqslant c_1^{(1)}\mathbf{1}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < c_0^{(1)} \leqslant c_1^{(1)} < \infty. \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $\widehat{g}_0(\mathbf{z})$ — Γ*-периодическая измеримая* (2×2)*-матрица-функция в* $\mathbb{R}^2$*, удовлетворяющая условию* (4.1). *Пусть, кроме того,* $\det \widehat{g}_0(\mathbf{z}) = 1$. *Тогда существует единственное взаимно-однозначное отображение* $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *со следующими свойствами.*

1°. *Для некоторого* $p > 2$ *справедливы включения*

$$\Psi \in W^1_{p,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad \Psi^{-1} \in W^1_{p,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad p > 2. \tag{4.2}$$

2°. *Для некоторого базиса* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *в* $\mathbb{R}^2$ *выполнено*

$$\Psi(\mathbf{z} + n_1\mathbf{e}_1 + 4n_2\mathbf{e}_2) = \Psi(\mathbf{z}) + n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2. \tag{4.3}$$

3°. *Справедливы соотношения* $\Psi(0) = 0$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$,

$$\det \Psi'(\mathbf{z}) > 0, \quad \text{п. в.} \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2. \tag{4.4}$$

4°. *Выполнено тождество*

$$(\det \Psi'(\mathbf{z}))^{-1}\Psi'(\mathbf{z})\widehat{g}_0(\mathbf{z})(\Psi'(\mathbf{z}))^t = \mathbf{1}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2. \tag{4.5}$$

Теорема 4.1 показывает, что при преобразовании $\xi = \Psi(\mathbf{z})$ решетка Γ переходит в решетку $\Gamma_* := \{n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{a}_2, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Комментарий. 1) Хорошо известно (см., например, [V, теоремы 2.2–2.5; ABe]), что существует *локальное* отображение, удовлетворяющее (4.5), т.е. превращающее метрику $\widehat{g}_0$ в единичную. Соответствующие функции $\psi_1(\mathbf{z})$, $\psi_2(\mathbf{z})$ (где $\Psi(\mathbf{z}) = \psi_1(\mathbf{z})\mathbf{e}_1 + \psi_2(\mathbf{z})\mathbf{e}_2$) являются решениями уравнений Бельтрами. *В периодическом случае* локальные преобразования могут быть „склеены“ в глобальное отображение Ψ, сохраняющее периодичность (свойство 2°), но меняющее решетку. Соображения, позволяющие провести такую „склейку“, имеют топологический характер. Соответствующие аргументы приведены в

[KuL]. Свойства гладкости отображения Ψ определяются локальными свойствами решений уравнений Бельтрами в зависимости от гладкости матрицы $\widehat{g}_0$. Свойство 1° отображения Ψ при условии (4.1) на $\widehat{g}_0$ гарантировано теоремой 5 из [ABe]. Объединение этих соображений обеспечивает существование отображения Ψ со свойствами 1°, 2°, 4°, что было отмечено в [Sh2, теорема 6.3]. Возможность удовлетворить условию 3° и единственность отображения Ψ при этом дополнительном условии следует из теоремы 6 в [ABe]. 2) В работе [ShaSo] указан другой (чисто аналитический) путь доказательства теоремы 4.1, который полностью основан на теореме 6 в [ABe].

Предложение 4.2. *Пусть матрица* $\widehat{g}_0(\mathbf{z})$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4.1 *и, кроме того, условию симметрии* (3.40). *Пусть* $\Psi(\mathbf{z}) = \psi_1(z_1, z_2)\mathbf{e}_1 + \psi_2(z_1, z_2)\mathbf{e}_2$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$, *— отображение, определенное в теореме* 4.1. *Тогда*

$$\psi_1(z_1, -z_2) = \psi_1(z_1, z_2), \quad \psi_2(z_1, -z_2) = -\psi_2(z_1, z_2), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, \tag{4.6}$$

$$\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 0. \tag{4.7}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\widetilde{\Psi}(z_1, z_2) := \psi_1(z_1, -z_2)\mathbf{e}_1 - \psi_2(z_1, -z_2)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2. \tag{4.8}$$

Проверим, что $\widetilde{\Psi}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.1. Очевидно, $\widetilde{\Psi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — взаимно-однозначное отображение, и выполнено свойство 1°. Далее, из (4.3), равенства $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$ и (4.8) вытекает соотношение

$$\widetilde{\Psi}(\mathbf{z} + n_1\mathbf{e}_1 + 4n_2\mathbf{e}_2) = \widetilde{\Psi}(\mathbf{z}) + n_1\mathbf{e}_1 + n_2\widetilde{\mathbf{a}}_2, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2,$$

где $\widetilde{\mathbf{a}}_2 := -\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2$. Следовательно, $\widetilde{\Psi}$ удовлетворяет свойству 2°, причем $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{e}_1$. Из (4.8) и условия $\Psi(0) = 0$ вытекает, что $\widetilde{\Psi}(0) = 0$. В силу (4.4) и соотношения $\det \widetilde{\Psi}'(z_1, z_2) = \det \Psi'(z_1, -z_2)$ выполнено $\det \widetilde{\Psi}'(\mathbf{z}) > 0$ при почти всех $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. Наконец, используя (4.5), (4.8) и свойство симметрии (3.40) для матрицы $\widehat{g}_0$, нетрудно проверить, что $\widetilde{\Psi}$ удовлетворяет условию 4°.

В силу *единственности* отображения Ψ имеем $\widetilde{\Psi} = \Psi$, т.е. выполнено (4.6). Из (4.3) и условия $\Psi(0) = 0$ получаем $\psi_1(0, 4) = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1 \rangle$, $\psi_1(0, -4) = -\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1 \rangle$, а из (4.6) следует, что $\psi_1(0, 4) = \psi_1(0, -4)$. Отсюда вытекает равенство (4.7). •

В силу (4.7) $\mathbf{a}_2 = \varkappa \mathbf{e}_2$, $\varkappa \neq 0$, а тогда Γ_* — *ортогональная* решетка с базисом $\mathbf{e}_1$, $\varkappa \mathbf{e}_2$.

Из (4.5) сразу вытекает следующее утверждение.

Предложение 4.3. *В условиях теоремы* 4.1 *справедливо представление*

$$\Psi'(\mathbf{z}) = (\det \Psi'(\mathbf{z}))^{1/2} W(\mathbf{z}) (\widehat{g}_0(\mathbf{z}))^{-1/2},$$

где $W(\mathbf{z})$ *— вещественная ортогональная матрица.*

Нам понадобится также следующее утверждение (см. [ABe, лемма 10]).

Предложение 4.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть* $F(\mathbf{z})$ — *измеримая функция в* $\mathbb{R}^2$, *причем* $\nabla F \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ *с некоторым* $q \geqslant 2$. *Тогда функция* $f := F \circ \Psi^{-1}$ *имеет обобщенные производные, вычисляемые по обычному цепному правилу*

$$(\nabla_{\xi} f)(\xi) = (\Psi'(\mathbf{z})^t)^{-1}(\nabla F)(\mathbf{z}), \quad \xi = \Psi(\mathbf{z}).$$

Кроме того,

$$\nabla_{\xi} f \in L_{q_*,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad q_* = pq(p+q-2)^{-1}.$$

Если $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ — *ограниченная область, то выполнена оценка*

$$\left(\int\limits_{\Psi(\mathcal{D})} |\nabla_{\xi} f|^{q_*}\, d\xi\right)^{1/q_*} \leqslant C\left(\int\limits_{\mathcal{D}} |\nabla F|^q\, d\mathbf{z}\right)^{1/q},$$

с постоянной $C = C(\mathcal{D}, \Psi, q)$, *не зависящей от* F.

4.2. Положим

$$\Pi_* := \Psi(\widehat{S}), \tag{4.9}$$

где $\widehat{S}$ — полоса (3.1), а Ψ — отображение, определенное в теореме 4.1. Из (4.3) и равенства $\mathrm{a}_1 = \mathrm{e}_1$ (свойства 2° и 3° из теоремы 4.1) следует, что область Π_* γ_1-периодична:

$$\xi \in \Pi_* \;\Rightarrow\; \xi + n\mathrm{e}_1 \in \Pi_*, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Введем обозначения $\Sigma_*^0 := \Psi(\Xi_{-2})$, $\Sigma_*^1 := \Psi(\Xi_2)$. (Здесь использованы обозначения, введенные в п. 1.1.) Граница $\partial\Pi_*$ состоит из двух γ_1-периодических кривых: $\partial\Pi_* = \Sigma_*^0 \cup \Sigma_*^1$, сдвинутых одна относительно другой на вектор $\mathrm{a}_2 = \varkappa\mathrm{e}_2$, т.е., $\Sigma_*^1 = \Sigma_*^0 + \varkappa\mathrm{e}_2$. Ясно, что Π_* — фундаментальная область в $\mathbb{R}^2$ относительно одномерной решетки $\gamma_* := \gamma^*_{|\varkappa|}$. Положим $\mathcal{O}_* := \Psi(\widehat{\Omega})$. Тогда $\mathcal{O}_*$ — фундаментальная область в $\mathbb{R}^2$ относительно решетки Γ_*.

