

© В.Ф. КРАВЧЕНКО,  
академик АН УССР В.Л. РВАЧЕВ, Т.И. ШЕЙКО

## МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НОВЫХ СТРУКТУР РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

1. В последнее время появилось большое количество работ, посвященных проблеме применимости теории  $R$ -функций к решению некоординатных краевых задач электродинамики СВЧ-диапазона [1–10].

Интерес к этой важной проблеме обусловлен возможностью разработки новых модификаций структурных формул на основе теории  $R$ -функций, которая, являясь аналитической, содержит хорошие конструктивные возможности для того, чтобы достаточно полно учитывать априорную информацию об искомом решении, а с помощью генератора программ системы "Поле" позволяет провести алгоритмизацию и эффективную численную реализацию задач рассеяния волн на объектах сложной формы.

В настоящей работе в рамках теории  $R$ -функций излагается новый вариант построения модифицированных структур применительно к решению внешних задач для областей сложной формы.\*

2. В [1–4] для задачи Дирихле (рассматривается случай скалярной теории дифракции на телах произвольной формы) для области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$  предложена следующая структура решения:

$$(1) \quad u = u_0 - \frac{u_0}{1 + \omega^2} - \frac{\omega}{(1 + \omega^3)^{1/2}} P\left(\frac{x}{1 + \omega}; \frac{y}{1 + \omega}\right) e^{ikr}.$$

Граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  пусть будет  $C^2$ -многообразием и описывается уравнением  $\omega(x) \in C^2$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ , причем

$$(2) \quad 1.^\circ \omega(x) > 0, (x) \in \Omega; \quad 2.^\circ \omega(x) = 0, (x) \in \partial\Omega; \quad 3.^\circ \omega(x) < 0$$

при  $(x) \in \bar{\Omega}$ . Построение такой функции  $\omega(x)$  выполняется по методике [11] с использованием специальных  $R$ -операций. В случае, если граница  $\partial\Omega$  имеет  $C^0$ -гладкость, то, используя  $R$ -операции, позволяющие "сгладить" недифференцируемые участки границы, можно перейти к области  $\Omega_\epsilon$ , которая имеет границу необходимой гладкости и отличается на достаточно малую величину от исходной области  $\Omega$ . Так как вопрос построения таких уравнений подробно изложен в [11], считаем, что такая функция  $\omega(x)$  существует и, кроме того, обладает свойством

$$4.^\circ \partial\omega(x)/\partial\nu|_{\partial\Omega} = 1,$$

где  $\nu$  — направление внутренней нормали к  $\partial\Omega$ .

Заметим, что в (1) функция  $\omega(x, y)$  ведет себя вблизи  $\partial\Omega$  и на бесконечности, как расстояние до границы объекта. Это позволяет, с одной стороны, обеспечить требуемое качество структуры решения в ближней зоне, а с другой — обеспе-

\* Результаты этой работы частично были доложены на IV Всесоюзной конференции по метрологическому обеспечению антенных измерений, 11–13 ноября 1987 г., Ереван.

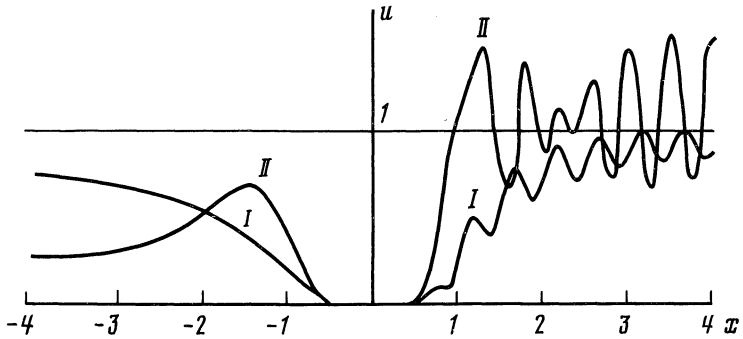


Рис. 1

читать удовлетворение условию излучения Зоммерфельда: при  $|r| \rightarrow \infty$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial r} - iku = 0(|r|^{-\alpha}),$$

где  $\alpha = (n - 1)/2$  ( $n$  — размерность пространства),  $u_0 = e^{-ikx}$ . Можно показать, что решение исследуемой краевой задачи Дирихле существует и единственно [11]. Процесс построения решения разбивается на два этапа: 1) построение функции, определенной всюду в области  $\Omega$  и удовлетворяющей граничным условиям на  $\partial\Omega$  и условию Зоммерфельда; 2) удовлетворение исходному волновому уравнению Гельмгольца.

Второй этап при численном решении обычно реализуется одним из вариационных методов. В вариационных методах учет информации об области  $\Omega$ , ее границе  $\partial\Omega$  и о заданных на границе граничных условиях осуществляется в процессе построения координатных последовательностей функций, обладающих необходимыми свойствами полноты и линейной независимости. Что касается функции  $\omega$ , то ее практическая реализация вышеуказанного поведения (3) проводилась следующим образом.

