K. M. Bobobekov, Polynomial method for the synthesis of multichannel systems by transition to matrix polynomial representation, *Vestn. Astrakhan State Technical Univ. Ser. Management, Computer Sciences and Informatics*, 2019, Number 1, 7–25

DOI: 10.24143/2072-9502-2019-1-7-25

УПРАВЛЕНИЕ, МОДЕЛИРОВАНИЕ, АВТОМАТИЗАЦИЯ

DOI: 10.24143/2072-9502-2019-1-7-25
УДК 681.513

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОСРЕДСТВОМ ПЕРЕХОДА К МАТРИЧНОМУ ПОЛИНОМИАЛЬНОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ

К. М. Бобобеков

*Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Российская Федерация*

Полиномиальные методы синтеза линейных регуляторов для систем автоматического управления с линейными объектами, предложенные рядом авторов, в том числе Ченом, Kailath, Гайдуком и др., наряду с методами синтеза в пространстве состояний находят все большее распространение. Особую трудность представляет синтез многоканальных регуляторов, что вызвано необходимостью использования матричного полиномиального исчисления, которая усугубляется существенным увеличением размерности матриц при переходе от полиномиальных матриц к числовым, использующим матрицы Сильвестра. При этом необходимо учитывать требования управляемости и наблюдаемости, приводящие к необходимости проверки наличия одинаковых корней в полиномиальных матрицах, соответствующих «числителю» и «знаменателю» объекта. Это приводит к требованию взаимно простого матричного полиномиального представления, которое может быть существенно ослаблено, если допустить возможность включения в желаемую характеристическую матрицу системы некоторых нулей и полюсов объекта, расположенных достаточно далеко влево от мнимой оси. При вычислениях с использованием числовых матриц и, следовательно, с использованием матриц Сильвестра последние вырождаются из-за понижения ранга, что усложняет вычисления. В данной работе, продолжающей исследования автора в области полиномиального синтеза многоканальных регуляторов, с опорой на результаты, полученные Ченом и другими исследователями, приведен алгоритм синтеза регуляторов, особенностью которого является возможность введения дополнительных, так называемых свободных, параметров, позволяющих обеспечивать дополнительные требования к системе автоматического управления. Свободные параметры дают возможность получения, наряду с правильными регуляторами, также строго правильных регуляторов.

Ключевые слова: синтез линейных многоканальных систем, матричная передаточная функция, левое/правое матричное полиномиальное разложение, взаимно простое полиномиальное разложение, матрицы Сильвестра, свободные параметры, астатизм первого и второго порядка, алгоритм синтеза регулятора, характеристическая матрица.

Для цитирования: *Бобобеков К. М.* Полиномиальный метод синтеза многоканальных систем посредством перехода к матричному полиномиальному представлению // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 1. С. 7–25. DOI: 10.24143/2072-9502-2019-1-7-25.

Введение

Методы анализа и синтеза многоканальных линейных систем изучали и разрабатывали многие российские и зарубежные ученые: Ю. Н. Андреев, А. А. Александров, В. В. Воронов, А. Р. Гайдук, Д. П. Ким, Л. Н. Волгин, V. Kuchera, C. T. Chen, J. C. Doyle, R. C. Dorf, P. J. Antsaklis [1–13] и др. Этому вопросу посвящен ряд диссертационных работ, например диссертационные работы А. И. Мелешкина, В. В. Вороного, Е. В. Шобы [14–16].

Полиномиальный метод синтеза исследовали А. Р. Гайдук, Д. П. Ким, Л. Н. Волгин, V. Kuchera, C. T. Chen, J. C. Doyle, R. C. Dorf, P. J. Antsaklis и др. В данной работе продолжены исследования, начатые в диссертационных работах [14–16]. Синтез линейных многоканальных систем автоматического управления с использованием полиномиальных матриц вызывает некоторые затруднения из-за многообразия таких понятий, как нули и полюса системы, из-за использования характеристической матрицы вместо характеристического полинома и т. д.

В [14] рассматриваются и иллюстрируются на многочисленных примерах алгоритмы синтеза не только одноканальных регуляторов, но и многоканальных регуляторов с использованием матричных передаточных функций, матричных полиномиальных разложений, представления характеристической матрицы в виде диофантова уравнения, которое может быть преобразовано к уравнению, включающему матрицу Сильвестра. При этом неизвестных больше количества уравнений. Алгоритмы синтеза, предложенные в [14], базируются на *итерационных методах* размещения полюсов *регулятора пониженного порядка* с использованием численной оптимизации.