Через $\widehat{H}^s(\Pi_*)$ обозначим подпространство функций $f \in H^s(\Pi_*)$, для которых γ_*-периодическое продолжение принадлежит $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Класс $\widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$ состоит из непрерывных в $\overline{\Pi_*}$ функций $u(\xi)$ таких, что $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Pi_*} \cap B_R$ при каком-либо $R < \infty$, и допускающих продолжение до непрерывных γ_*-периодических функций в $\mathbb{R}^2$. Через $\widehat{H}^s(\mathcal{O}_*)$ обозначим подпространство в $H^s(\mathcal{O}_*)$, состоящее из функций, допускающих продолжение до Γ_*-периодических функций класса $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Класс $\widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*})$ определяется как множество сужений на $\overline{\mathcal{O}_*}$ Γ_*-периодических непрерывных в $\mathbb{R}^2$ функций.

Предложение 4.5. *Отображение* $F \mapsto F \circ \Psi^{-1}$ *переводит* $H^1(\widehat{S})$ *на* $H^1(\Pi_*)$, $\widehat{H}^1(\widehat{S})$ *на* $\widehat{H}^1(\Pi_*)$, $\widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}})$ *на* $\widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$, $H^1(\widehat{\Omega})$ *на* $H^1(\mathcal{O}_*)$, $\widehat{H}^1(\widehat{\Omega})$ *на* $\widehat{H}^1(\mathcal{O}_*)$, $\widehat{H}^1(\widehat{\Omega}) \cap \widehat{C}(\overline{\widehat{\Omega}})$ *на* $\widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*})$. *При этом выполнены неравенства*

$$C_1 \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla F|^2 \, d\mathbf{z} \leqslant \int\limits_{\mathcal{O}_*} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant C_2 \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla F|^2 \, d\mathbf{z}, \quad F \in H^1(\widehat{\Omega}), \quad f = F \circ \Psi^{-1}; \tag{4.10}$$

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}} |F|^2 \, d\mathbf{z} \leqslant \varepsilon \int\limits_{\mathcal{O}_*} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 \, d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon) \int\limits_{\mathcal{O}_*} |f|^2 \, d\boldsymbol{\xi}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad f \in H^1(\mathcal{O}_*), \quad F = f \circ \Psi; \tag{4.11}$$

$$\int\limits_{\mathcal{O}_*} |f|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \varepsilon \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla F|^2 \, d\mathbf{z} + C(\varepsilon) \int\limits_{\widehat{\Omega}} |F|^2 \, d\mathbf{z}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad F \in H^1(\widehat{\Omega}), \quad f = F \circ \Psi^{-1}; \tag{4.12}$$

$$C_1 \int\limits_{\widehat{S}} |\nabla F|^2 \, d\mathbf{z} \leqslant \int\limits_{\Pi_*} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant C_2 \int\limits_{\widehat{S}} |\nabla F|^2 \, d\mathbf{z}, \quad F \in H^1(\widehat{S}), \quad f = F \circ \Psi^{-1}; \tag{4.13}$$

$$\int\limits_{\widehat{S}} |F|^2 \, d\mathbf{z} \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Pi_*} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}} f|^2 \, d\boldsymbol{\xi} + C(\varepsilon) \int\limits_{\Pi_*} |f|^2 \, d\boldsymbol{\xi}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad f \in H^1(\Pi_*), \quad F = f \circ \Psi; \tag{4.14}$$

$$\int\limits_{\Pi_*} |f|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \varepsilon \int\limits_{\widehat{S}} |\nabla F|^2 \, d\mathbf{z} + C(\varepsilon) \int\limits_{\widehat{S}} |F|^2 \, d\mathbf{z}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad F \in H^1(\widehat{S}), \quad f = F \circ \Psi^{-1}. \tag{4.15}$$

Доказательство. Пусть $F \in H^1(\widehat{\Omega})$. Тогда в силу предложения 4.4 (при $q = 2$) $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(F \circ \Psi^{-1}) \in L_2(\mathcal{O}_*)$ и

$$\int\limits_{\mathcal{O}_*} |\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(F \circ \Psi^{-1})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant C_2 \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla F|^2 \, d\mathbf{z}, \quad F \in H^1(\widehat{\Omega}), \tag{4.16}$$

что доказывает второе неравенство в (4.10). В силу (4.2) $\det \Psi' \in L_{p/2}(\widehat{\Omega})$, $p > 2$. На основании предложения 1.3 имеем

$$\int\limits_{\mathcal{O}_*} |F \circ \Psi^{-1}|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{\widehat{\Omega}} |F(\mathbf{z})|^2 \det \Psi'(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla F|^2 \, d\mathbf{z} + C(\varepsilon, \Psi) \int\limits_{\widehat{\Omega}} |F|^2 \, d\mathbf{z}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad F \in H^1(\widehat{\Omega}), \tag{4.17}$$

что доказывает (4.12). Соотношения (4.16), (4.17) показывают, что $F\circ\Psi^{-1}\in H^1(\mathcal{O}_*)$.

Обратно, пусть $f\in H^1(\mathcal{O}_*)$. В силу нижней оценки (4.1) и соотношения (4.5) имеем

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}}|\nabla F|^2\,d\mathbf{z}\leqslant (c_0^{(1)})^{-1}\int\limits_{\widehat{\Omega}}\langle\widehat{g}_0\nabla F,\nabla F\rangle\,d\mathbf{z}=(c_0^{(1)})^{-1}\int\limits_{\mathcal{O}_*}|\nabla_{\boldsymbol{\xi}}f|^2\,d\boldsymbol{\xi},\quad f\in H^1(\mathcal{O}_*),\quad F=f\circ\Psi. \tag{4.18}$$

Тем самым $\nabla F\in L_2(\widehat{\Omega})$, а тогда $F=f\circ\Psi\in H^1(\widehat{\Omega})$ (см., например, [M, п. 1.1.11]). Из (4.18) вытекает нижняя оценка в (4.10) с $C_1=c_0^{(1)}$. Далее, из (4.17) и из условий (4.1), (4.4), на основании леммы 1.2 из [Sh3] (ср. (1.27)), получаем

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}}|F|^2\,d\mathbf{z}\leqslant\varepsilon\int\limits_{\widehat{\Omega}}\langle\widehat{g}_0\nabla F,\nabla F\rangle\,d\mathbf{z}+C(\varepsilon,\widehat{g}_0,\Psi)\int\limits_{\widehat{\Omega}}|F|^2\det\Psi'\,d\mathbf{z},\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\quad F\in H^1(\widehat{\Omega}). \tag{4.19}$$

Выполняя в правой части (4.19) замену $\boldsymbol{\xi}=\Psi(\mathbf{z})$ и учитывая (4.5), получаем оценку (4.11).

Мы убедились, что отображение $F\mapsto F\circ\Psi^{-1}$ переводит $H^1(\widehat{\Omega})$ на $H^1(\mathcal{O}_*)$. Аналогично проверяется, что это отображение переводит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ на $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть теперь $F\in H^1(\widehat{S})$. В силу свойства (4.3) и равенства $\mathbf{a}_1=\mathbf{e}_1$ неравенства (4.12), (4.16) справедливы (с одними и теми же постоянными) и для интегралов по сдвинутым ячейкам $\mathcal{O}_*+n\mathbf{e}_1$ (в левой части) и $\widehat{\Omega}+n\mathbf{e}_1$ (в правой части), $n\in\mathbb{Z}$. Суммируя по $n\in\mathbb{Z}$, выясняем, что $F\circ\Psi^{-1}\in H^1(\Pi_*)$ и выполнены верхняя оценка (4.13) и оценка (4.15). Точно так же проверяется (на основании (4.11), (4.18)), что для $f\in H^1(\Pi_*)$ справедливо включение $f\circ\Psi\in H^1(\widehat{S})$ и выполнены нижняя оценка (4.13) и оценка (4.14). Следовательно, отображение $F\mapsto F\circ\Psi^{-1}$ переводит $H^1(\widehat{S})$ на $H^1(\Pi_*)$.