3. Пусть  $\omega_1 = 0$  — уравнение границы объекта [11, 12], а  $r = \|x\|$ . Тогда  $\omega = \frac{\omega_1 r}{\omega_1 + r}$  обеспечивает удовлетворение структурой (1) условию (3). Такая же зависимость будет использована в последующих вариантах структуры. Следует отметить, что численный эксперимент (1) в условиях эксплуатации подсистемы "СТРУКТУРА" [12] показал практически слабую сходимость приближенного решения в ближней зоне, как в освещенной, так и в теневой ее частях (рис. 1). Для преодоления этой трудности на первом этапе была построена усовершенствованная по формуле склейки [11, 12] структура вида

$$(4) \quad u = e^{-ik\tilde{x}_1} - \frac{e^{ik\left(\frac{-\tilde{x}_1 + \omega^3}{1 + \omega^2}\right)}}{1 + \omega^2} - \frac{\omega}{(1 + \omega^3)^{1/2}} P\left(\frac{\tilde{x}_1}{1 + \omega}; \frac{x_2}{1 + \omega}\right) e^{ikr},$$

$$\tilde{x}_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha,$$

разделяющая для начального приближения отраженной волны ближнюю и дальнюю зоны. При этом приближение улучшилось (рис. 1), и тем самым была подтверждена необходимость корректировки начального приближения для отраженной волны. Однако для получения хорошего приближения при сохранении той же размерности аппроксимационного пространства этого оказалось недостаточно. Поэтому на втором

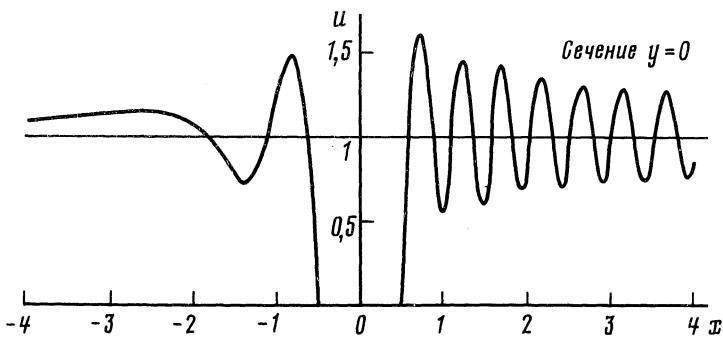


Рис. 2

этапе на основе информации о физических процессах, протекающих в ближней зоне (законы Снеллиуса), была проведена дополнительная корректировка структуры, а именно: поле отраженных лучей (начальное приближение) строится в соответствии с известным законом геометрической оптики [13]. Это приводит к структуре решения вида

$$(5) \quad u = e^{-ik\tilde{x}_1} - \frac{e^{-ik\theta/(1+\omega^2)}}{1+\omega} - \frac{\omega}{(1+\omega^3)^{1/2}} P\left(\frac{x_1}{1+\omega}; \frac{x_2}{1+\omega}\right) e^{ikr},$$

где

$$\theta = (x_1 \cos 2\varphi + x_2 \sin 2\varphi - \tilde{x}_1)(1+q)/2 - \tilde{x}_1 + \omega^3,$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = 2 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \quad q = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \epsilon}}$$

и в которой разделены не только ближняя и дальняя, но и освещенная и теневая зоны.

4. В двумерном случае, когда падающая волна задана в виде

$$u_{\text{пад}} = e^{-ik(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha)},$$

получаем структуру

$$(6) \quad u = e^{-ik\tilde{x}_1} - \frac{e^{ikM/(1+\omega^2)}}{1+\omega^2} - \frac{\omega}{(1+\omega^3)^{1/2}} P\left(\frac{x_1}{1+\omega}; \frac{x_2}{1+\omega}\right) e^{ikr};$$

где

$$M = [x_1 \cos(\alpha + 2\varphi) + x_2 \sin(\alpha + 2\varphi) - \tilde{x}_1] (1+q)/2 - \tilde{x}_1 + \omega^3.$$

На рис. 2 приведено решение, которое в зоне света и в зоне тени хорошо совпадает с точным для кругового цилиндра, приведенным в [14]. Рассмотрим теперь общий случай построения структуры решения, удовлетворяющей уравнению эйконала, содержащему основные понятия геометрической оптики.