В [15] приводится *методика синтеза многоканальных регуляторов полиномиальным методом*, в которой не указано, каким образом формируется система линейных уравнений, включающая матрицу Сильвестра, а именно – каким образом выбираются степени желаемых характеристических полиномов, каким образом выбираются степени полиномов «числителя» и «знаменателя» регулятора, – т. е. каким образом выбирается структура регулятора. Предварительное задание структуры регулятора приводит к появлению нулевых строк или столбцов в матрице неизвестных. Вследствие этого необходимо удалять соответствующие строки в матрице Сильвестра, что существенно усложняет процедуру синтеза и делает ее неоднозначной. После этого следует удалить линейно-зависимые строки, однако не указано, какие строки удалять и в каком порядке, а это соответствует заданию нулевых значений параметров регулятора. Предлагаемое решение соответствует частному решению диофантова уравнения. Следует подчеркнуть, что из-за предварительного задания структуры регулятора, в частности пониженного порядка, в некоторых случаях не удается получить заданные корни желаемой характеристической матрицы [15].

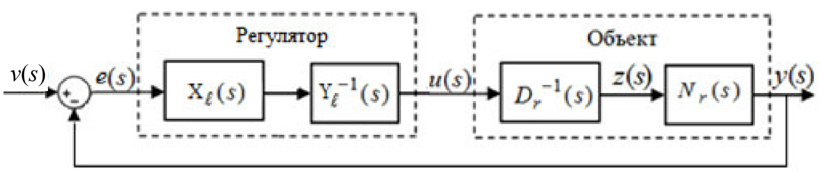
В отличие от [14, 15], в [16] приводится *методика синтеза многоканальных регуляторов полиномиальным методом*, с дополнительной процедурой по предварительному заданию структуры регулятора [16]. Однако, как и в [15], из-за предварительного задания структуры регулятора в матрице неизвестных появляются нулевые строки или столбцы. Это, как и в [15], создает проблемы при решении системы алгебраических уравнений с использованием матрицы Сильвестра. Таким образом, методики расчета параметров регулятора в многоканальных системах, приведенные в [15, 16] на основе [2], являются частными решениями диофантова уравнения и, кроме того, требуют доработки при формировании и решении уравнений.

В нашей работе приводится формализованный алгоритм синтеза многоканальных линейных систем управления полиномиальными методами с использованием матричного полиномиального разложения описания объектов и регуляторов, базирующийся на теореме Чена Theorem 9.M2 [2]. Однако в [2] не приведен подробный формализованный алгоритм синтеза. Первые попытки формализации алгоритма синтеза приведены в [14–16], а в предлагаемом исследовании они подробно рассматриваются и дополняются на примере классической структуры «задание – регулятор – объект – обратная связь».

Матричное полиномиальное представление системы приведено на рис., где передаточная функция объекта дана в виде правого матричного полиномиального разложения [2–4, 17–22], а передаточная функция регулятора – в виде левого матричного полиномиального разложения

$$W_{ob}(s) = N_r(s) D_r^{-1}(s); \;\; W_r(s) = Y_l^{-1}(s) X_l(s),$$

где $N_r(s)$, $D_r(s)$, $X_l(s)$ и $Y_l(s)$ – матрицы размером $p \times p$, элементы которых – полиномы от s.



Структурная схема многоканальной системы с единичной обратной связью

Полагаем число входов равным числу выходов, т. е. все векторы имеют размерность $p \times 1$, а все матрицы – размер $p \times p$. Передаточная функция замкнутой системы записывается как

$$W_{cl}(s) = N_r(s)\underbrace{\left(Y_l(s)D_r(s) + X_l(s)N_r(s)\right)}_{C(s)}^{-1} X_l(s) = N_r(s)C^{-1}(s)X_l(s),$$

где $C(s)$ – характеристическая матрица системы

$$Y_l(s)D_r(s) + X_l(s)N_r(s) = C(s). \qquad (1)$$

Проблема синтеза может быть сформулирована следующим образом: даны полиномиальные матрицы $D_r(s)$, $N_r(s)$ и матрица $C(s)$, выбранная в соответствии с требованиями, предъявляемыми к системе. Необходимо найти полиномиальные матрицы $Y_l(s)$ и $X_l(s)$, такие, чтобы удовлетворялось уравнение (1). Как и в цитируемых работах, для определения параметров регулятора переходим от полиномиального матричного уравнения (1) к матричному числовому уравнению.