Если $F\in\widehat{H}^1(\widehat{S})$, то γ_4^*-периодическое продолжение $\widehat{F}$ функции F принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. В силу свойств отображения Ψ функция $\widehat{F}\circ\Psi^{-1}$ является γ_*-периодическим продолжением функции $F\circ\Psi^{-1}$. По уже доказанному $\widehat{F}\circ\Psi^{-1}\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, $F\circ\Psi^{-1}\in\widehat{H}^1(\Pi_*)$. Если же $F\in\widehat{H}^1(\widehat{S})\cap\widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}})$, то $\operatorname{supp}(F\circ\Psi^{-1})\subset\overline{\overline{\Pi}}\cap B_R$ при каком-либо $R<\infty$. Кроме того, $\widehat{F}$ — непрерывная функция в $\mathbb{R}^2$. Учтем, что из (4.2) и стандартной теоремы вложения вытекает, что Ψ^{-1} непрерывно в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, $\widehat{F}\circ\Psi^{-1}$ — непрерывная функция. Тогда $F\circ\Psi^{-1}\in\widehat{H}^1(\Pi_*)\cap\widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$. Аналогично проверяется, что из

$f \in \widehat{H}^1(\Pi_*)$ вытекает включение $f \circ \Psi \in \widehat{H}^1(\widehat{S})$, а из $f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$ вытекает включение $f \circ \Psi \in \widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}})$. Таким образом, отображение $F \mapsto F \circ \Psi^{-1}$ переводит $\widehat{H}^1(\widehat{S})$ на $\widehat{H}^1(\Pi_*)$, а $\widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}})$ на $\widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$.

Наконец, если $F \in \widehat{H}^1(\widehat{\Omega})$, то Γ-периодическое продолжение $\widetilde{F}$ функции F принадлежит $H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)$. В силу свойств отображения Ψ функция $\widetilde{F} \circ \Psi^{-1}$ является Γ_*-периодическим продолжением функции $F \circ \Psi^{-1}$. При этом $\widetilde{F} \circ \Psi^{-1} \in H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, $F \circ \Psi^{-1} \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*)$. Если же $F \in \widehat{H}^1(\widehat{\Omega}) \cap \widehat{C}(\overline{\widehat{\Omega}})$, то $\widetilde{F}$ — непрерывная функция в $\mathbb{R}^2$. Тогда и $\widetilde{F} \circ \Psi^{-1}$ непрерывна в $\mathbb{R}^2$, а потому $F \circ \Psi^{-1} \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*})$. Аналогично проверяется, что $f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*)$ влечет $f \circ \Psi \in \widehat{H}^1(\widehat{\Omega})$, а $f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*})$ влечет $f \circ \Psi \in \widehat{H}^1(\widehat{\Omega}) \cap \widehat{C}(\overline{\widehat{\Omega}})$. Таким образом, отображение $F \mapsto F \circ \Psi^{-1}$ переводит $\widehat{H}^1(\widehat{\Omega})$ на $\widehat{H}^1(\mathcal{O}_*)$, а $\widehat{H}^1(\widehat{\Omega}) \cap \widehat{C}(\overline{\widehat{\Omega}})$ на $\widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*})$. •

4.3. Пусть коэффициенты $\widehat{g}$, $\widehat{\phi}$, $\widehat{\mathbf{A}}$ и заряд $d\widehat{\nu}$ подчинены условиям теоремы 3.8. Продолжим матрицу $\widehat{g}_0$ на $\mathbb{R}^2$ периодически относительно решетки γ_4^*. Пусть Ψ — отображение, определенное по $\widehat{g}_0$ в теореме 4.1, а область Π_* определена в (4.9). Определим в области Π_* следующие функции:

$$\omega_*(\xi) := \widehat{\omega}(\mathbf{z}), \tag{4.20}$$

$$\phi_*(\xi) := |\det \Psi'(\mathbf{z})|^{-1/2} \widehat{\phi}(\mathbf{z}), \tag{4.21}$$

$$\mathbf{A}_*(\xi) := (\Psi'(\mathbf{z})^t)^{-1} \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z}), \tag{4.22}$$

и заряд

$$d\nu_*(\xi) := d\widehat{\nu}(\mathbf{z}), \tag{4.23}$$

где $\xi = \Psi(\mathbf{z})$. Из γ_1-периодичности коэффициентов $\widehat{\omega}$, $\widehat{\phi}$, $\widehat{\mathbf{A}}$ и из свойства (4.3) вместе с равенством $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$ вытекает, что коэффициенты (4.20)–(4.22) γ_1-периодичны в Π_*. Из (3.43) и (4.20) следует, что

$$0 < \omega_0 \leqslant \omega_*(\xi) \leqslant \omega_1 < \infty, \quad \xi \in \Pi_*. \tag{4.24}$$

Из (3.44), (4.20) и предложения 4.5 следует, что

$$\omega_* \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*). \tag{4.25}$$

Пусть $f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*)$. С учетом (4.5), (4.20) и верхней оценки (3.42) получаем

$$\int\limits_{\mathcal{O}_*} |\nabla_\xi \omega_*|^2 |f|^2 \, d\xi = \int\limits_{\widehat{\Omega}} \langle \widehat{g}_0(\mathbf{z}) \nabla \widehat{\omega}, \nabla \widehat{\omega} \rangle |f(\Psi(\mathbf{z}))|^2 \, d\mathbf{z} \leqslant c_1^{(1)} \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla \widehat{\omega}|^2 |f \circ \Psi|^2 \, d\mathbf{z}. \tag{4.26}$$

В силу предложения 4.5 $f \circ \Psi \in \widehat{H}^1(\widehat{\Omega})$. Тогда соотношения (3.45) и (4.26) приводят к неравенству

$$\int\limits_{\mathcal{O}_*} |\nabla_\xi \omega_*|^2 |f|^2 \, d\xi \leqslant \varepsilon \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\nabla (f \circ \Psi)|^2 \, d\mathbf{z} + C(\varepsilon) \int\limits_{\widehat{\Omega}} |f \circ \Psi|^2 \, d\mathbf{z}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*). \tag{4.27}$$

С учетом (4.10), (4.11) соотношение (4.27) влечет условие

$$\int_{\mathcal{O}_*} |\nabla_\xi \omega_*|^2 |f|^2\, d\xi \leqslant \varepsilon \int_{\mathcal{O}_*} |\nabla_\xi f|^2\, d\xi + C(\varepsilon) \int_{\mathcal{O}_*} |f|^2\, d\xi, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*). \tag{4.28}$$

Из (4.21), условия (3.46) и свойств отображения Ψ вытекает условие

$$\phi_*(\xi) > 0, \quad \text{п. в.} \quad \xi \in \Pi_*. \tag{4.29}$$

Пусть $f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*)$. В силу предложения 4.5, $f \circ \Psi \in \widehat{H}^1(\widehat{\Omega})$. Из (3.47) и (4.21) вытекает соотношение

$$\int_{\mathcal{O}_*} |\phi_*|^2 |f|^2\, d\xi = \int_{\widehat{\Omega}} |\widehat{\phi}|^2 |f\circ\Psi|^2\, dz \leqslant \varepsilon \int_{\widehat{\Omega}} |\nabla(f\circ\Psi)|^2\, dz + C(\varepsilon) \int_{\widehat{\Omega}} |f\circ\Psi|^2\, dz, \ 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Отсюда, учитывая нижнее неравенство (4.10) и неравенство (4.11), приходим к условию

$$\int_{\mathcal{O}_*} |\phi_*|^2 |f|^2\, d\xi \leqslant \varepsilon \int_{\mathcal{O}_*} |\nabla_\xi f|^2\, d\xi + C(\varepsilon) \int_{\mathcal{O}_*} |f|^2\, d\xi, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*). \tag{4.30}$$

4.4. Проверим (ср. [Sh3, лемма 7.4]), что для $\mathbf{A}_*$ выполнен аналог условия (3.48). Положим $\varphi(\xi) := (\det \Psi'(\mathbf{z}))^{-1/2}$, $\mathbf{z} = \Psi^{-1}(\xi)$. В силу (4.22), предложения 4.3 и верхнего неравенства (3.42) получаем

$$|\mathbf{A}_*(\xi)| = (\det \Psi'(\mathbf{z}))^{-1/2} |\widehat{g}_0^{1/2}(\mathbf{z}) \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})| \leqslant (c_1^{(1)})^{1/2} \varphi(\xi) |\widehat{\mathbf{A}}(\Psi^{-1}(\xi))|.$$