Пусть  $u_{\text{пад}} = e^{ik\tau_{\text{пад}}}$ ,  $u_{\text{отр}} = e^{ik\tau_{\text{отр}}}$ . Тогда согласно [13] имеем

$$(7) \quad u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} |_{\partial \Omega} = 0,$$

условие

$$(8) \quad \tau_{\text{отр}}|_{\partial\Omega} = \tau_{\text{пад}}|_{\partial\Omega},$$

кроме того,

$$(9) \quad \left. \frac{\partial \tau_{\text{отр}}}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = - \left. \frac{\partial \tau_{\text{пад}}}{\partial n} \right|_{\partial\Omega}.$$

Условию (8) удовлетворяет формула

$$(10) \quad \tau_{\text{отр}} = \tau_{\text{пад}} + \omega P,$$

которая после дифференцирования и подстановки в (9) дает

$$(11) \quad \frac{\partial \tau_{\text{отр}}}{\partial n} = \frac{\partial \tau_{\text{пад}}}{\partial n} - P, \quad P = 2 \frac{\partial \tau_{\text{пад}}}{\partial n}.$$

Окончательно условиям (8), (9) удовлетворяет формула вида

$$(12) \quad \tau_{\text{отр}} = \tau_{\text{пад}} + 2\omega \frac{\partial \tau_{\text{пад}}}{\partial n}.$$

Таким образом, возможны модификации структурных формул, аналогичные (1), (4) и (5):

$$(13) \quad u = e^{ik\tau_{\text{пад}}} - \frac{\exp[ik(\tau_{\text{пад}} + 2\omega \partial \tau_{\text{пад}}/\partial n)]}{1 + \omega^2} - \\ - \frac{\omega}{(1 + \omega^3)^{1/2}} P\left(\frac{x_1}{1 + \omega}, \frac{x_2}{1 + \omega}\right) e^{ikr}$$

(без разделения на зоны);

$$(14) \quad u = e^{ik\tau_{\text{пад}}} - \frac{\exp\left[\frac{ik[\tau_{\text{пад}} + (2\omega \partial \tau_{\text{пад}}/\partial n)Q + \omega^3]}{1 + \omega^2}\right]}{1 + \omega^2} - \\ - \frac{\omega}{(1 + \omega^3)^{1/2}} P\left(\frac{x_1}{1 + \omega}, \frac{x_2}{1 + \omega}\right) e^{ikr}$$

(с разделением на ближнюю и дальнюю зоны);

$$(15) \quad u = e^{ik\tau_{\text{пад}}} - \frac{\exp\left[\frac{ik(\tau_{\text{пад}} + (2\omega \partial \tau_{\text{пад}}/\partial n)Q + \omega^3)}{1 + \omega^2}\right]}{1 + \omega^2} - \\ - \frac{\omega}{(1 + \omega^3)^{1/2}} P\left(\frac{x_1}{1 + \omega}, \frac{x_2}{1 + \omega}\right) e^{ikr}, \quad Q = \frac{1 + q}{2}, \quad q = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \epsilon}}$$

(с разделением на ближнюю и дальнюю зоны и зоны тени и света).

Здесь  $\epsilon$  имеет тот же смысл, что и в [13], и характеризует выбираемую в результате численного эксперимента малую зону полутени в окрестности точек соскальзывания с дифрагируемого тела падающих лучей.

5. Таким образом, предложенный и обоснованный в настоящей работе метод построения новых структур решения может быть применен для решения обширного класса внешних задач дифракции волн на телах произвольной формы в широком диапазоне СВЧ.

Поступило  
25 I 1989

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. В сб.: Радиотехника. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1970, вып. 13, с. 163–167.
2. Кравченко В.Ф., Поляков В.Ф., Рвачев В.Л. Там же, с. 168–176.
3. Кравченко В.Ф., Полевой В.И., Рвачев В.Л. Там же, 1971, вып. 17, с. 89–96.
4. Kravchenko V.F., Polevoy V.I., Rvachyov V.L. Problems in Electrodynamics Electromagnetic Wave theory. International Symposium, USSR, Tibilisi, Sept. 1971, p. 9–15.
5. Кравченко В.Ф., Полевой В.И., Рвачев В.Л. Тр. метрологических ин-тов СССР. ВНИИ метрол. Л., 1974, вып. 158 (218), с. 67–106.
6. Кравченко В.Ф., Нефедов Е.И. – ДАН, 1979, т. 248, № 1, с. 74–77.
7. Кравченко В.Ф., Нефедов Е.И. – ДАН, 1981, т. 256, № 5, с. 1097–1100.
8. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Шварко Ю.В. – ДАН, 1987, т. 295, № 3, с. 594–596.
9. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Галдыкин И.В. – ДАН, 1988, т. 302, № 1, с. 72–74.
10. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Лекции школы-семинара по объемным интегральным схемам (ОИС). Тбилиси, 1988, с. 36–41.
11. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.
12. Рвачев В.Л., Манько Г.П. Автоматизация программирования в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1983. 229 с.
13. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 124 с.
14. King R., У-Тай Цзунь. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. М.: ИЛ, 1962. 193 с.