Отсюда, с учетом (2.13) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}_*} |\mathbf{A}_*|^2 l_m^\rho(|\mathbf{A}_*|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\mathbf{A}_*|)\, d\xi \\
&\leqslant c \int_{\mathcal{O}_*} \varphi^2(\xi) |\widehat{\mathbf{A}}(\Psi^{-1}(\xi))|^2 l_m^\rho(\varphi(\xi)|\widehat{\mathbf{A}}(\Psi^{-1}(\xi))|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(\varphi(\xi)|\widehat{\mathbf{A}}(\Psi^{-1}(\xi))|)\, d\xi \\
&= c \int_{\widehat{\Omega}} |\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|^2 l_m^\rho(\widetilde{\varphi}(\mathbf{z})|\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(\widetilde{\varphi}(\mathbf{z})|\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|)\, d\mathbf{z}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Здесь введено обозначение $\widetilde{\varphi}(\mathbf{z}) = \varphi(\Psi(\mathbf{z})) = (\det \Psi'(\mathbf{z}))^{-1/2}$. В силу (4.2), $\varphi \in L_p(\mathcal{O}_*)$, $p > 2$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{\varphi} \in L_{p-2}(\widehat{\Omega})$, поскольку

$$\int_{\widehat{\Omega}} |\widetilde{\varphi}(\mathbf{z})|^{p-2}\, d\mathbf{z} = \int_{\mathcal{O}_*} |\varphi(\xi)|^{p-2} (\det \Psi'(\mathbf{z}))^{-1}\, d\xi = \int_{\mathcal{O}_*} |\varphi(\xi)|^p\, d\xi.$$

Фиксируем число $0 < \nu < p-2$. Имеем

$$\int\limits_{\widehat{\Omega}} |\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|^2 l_m^\rho(\widetilde{\varphi}(\mathbf{z})|\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(\widetilde{\varphi}(\mathbf{z}))|\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|)\, d\mathbf{z} = J_1 + J_2, \tag{4.32}$$

где член J_1 отвечает интегрированию по области $\{\mathbf{z} \in \widehat{\Omega} : |\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|^2 \leqslant (\widetilde{\varphi}(\mathbf{z}))^\nu\}$, а J_2 отвечает интегрированию по области $\{\mathbf{z} \in \widehat{\Omega} : |\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|^2 > (\widetilde{\varphi}(\mathbf{z}))^\nu\}$. Тогда

$$J_1 \leqslant \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\widetilde{\varphi}(\mathbf{z})|^\nu l_m^\rho((\widetilde{\varphi}(\mathbf{z}))^{1+\nu/2}) \prod_{j=1}^{m-1} l_j((\widetilde{\varphi}(\mathbf{z}))^{1+\nu/2})\, d\mathbf{z} < \infty, \tag{4.33}$$

поскольку $\widetilde{\varphi} \in L_{p-2}(\widehat{\Omega})$, а $\nu < p-2$. В силу условия (3.48) имеем

$$\begin{aligned} J_2 &\leqslant \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|^2 l_m^\rho(|\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|^{1+2/\nu}) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})|^{1+2/\nu})\, d\mathbf{z} \\ &\leqslant c(\nu) \int\limits_{\widehat{\Omega}} |\widehat{\mathbf{A}}|^2 l_m^\rho(|\widehat{\mathbf{A}}|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\widehat{\mathbf{A}}|)\, dz \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Из (4.31)–(4.34) вытекает, что $\mathbf{A}_*$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathcal{O}_*} |\mathbf{A}_*|^2 l_m^\rho(|\mathbf{A}_*|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\mathbf{A}_*|)\, d\xi < \infty, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho > 1. \tag{4.35}$$

Числа m и ρ здесь — те же, что и в (3.48).

4.5. Из свойств заряда $d\widehat{\nu}$ и отображения Ψ следует, что $d\nu_*$ — γ_1-периодический борелевский заряд в $\overline{\Pi_*}$ локально-конечной вариации.

В $L_2(\Pi_*)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m_+^*[f,f] := \int\limits_{\Pi_*} |\nabla_\xi f|^2\, d\xi + \int\limits_{\overline{\Pi_*}} |f|^2\, (d\nu_*)_+, \quad f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*}). \tag{4.36}$$

На основании предложения 4.5 отображение $f \mapsto f \circ \Psi$ переводит $\widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$ на $\widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}})$. В силу (4.23)

$$\int\limits_{\overline{\Pi_*}} |f|^2\, (d\nu_*)_\pm(\xi) = \int\limits_{\overline{\widehat{S}}} |F|^2\, d\widehat{\nu}_\pm(\mathbf{z}), \quad f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*}), \quad F := f \circ \Psi. \tag{4.37}$$

Из (3.49), (4.13), (4.36) и (4.37) вытекает двусторонняя оценка

$$c_1^* \widehat{m}_+[F,F] \leqslant m_+^*[f,f] \leqslant c_2^* \widehat{m}_+[F,F], \quad f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*}), \quad F := f \circ \Psi. \tag{4.38}$$

Покажем, что выполнено следующее условие.

(i_*) *Форма* (4.36) *допускает замыкание в* $L_2(\Pi_*)$.

Действительно, пусть $f_j \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$, $f_j \to 0$ в $L_2(\Pi_*)$ и $\{f_j\}$ — фундаментальная последовательность относительно формы (4.36). Тогда последовательность $\int_{\Pi_*} |\nabla f_j|^2\, d\xi$ равномерно ограничена. В силу неравенства (4.14) последовательность $F_j := f_j \circ \Psi$ сходится к нулю в $L_2(\widehat{S})$. На основании нижнего неравенства (4.38) заключаем, что $\{F_j\}$ — фундаментальная последовательность относительно формы $\widehat{m}_+$. Условие $(\widehat{\mathrm{i}})$ показывает, что $\widehat{m}_+[F_j, F_j] \to 0$ при $j \to \infty$. Применяя верхнее неравенство (4.38), получаем $m_+^*[f_j, f_j] \to 0$ при $j \to \infty$.

Пусть $f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$. Тогда на основании предложения 4.5 $F := f \circ \Psi \in \widehat{H}^1(\widehat{S}) \cap \widehat{C}_0(\overline{\widehat{S}})$. Из (4.37) и условия $(\widehat{\mathrm{ii}})$ получаем

$$\int_{\overline{\Pi_*}} |f(\xi)|^2\, (d\nu_*)_-(\xi) \leqslant \tau\left(\int_{\widehat{S}} \langle \widehat{g}\nabla F, \nabla F\rangle\, d\mathbf{z} + \int_{\overline{\widehat{S}}} |F|^2\, d\widehat{\nu}_+\right) + \widehat{C}\int_{\widehat{S}} |F|^2\, d\mathbf{z}, \quad \tau < 1. \tag{4.39}$$

В силу (3.41), (4.5) и (4.20) выполнено тождество

$$\int_{\widehat{S}} \langle \widehat{g}\nabla F, \nabla F\rangle\, d\mathbf{z} = \int_{\Pi_*} \omega_*^2 |\nabla_\xi f|^2\, d\xi, \quad f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*}). \tag{4.40}$$

Наконец, из (4.14) и нижней оценки (4.24) следует неравенство

$$\int_{\widehat{S}} |F|^2\, d\mathbf{z} \leqslant \varepsilon \int_{\Pi_*} \omega_*^2 |\nabla_\xi f|^2\, d\xi + C(\varepsilon)\int_{\Pi_*} |f|^2\, d\xi, \quad f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*}), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{4.41}$$

Фиксируем ε так, чтобы $\tau_* := \tau + \widehat{C}\varepsilon < 1$. Тогда соотношения (4.37), (4.39)–(4.41) приводят к следующему условию.

(ii_*) *При некотором* $\tau_* < 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\overline{\Pi_*}} |f|^2\, (d\nu_*)_- \leqslant \tau_*\left(\int_{\Pi_*} \omega_*^2 |\nabla_\xi f|^2\, d\xi + \int_{\overline{\Pi_*}} |f|^2\, (d\nu_*)_+\right) + C\int_{\Pi_*} |f|^2\, d\xi,$$
$$f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*}), \quad \tau_* < 1.$$

Пусть теперь $f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*})$. Тогда на основании предложения 4.5 $F := f \circ \Psi \in \widehat{H}^1(\widehat{\Omega}) \cap \widehat{C}(\overline{\widehat{\Omega}})$. В силу (4.23) и условия $(\widehat{\mathrm{iii}})$ имеем

$$\int_{\overline{\mathcal{O}_*}} |f|^2\, |d\nu_*| = \int_{\overline{\widehat{\Omega}}} |F|^2\, |d\widehat{\nu}| \leqslant \varepsilon\left(\int_{\widehat{\Omega}} |\nabla F|^2\, d\mathbf{z} + \max_{\mathbf{z}\in\overline{\widehat{\Omega}}} |F(\mathbf{z})|^2\right) + C(\varepsilon)\int_{\widehat{\Omega}} |F|^2\, d\mathbf{z},$$
$$f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*}), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{4.42}$$

Очевидно,

$$\max_{\mathbf{z}\in\overline{\widehat{\Omega}}} |F(\mathbf{z})|^2 = \max_{\xi\in\overline{\mathcal{O}_*}} |f(\xi)|^2, \quad f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*}), \quad F := f \circ \Psi. \tag{4.43}$$

Из (4.10), (4.11), (4.42), (4.43) вытекает следующее условие.

(iii$_*$) *При любом* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\overline{\mathcal{O}_*}} |f|^2\,|d\nu_*| \leqslant \varepsilon\Big(\int_{\mathcal{O}_*} |\nabla_\xi f|^2\,d\xi + \max_{\xi\in\overline{\mathcal{O}_*}} |f(\xi)|^2 \Big) + C(\varepsilon) \int_{\mathcal{O}_*} |f|^2\,d\xi,$$
$$f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*}), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

4.6. В $L_2(\Pi_*)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m_*[u_*, u_*] := \int_{\Pi_*} \omega_*^2 |(\mathbf{D}_\xi - \mathbf{A}_*)\phi_*^{-1} u_*|^2\,d\xi + \int_{\overline{\Pi_*}} |\phi_*^{-1} u_*|^2\,d\nu_*(\xi), \tag{4.44}$$

$$\operatorname{Dom} m_* := \{u_* = \phi_* f : f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})\}. \tag{4.45}$$

Для $\widehat{w} \in L_2(\widehat{S})$ положим

$$u_*(\xi) = (\det \Psi'(\mathbf{z}))^{-1/2}\widehat{w}(\mathbf{z}), \quad \xi = \Psi(\mathbf{z}). \tag{4.46}$$

Отображение $\widehat{w} \mapsto u_*$ *унитарно* переводит $L_2(\widehat{S})$ на $L_2(\Pi_*)$. При этом в силу (3.53), (4.21), (4.45) и предложения 4.5 $\operatorname{Dom}\widehat{m}$ отображается на $\operatorname{Dom} m_*$. Используя (4.5), (4.20)-(4.23), получаем тождество

$$m_*[u_*, u_*] = \widehat{m}[\widehat{w}, \widehat{w}], \quad \widehat{w} \in \operatorname{Dom}\widehat{m}, \tag{4.47}$$

где u_* и $\widehat{w}$ связаны соотношением (4.46). В силу предложения 3.5 форма $\widehat{m}$ полуограничена снизу и допускает замыкание в $L_2(\widehat{S})$. Тогда из (4.46), (4.47) следует, что и форма m_* полуограничена снизу и допускает замыкание в $L_2(\Pi_*)$. Замкнутая форма $\overline{m_*}$ порождает в $L_2(\Pi_*)$ самосопряженный оператор M_*. Соотношения (4.46), (4.47) приводят к следующему утверждению.

Предложение 4.6. *Операторы* M_* *и* $\widehat{M}$ *унитарно эквивалентны.*

Тем самым вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора $\widehat{M}$ (оператора Шрёдингера с метрикой $\widehat{g}$ в полосе $\widehat{S}$ с периодическими граничными условиями) сведен к аналогичному вопросу для оператора M_* — *оператора Шрёдингера со скалярной метрикой в периодической области* Π_* *специального вида с периодическими граничными условиями.*

4.7. С учетом свойств области Π_* оператор M_*, в свою очередь, сводится к *оператору Шрёдингера со скалярной метрикой и периодическими граничными условиями* уже *в прямой полосе.* Положим

$$S^\circ := S_{0,|\varkappa|} = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 < \xi_2 < |\varkappa|\}, \tag{4.48}$$

$\Omega^\circ := (0,1) \times (0, |\varkappa|)$.

Для $f \in L_2(\Pi_*)$ обозначим через Qf γ_*-периодическое продолжение f на все $\mathbb{R}^2$. (Напомним, что область Π_* фундаментальна относительно одномерной решетки γ_*.) Положим $Pf := (Qf)|_{S^\circ}$. Поскольку полоса S° также является фундаментальной областью относительно решетки γ_*, то $P : L_2(\Pi_*) \to L_2(S^\circ)$ — унитарный оператор. Ясно, что P отображает $\widehat{H}^1(\Pi_*)$ на $\widehat{H}^1(S^\circ)$; $\widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$ на $\widehat{H}^1(S^\circ) \cap \widehat{C}_0(\overline{S^\circ})$. Кроме того,

$$\int\limits_{\Pi_*} |\nabla_\xi f|^2 \, d\xi = \int\limits_{S^\circ} |\nabla_\xi (Pf)|^2 \, d\xi, \quad f \in \widehat{H}^1(\Pi_*). \tag{4.49}$$

Для $f \in L_2(\mathcal{O}_*)$ обозначим через $Q_0 f$ Γ_*-периодическое продолжение f на все $\mathbb{R}^2$ и положим $P_0 f := (Q_0 f)|_{\Omega^\circ}$. Ясно, что $P_0 : L_2(\mathcal{O}_*) \to L_2(\Omega^\circ)$ — унитарный оператор. При этом P_0 переводит $\widehat{H}^1(\mathcal{O}_*)$ на $\widehat{H}^1(\Omega^\circ)$; $\widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*})$ на $\widehat{H}^1(\Omega^\circ) \cap \widehat{C}(\overline{\Omega^\circ})$. Выполнено тождество

$$\int\limits_{\mathcal{O}_*} |\nabla_\xi f|^2 \, d\xi = \int\limits_{\Omega^\circ} |\nabla_\xi (P_0 f)|^2 \, d\xi, \quad f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*). \tag{4.50}$$

Применяя оператор P к коэффициентам ω_*, ϕ_*, $\mathbf{A}_*$, определим следующие коэффициенты в S°:

$$\omega^\circ := P\omega_*, \tag{4.51}$$

$$\phi^\circ := P\phi_*, \tag{4.52}$$

$$\mathbf{A}^\circ := P\mathbf{A}_*. \tag{4.53}$$

По заряду $d\nu_*$ в $\overline{\Pi_*}$ определим заряды $d\nu'_*$, $d\nu''_*$ в $\mathbb{R}^2$, полагая

$$\int\limits_{\mathcal{B}} d\nu'_* := \int\limits_{\mathcal{B} \cap \overline{\Pi_*}} d\nu_*, \qquad \int\limits_{\mathcal{B}} d\nu''_* := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int\limits_{\mathcal{B} + n\varkappa \mathbf{e}_2} d\nu'_*, \tag{4.54}$$

для любого ограниченного борелевского множества $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$. Отметим, что сумма в (4.54) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых. Теперь определим заряд $d\nu^\circ$ в $\overline{S^\circ}$ по формуле

$$\int\limits_{\mathcal{B}^\circ} d\nu^\circ := \int\limits_{\mathcal{B}^\circ \cap S^\circ} d\nu''_* + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{B}^\circ \cap \partial S^\circ} d\nu''_*, \tag{4.55}$$

для любого ограниченного борелевского множества $\mathcal{B}^\circ \subset \overline{S^\circ}$.

Из периодичности коэффициентов ω_*, ϕ_*, $\mathbf{A}_*$ в Π_* вытекает, что коэффициенты (4.51)–(4.53) γ_1-периодичны в полосе S°. Из (4.24), (4.25), (4.51) видно, что

$$0 < \omega_0 \leqslant \omega^\circ(\xi) \leqslant \omega_1 < \infty, \quad \xi \in S^\circ, \tag{4.56}$$

$$\omega^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ). \tag{4.57}$$

Пусть $f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ)$ и $f := P_0^{-1} f^\circ$. С учетом (4.51) имеем

$$\int\limits_{\Omega^\circ} |\nabla_\xi \omega^\circ|^2 |f^\circ|^2 \, d\xi = \int\limits_{\mathcal{O}_*} |\nabla_\xi \omega_*|^2 |f|^2 \, d\xi, \quad f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ).$$

Теперь из (4.28), (4.50) и унитарности оператора P_0 вытекает условие

$$\int\limits_{\Omega^\circ} |\nabla_\xi \omega^\circ|^2 |f^\circ|^2 \, d\xi \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega^\circ} |\nabla_\xi f^\circ|^2 \, d\xi + C(\varepsilon) \int\limits_{\Omega^\circ} |f^\circ|^2 \, d\xi, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ). \tag{4.58}$$

Из (4.29) и (4.52) следует, что

$$\phi^\circ(\xi) > 0, \quad \text{п. в. } \xi \in S^\circ. \tag{4.59}$$

Соотношения (4.30), (4.50), (4.52) приводят к условию

$$\int\limits_{\Omega^\circ} |\phi^\circ|^2 |f^\circ|^2 \, d\xi \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega^\circ} |\nabla_\xi f^\circ|^2 \, d\xi + C(\varepsilon) \int\limits_{\Omega^\circ} |f^\circ|^2 \, d\xi, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ). \tag{4.60}$$

Из (4.35) и (4.53) вытекает условие

$$\int\limits_{\Omega^\circ} |\mathbf{A}^\circ|^2 l_m^\rho(|\mathbf{A}^\circ|) \prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\mathbf{A}^\circ|) \, d\xi < \infty, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \rho > 1, \tag{4.61}$$

с теми же m и ρ, что и в (4.35).

Из определения заряда $d\nu^\circ$ (см. (4.54), (4.55)) и свойств $d\nu_*$ видно, что $d\nu^\circ$ — γ_1-периодический борелевский заряд в $\overline{S^\circ}$ локально-конечной вариации. В $L_2(S^\circ)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m_+^\circ[f^\circ, f^\circ] := \int\limits_{S^\circ} |\nabla_\xi f^\circ|^2 \, d\xi + \int\limits_{\overline{S^\circ}} |f^\circ|^2 \, d\nu_+^\circ, \quad f^\circ \in \widehat{H}^1(S^\circ) \cap \widehat{C}_0(\overline{S^\circ}). \tag{4.62}$$

Как уже отмечалось, *унитарный* оператор $P : L_2(\Pi_*) \to L_2(S^\circ)$ переводит $\widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$ на $\widehat{H}^1(S^\circ) \cap \widehat{C}_0(\overline{S^\circ})$. При этом в силу (4.49) и определения заряда $d\nu^\circ$ выполнено тождество

$$m_+^\circ[f^\circ, f^\circ] = m_+^*[f, f], \quad f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*}), \quad f^\circ := Pf.$$

Отсюда и из условия (i_*) вытекает следующее условие.

(i°) *Форма* (4.62) *допускает замыкание в* $L_2(S^\circ)$.

Пусть $f^\circ \in \widehat{H}^1(S^\circ) \cap \widehat{C}_0(\overline{S^\circ})$ и $f = P^{-1} f^\circ$. Тогда $f \in \widehat{H}^1(\Pi_*) \cap \widehat{C}_0(\overline{\Pi_*})$, и в силу определения $d\nu^\circ$ и ω° выполнены тождества

$$\int_{\overline{\Pi_*}} |f|^2 \, (d\nu_*)_\pm = \int_{\overline{S^\circ}} |f^\circ|^2 \, d\nu^\circ_\pm, \qquad \int_{\Pi_*} \omega_*^2 |\nabla_\xi f|^2 \, d\xi = \int_{S^\circ} (\omega^\circ)^2 |\nabla_\xi f^\circ|^2 \, d\xi.$$

Отсюда и из условия (ii_*) вытекает следующее условие.

(ii°) *При некотором* $\tau_* < 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\overline{S^\circ}} |f^\circ|^2 \, d\nu^\circ_- \leqslant \tau_* \Big(\int_{S^\circ} (\omega^\circ)^2 |\nabla_\xi f^\circ|^2 \, d\xi + \int_{\overline{S^\circ}} |f^\circ|^2 \, d\nu^\circ_+ \Big) + C \int_{S^\circ} |f^\circ|^2 \, d\xi,$$
$$f^\circ \in \widehat{H}^1(S^\circ) \cap \widehat{C}_0(\overline{S^\circ}). \tag{4.63}$$

Пусть теперь $f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ) \cap \widehat{C}(\overline{\Omega^\circ})$ и $f = P_0^{-1} f^\circ$. Тогда $f \in \widehat{H}^1(\mathcal{O}_*) \cap \widehat{C}(\overline{\mathcal{O}_*})$ и

$$\int_{\overline{\mathcal{O}_*}} |f|^2 \, |d\nu_*| = \int_{\overline{\Omega^\circ}} |f^\circ|^2 \, |d\nu^\circ|, \qquad \max_{\xi \in \overline{\mathcal{O}_*}} |f(\xi)|^2 = \max_{\xi \in \overline{\Omega^\circ}} |f^\circ(\xi)|^2.$$

Отсюда, с учетом (4.50), унитарности оператора P_0 и условия (iii_*) вытекает следующее условие.

(iii°) *При любом* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\overline{\Omega^\circ}} |f^\circ|^2 \, |d\nu^\circ| \leqslant \varepsilon \Big(\int_{\Omega^\circ} |\nabla_\xi f^\circ|^2 \, d\xi + \max_{\xi \in \overline{\Omega^\circ}} |f^\circ(\xi)|^2 \Big) + C(\varepsilon) \int_{\Omega^\circ} |f^\circ|^2 \, d\xi,$$
$$0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ) \cap \widehat{C}(\overline{\Omega^\circ}).$$

4.8. В $L_2(S^\circ)$ рассмотрим квадратичную форму

$$m^\circ[u^\circ, u^\circ] := \int_{S^\circ} (\omega^\circ)^2 |(\mathbf{D}_\xi - \mathbf{A}^\circ)(\phi^\circ)^{-1} u^\circ|^2 \, d\xi + \int_{\overline{S^\circ}} |(\phi^\circ)^{-1} u^\circ|^2 \, d\nu^\circ, \tag{4.64}$$

$$\operatorname{Dom} m^\circ := \{ u^\circ = \phi^\circ f^\circ : f^\circ \in \widehat{H}^1(S^\circ) \cap \widehat{C}_0(\overline{S^\circ}) \}. \tag{4.65}$$

Из (4.45), (4.52), (4.65) видно, что унитарный оператор $P : L_2(\Pi_*) \to L_2(S^\circ)$ переводит $\operatorname{Dom} m_*$ на $\operatorname{Dom} m^\circ$. Используя (4.44), (4.51)–(4.55), получаем тождество

$$m^\circ[u^\circ, u^\circ] = m_*[u_*, u_*], \quad u_* \in \operatorname{Dom} m_*, \quad u^\circ = P u_*. \tag{4.66}$$

Отсюда следует, что форма m° полуограничена снизу и допускает замыкание в $L_2(S^\circ)$ (вместе с формой m_*). Замкнутая форма $\overline{m^\circ}$ порождает в $L_2(S^\circ)$ самосопряженный оператор M°. Соотношение (4.66) показывает, что *операторы* M° *и* M_* *унитарно эквивалентны*. С учетом предложения 4.6 это показывает, что *теорема* 3.8 *вытекает из следующей теоремы*.

Теорема 4.7. *Пусть* S° — *полоса, определенная в* (4.48). *Пусть вещественная* γ_1*-периодическая функция* $\omega^\circ(\xi)$ *подчинена условиям* (4.56)–(4.58). *Пусть вещественная* γ_1*-периодическая функция* $\phi^\circ(\xi)$ *удовлетворяет условиям* (4.59), (4.60), *а* γ_1*-периодическая вектор-функция* $\mathbf{A}^\circ(\xi)$ *подчинена условию* (4.61). *Пусть вещественный* γ_1*-периодический борелевский заряд* $d\nu^\circ$ *локально-конечной вариации в* $\overline{S^\circ}$ *удовлетворяет условиям* (i°)–(iii°). *Пусть квадратичная форма* m° *определена соотношениями* (4.64), (4.65), *а форма* $\overline{m^\circ}$ *есть замыкание формы* m° *в* $L_2(S^\circ)$. *Пусть самосопряженный оператор* M° *в* $L_2(S^\circ)$ *порожден формой* $\overline{m^\circ}$. *Тогда спектр оператора* M° *абсолютно непрерывен.*

С учетом сказанного в конце §2 и 3 *теорема* 4.7 *влечет теоремы* 3.8, 2.1 *и* 1.5.

§5. Доказательство теоремы 4.7

5.1. Калибровка. При доказательстве теоремы 4.7 можно, не уменьшая общности, подчинить магнитный потенциал $\mathbf{A}^\circ$ условиям калибровки

$$\operatorname{div}\mathbf{A}^\circ = 0, \tag{5.1}$$

$$\int_{\Omega^\circ} A_1^\circ(\xi)\,d\xi = 0. \tag{5.2}$$

Условие (5.1) понимается в смысле теории распределений.

Действительно, пусть $\Phi^\circ(\xi)$ есть (слабое) решение уравнения

$$\Delta\Phi^\circ(\xi) = \operatorname{div}\mathbf{A}^\circ(\xi), \quad \xi\in\Omega^\circ, \tag{5.3}$$

с периодическими граничными условиями. Как показано в [La], при условии (4.61) для Φ° выполнены соотношения

$$\Phi^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ)\cap\widehat{C}(\overline{\Omega^\circ}), \tag{5.4}$$

$$\int_{\Omega^\circ} |\nabla\Phi^\circ|^2 l_m^\rho(|\nabla\Phi^\circ|)\prod_{j=1}^{m-1} l_j(|\nabla\Phi^\circ|)\,d\xi < \infty, \quad m\in\mathbb{N}, \quad \rho>1, \tag{5.5}$$

с теми же m и ρ, что и в (4.61). Продолжим Φ° γ_1-периодически на всю полосу S°. Положим

$$\kappa := \int_{\Omega^\circ} A_1^\circ(\xi)\,d\xi. \tag{5.6}$$

При унитарном в $L_2(S^\circ)$ преобразовании

$$u^\circ(\xi)\mapsto u^\circ(\xi)\exp\{-i(\Phi^\circ(\xi)+\kappa\xi_1)\} \tag{5.7}$$

форма (4.64) перейдет в форму того же вида с неизменными ω°, ϕ°, $d\nu^\circ$, но с другим магнитным потенциалом $\widetilde{\mathbf{A}}^\circ = \mathbf{A}^\circ - \nabla\Phi^\circ - \kappa\mathbf{e}_1$. С учетом (5.3), (5.6), $\widetilde{\mathbf{A}}^\circ$ удовлетворяет условиям вида (5.1), (5.2). В силу (5.5) потенциал $\widetilde{\mathbf{A}}^\circ$ подчинен условию вида (4.61). Кроме того, из (4.65) и (5.4) видно, что преобразование (5.7) отображает $\operatorname{Dom} m^\circ$ на себя.

Таким образом, *в дальнейшем можно считать, что* $\mathbf{A}^\circ$ *подчинен условиям* (5.1), (5.2).

5.2. Прямой интеграл. Разложение периодического оператора M° в прямой интеграл строится с помощью *преобразования Гельфанда* $\mathcal{U}$. Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathcal{K} := \int_0^{2\pi} \oplus L_2(\Omega^\circ)\, dk. \tag{5.8}$$

Отображение $\mathcal{U} : L_2(S^\circ) \to \mathcal{K}$ первоначально задается на функциях класса $C_0(\overline{S^\circ})$ формулой

$$(\mathcal{U}f)(k,\boldsymbol{\xi}) := (2\pi)^{-1/2} e^{-ik\xi_1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikn} f(\xi_1+n,\xi_2).$$

Затем оно продолжается по непрерывности до *унитарного* отображения $L_2(S^\circ)$ на $\mathcal{K}$.

В $L_2(\Omega^\circ)$ для каждого $k\in\mathbb{R}$ (k — *квазиимпульс*) рассмотрим квадратичную форму

$$m^\circ(k)[u^\circ,u^\circ] := \int_{\Omega^\circ} (\omega^\circ)^2 |(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\xi}} + k\mathbf{e}_1 - \mathbf{A}^\circ)(\phi^\circ)^{-1}u^\circ|^2\, d\boldsymbol{\xi} + \int_{\Omega^\circ_*} |(\phi^\circ)^{-1}u^\circ|^2\, d\nu^\circ(\boldsymbol{\xi}),$$
$$\operatorname{Dom} m^\circ(k) := \{u^\circ = \phi^\circ f^\circ : f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ)\cap\widehat{C}(\overline{\Omega^\circ})\}, \tag{5.9}$$

где $\Omega^\circ_* := [0,1)\times[0,|\varkappa|]$.

Из условия (i°) вытекает следующее условие.

($\widetilde{\text{i}}^\circ$) *Форма*

$$(m^\circ_+)^\Omega[f^\circ,f^\circ] := \int_{\Omega^\circ} |\nabla f^\circ|^2\, d\boldsymbol{\xi} + \int_{\Omega^\circ_*} |f^\circ|^2\, d\nu^\circ_+, \quad f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ)\cap\widehat{C}(\overline{\Omega^\circ}),$$

допускает замыкание в $L_2(\Omega^\circ)$.

Действительно, пусть последовательность $f^\circ_j \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ)\cap\widehat{C}(\overline{\Omega^\circ})$ такова, что $f^\circ_j \to 0$ в $L_2(\Omega^\circ)$ при $j\to\infty$ и $\{f^\circ_j\}$ фундаментальна относительно формы $(m^\circ_+)^\Omega$. Пусть $\zeta(\boldsymbol{\xi})$ — гладкая в $\overline{S^\circ}$ функция такая, что $\zeta(\boldsymbol{\xi})\geqslant 0$, $\zeta(\boldsymbol{\xi})=1$ при $\boldsymbol{\xi}\in\overline{\Omega^\circ}$, и $\operatorname{supp}\zeta\subset\overline{S^\circ}\cap B_R$ при некотором $R<\infty$. Пусть, кроме того, $\zeta(\xi_1,0)=\zeta(\xi_1,|\varkappa|)$. Продолжим f°_j периодически (относительно решетки γ_1) на S° и домножим на $\zeta(\boldsymbol{\xi})$. Полученную функцию обозначим через $\widetilde{f}_j$.

Тогда $\widetilde{f}_j \to 0$ в $L_2(S^\circ)$ при $j \to \infty$, $\widetilde{f}_j \in \operatorname{Dom} m_+^\circ = \widehat{H}^1(S^\circ) \cap \widehat{C}_0(\overline{S^\circ})$ и $\{\widetilde{f}_j\}$ фундаментальна относительно формы m_+°. В силу условия (i°) отсюда вытекает, что $m_+^\circ[\widetilde{f}_j, \widetilde{f}_j] \to 0$ при $j \to \infty$. Поскольку $(m_+^\circ)^\Omega[f_j^\circ, f_j^\circ] \leqslant m_+^\circ[\widetilde{f}_j, \widetilde{f}_j]$, то $(m_+^\circ)^\Omega[f_j^\circ, f_j^\circ] \to 0$.

Далее, из условия (ii°) с помощью преобразования Гельфанда легко выводится (ср. [Sh2, §2]) следующее условие.

($\widetilde{\text{ii}}^\circ$) *При некотором $\tau_* < 1$ справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega_*^\circ} |f^\circ|^2 \, d\nu_-^\circ \leqslant \tau_* \Big(\int_{\Omega^\circ} (\omega^\circ)^2 |\nabla f^\circ|^2 \, d\xi + \int_{\Omega_*^\circ} |f^\circ|^2 \, d\nu_+^\circ \Big) + C \int_{\Omega^\circ} |f^\circ|^2 \, d\xi,$$

$$f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ) \cap \widehat{C}(\overline{\Omega^\circ}).$$

Постоянная τ_* — та же, что и в (4.63).

По аналогии с доказательством предложения $1.\widetilde{4}$ нетрудно проверить, что условия (4.56), (4.59)–(4.61), а также условия ($\widetilde{\text{i}}^\circ$), ($\widetilde{\text{ii}}^\circ$) обеспечивают полуограниченность снизу и замыкаемость формы (5.9). Область определения $\mathfrak{d}$ замкнутой формы $\overline{m^\circ(k)}$ не зависит от $k \in \mathbb{R}$. Замкнутая форма $\overline{m^\circ(k)}$ порождает самосопряженный оператор $M^\circ(k)$ в $L_2(\Omega^\circ)$.

Стандартные рассуждения (см., например, [BSu3, §2; BSuSh, §2]) показывают, что оператор M° в прямом интеграле (5.8) действует как оператор умножения на оператор-функцию $M^\circ(k)$, т.е.

$$\mathcal{U} M^\circ \mathcal{U}^{-1} = \int_0^{2\pi} \oplus M^\circ(k) \, dk.$$

5.3. При разложении в прямой интеграл периодического оператора, действующего в $L_2(\mathbb{R}^2)$, возникает семейство операторов $\mathcal{M}(\mathbf{k})$, зависящих от двумерного параметра $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$. При наших условиях на коэффициенты такое операторное семейство изучено в [Sh3]. Отличие лишь в том, что в [Sh3] помимо условий (5.1), (5.2) предполагалось, что $\int_{\Omega^\circ} A_2^\circ(\xi) \, d\xi = 0$. Положим $\mathbf{A}_*^\circ := \mathbf{A}^\circ - \kappa_2 \mathbf{e}_2$, где $\kappa_2 := \int_{\Omega^\circ} A_2^\circ(\xi) \, d\xi$. Тогда потенциал $\mathbf{A}_*^\circ$ удовлетворяет всем условиям из [Sh3], а соответствующие операторы $\mathcal{M}(\mathbf{k})$ порождаются замыканием формы

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(\mathbf{k})[u^\circ, u^\circ] &:= \int_{\Omega^\circ} (\omega^\circ)^2 |(\mathbf{D}_\xi + k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{A}_*^\circ)(\phi^\circ)^{-1} u^\circ|^2 \, d\xi \\ &+ \int_{\Omega_*^\circ} |(\phi^\circ)^{-1} u^\circ|^2 \, d\nu^\circ(\xi), \quad u^\circ = \phi^\circ f^\circ, \quad f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ) \cap \widehat{C}(\overline{\Omega^\circ}). \end{aligned}$$

При $k_1 = k$, $k_2 = -\kappa_2$ *эти операторы совпадают с* $M^\circ(k)$. Мы заимствуем нужные факты о семействе $M^\circ(k) = \mathcal{M}(k, -\kappa_2)$ из [Sh3]. В частности, в [Sh3] показано, что при всех $k \in \mathbb{R}$ резольвента оператора $M^\circ(k)$ компактна.

5.4. Комплексификация. Схема Томаса. Схема Томаса связана с распространением форм $m^\circ(k)$ и операторов $M^\circ(k)$ на комплексные значения квазиимпульса $k \in \mathbb{C}$. При таком аналитическом продолжении возникают *секториальные формы и m-секториальные операторы*, систематически исследованные в книге Т. Като [K]. Формула

$$\begin{aligned} m^\circ(k)[u^\circ, u^\circ] \\ := \int_{\Omega^\circ} (\omega^\circ)^2 \langle (\mathbf{D}_\xi + k\mathbf{e}_1 - \mathbf{A}^\circ)(\phi^\circ)^{-1}u^\circ, (\mathbf{D}_\xi + \overline{k}\mathbf{e}_1 - \mathbf{A}^\circ)(\phi^\circ)^{-1}u^\circ \rangle \, d\xi \\ + \int_{\Omega_\bullet^\circ} |(\phi^\circ)^{-1}u^\circ|^2 \, d\nu^\circ(\xi), \quad u^\circ = \phi^\circ f^\circ, \ f^\circ \in \widehat{H}^1(\Omega^\circ) \cap \widehat{C}(\overline{\Omega^\circ}), \end{aligned} \tag{5.10}$$

позволяет аналитически продолжить форму $m^\circ(k)$ на любые $k \in \mathbb{C}$. Форма $m^\circ(k)$ секториальна и допускает замыкание. При этом на области $\mathfrak{d}$ форма $\overline{m^\circ(k)}$ *замкнута и секториальна* при $k \in \mathbb{C}$. Такая форма порождает *m-секториальный* оператор, который мы по-прежнему обозначаем через $M^\circ(k)$. Резольвента оператора $M^\circ(k)$ компактна при всех $k \in \mathbb{C}$. Операторы $M^\circ(k)$ образуют относительно параметра $k \in \mathbb{C}$ *самосопряженное аналитическое семейство типа* (B) *с компактной резольвентой*. Напомним, что семейство типа (B) отвечает определению операторов через секториальные формы с постоянной областью определения [K, §VII.4]. Самосопряженность семейства означает, что $M^\circ(\overline{k}) = M^\circ(k)^*$, $k \in \mathbb{C}$.

Схема Томаса применительно к операторным семействам типа (B) подробно описана в [BSu3]. Эти соображения применимы и к рассматриваемому нами случаю. Именно, доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора M° сводится к проверке соотношения

$$\|(M^\circ(\mu + iy))^{-1}\| \to 0 \quad \text{при } |y| \to \infty$$

для подходящего $\mu \in \mathbb{R}$, где $\|\cdot\|$ — операторная норма в $L_2(\Omega^\circ)$. Таким образом, *теорема* 4.7 *вытекает из следующего утверждения*, доказанного в [Sh3, теорема 2.2].

Теорема 5.1. *Пусть вещественная функция $\omega^\circ(\xi)$ в Ω° подчинена условиям* (4.56)–(4.58). *Пусть вещественная функция $\phi^\circ(\xi)$ удовлетворяет условиям* (4.59), (4.60), *а вектор-функция $\mathbf{A}^\circ(\xi)$ подчинена условиям* (4.61), (5.1), (5.2). *Пусть вещественный борелевский заряд $d\nu^\circ$ в $\overline{\Omega^\circ}$ удовлетворяет условиям* ($\widetilde{\text{i}}^\circ$), ($\widetilde{\text{ii}}^\circ$), (iii$^\circ$). *Пусть квадратичная форма $m^\circ(k)$, $k \in \mathbb{C}$, определена соотношением* (5.10), *а форма $\overline{m^\circ(k)}$ есть замыкание формы $m^\circ(k)$ в $L_2(\Omega^\circ)$. Пусть m-секториальный оператор $M^\circ(k)$ в $L_2(\Omega^\circ)$ порожден формой $\overline{m^\circ(k)}$. Тогда оператор $M^\circ(\pi + iy)$ обратим при достаточно большом $|y|$ и*

$$\lim_{|y|\to\infty} \|(M^\circ(\pi + iy))^{-1}\| = 0.$$

Таким образом, теорема 4.7, а тогда и теоремы 3.8, 2.1 и 1.5 доказаны.

Список литературы

[ABe] Ahlfors L., Bers L., *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), no. 2, 385–404.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Двумерный периодический магнитный гамильтониан абсолютно непрерывен*, Алгебра и анализ **9** (1997), №1, 32–48.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом*, Алгебра и анализ **10** (1998), №4, 1–36.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности*, Алгебра и анализ **11** (1999), №2, 1–40.

[BSuSh] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых*, Алгебра и анализ **12** (2000), №6, 140–177.

[F] Филонов Н. Д., *Эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме, имеющее решение с компактным носителем*, Пробл. мат. анал., вып. 22, СПбГУ, СПб., 2001, сс. 246–257.

[Fr] Friedlander L., *On the spectrum of a class of second order periodic elliptic differential operators*, ESI preprint no. 1037, Vienna, 2001.

[K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[Ku] Kuchment P., *Floquet theory for partial differential equations*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 60, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[KuL] Kuchment P., Levendorskiĭ S., *On the structure of spectra of periodic elliptic operators*, Preprint mp_arc 00-388 (2000), http://www.ma.utexas.edu/mp_arc.

[La] Лапин И. С., *Абсолютная непрерывность спектра двумерных периодических магнитных операторов Шрёдингера и Дирака с потенциалами из классов Зигмунда*, Пробл. мат. анал., вып. 22, СПбГУ, СПб., 2001, сс. 74–105.

[M] Мазья В. Г., *Пространства С. Л. Соболева*, ЛГУ, Л., 1985.

[Mo] Morame A., *Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace-Beltrami operator with periodic electromagnetic potential*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 7593–7601.

[RSi] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

[S] Solomyak M. Z., *Spectral problems related to the critical exponent in the Sobolev embedding theorem*, Proc. London Math. Soc. (3) **71** (1995), 53–75.

[Sh1] Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность двумерного магнитного периодического оператора Шрёдингера с электрическим потенциалом типа производной от меры*, Зап. науч. семин. ПОМИ **271** (2000), 276–312.

[Sh2] Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с положительным электрическим потенциалом*, Алгебра и анализ **13** (2001), №4, 196–228.

[Sh3] Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шрёдингера с положительным электрическим потенциалом*, Тр. С.-Петербург. мат. о-ва **9** (2001) (в печати).

[ShaSo] Shargorodsky E., Sobolev A. V., *Quasi-conformal mappings and periodic spectral problems*, Preprint no. 2001-07, Univ. of Sussex, Brighton, 2001.

[So] Sobolev A. V., *Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator*, Invent. Math. **137** (1999), 85–112.

[SoW] Sobolev A. V., Walthoe J., *Absolute continuity in periodic waveguides*, Preprint 2000-19, Univ. of Sussex, Brighton, 2000.

[Su] Suslina T. A., *Absolute continuity of the spectrum of periodic operators of mathematical physics*, Journées Équations aux Dérivées Partielles (La Chapelle sur Erde, 2000), Univ. Nantes, Nantes, 2000, Exp. No. XVIII, 13 pp.

[SuSh] Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность спектра оператора Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей*, Алгебра и анализ **13** (2001), №5, 197–240.

[T] Thomas L., *Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal*, Comm. Math. Phys. **33** (1973), 335–343.

[V] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Физматгиз, М., 1959.

С.-Петербургский
государственный университет
физический факультет
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская ул., 1
Россия
E-mail: tanya@petrov.stoic.spb.su

Поступило 5 ноября 2001 г.

С.-Петербургский
государственный университет
физический факультет
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская ул., 1
Россия
E-mail: roman@RS3759.spb.edu