Постановка задачи

Рассмотрим систему «регулятор – объект – единичная обратная связь», показанную на рис. 1. Объект имеет p входов и p выходов и описывается $p \times p$ строго правильной рациональной матрицей $W_{ob}(s)$. Регулятор $W_r(s)$, который должен быть сконструирован, также должен иметь p входов и p выходов. Индексы у матриц $X_l(s)$ и $Y_l(s)$ не будем писать. Таким образом, требуется рассчитать такой регулятор, чтобы он описывался правильной рациональной матричной передаточной функцией размером $p \times p$.

Для того чтобы передаточная функция $W(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s)$ была правильная/строго правильная, достаточно выполнения условий

$$\deg_{ci} N_r(s) \le \deg_{ci} D_r(s); \ \deg_{ci} N_r(s) < \deg_{ci} D_r(s)$$

для $i = 1, 2, ..., p$, в предположении, что $D_r(s)$ столбцово приведенная. Здесь $\deg_{ci}$ – степень i-го столбца. Аналогично для выполнения требования правильности/строгой правильности $W(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s)$ достаточно выполнения условий

$$\deg_{ri} N_l(s) \le \deg_{ri} D_l(s); \ \deg_{ri} N_l(s) < \deg_{ri} D_l(s)$$

для $i = 1, 2, ..., p$; $\deg_{ri}$ – степень i-й строки соответствующей матрицы; предполагается, что $D_l(s)$ строчно приведенная [4].

Для существования решения (1) достаточно выполнения условия, чтобы матричные полиномы $D_r(s)$ и $N_r(s)$ были взаимно простыми справа [2]. Однако нет гарантии, что регулятор будет правильный, а это важное (необходимое) требование реализуемости многоканального регулятора.

Пусть $W_{ob}(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s)$, где $D_r(s)$ и $N_r(s)$ – взаимно простые справа и $D_r(s)$ – столбцово приведенная. Обозначим через μ_i степень i-го столбца $D_r(s)$. Тогда

$$\deg W_{ob}(s) = \deg\det D_r(s) = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p =: n.$$

Обозначим $\mu := \max(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p)$, тогда можем выразить $D_r(s)$ и $N_r(s)$ как

$$D_r(s) = \sum_{i=0}^{\mu} D_i s^i; \ N_r(s) = \sum_{i=0}^{\mu} N_i s^i; \ D_\mu \ne 0.$$

Отметим, что D_μ – ненулевая матрица, но она может быть вырожденной (сингулярной). Отметим также, что $N_\mu = 0$, что следует из предположения строгой правильности $W_{ob}(s)$. Мы представим $Y(s)$, $X(s)$ и $C(s)$ следующим образом:

$$Y(s) = \sum_{i=0}^{m} Y_i s^i; \tag{2}$$

$$X(s) = \sum_{i=0}^{m} X_i s^i; \tag{3}$$

$$C(s) = \sum_{i=0}^{\mu+m} C_i s^i, \tag{4}$$

где $m \ge \mu - 1$; m – степень регулятора. Подставляя (2)–(4) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, получим систему линейных уравнений из матричных коэффициентов:

$$\Im \Re_m = \bar{C}, \tag{5}$$

где $\Im := [Y_0\, X_0\; Y_1\, X_1 \ldots Y_m\, X_m]$ – матрица из неизвестных коэффициентов; $\bar{C} := [C_0\; C_1 \ldots C_{\mu+m}]$ – желаемая характеристическая матрица системы;

$$\Re_m := \left(\begin{array}{cccccccc} D_0 & D_1 & \cdots & D_\mu & O & O & \cdots & O \\ \hline N_0 & N_1 & \cdots & N_\mu & O & O & \cdots & O \\ \hline O & D_0 & \cdots & D_{\mu-1} & D_\mu & O & \cdots & O \\ \hline O & N_0 & \cdots & N_{\mu-1} & N_\mu & O & \cdots & O \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline O & O & \cdots & O & D_0 & D_1 & \cdots & D_\mu \\ \hline O & O & \cdots & O & N_0 & N_1 & \cdots & N_\mu \end{array} \right). \tag{6}$$

Матрица $\Re_m$ (если ее транспонировать, совпадает с матрицей Сильвестра, поэтому такую матрицу также назовем *матрицей Сильвестра*) имеет $m + 1$ блочных строк, каждая блочная строка состоит из p D-строк и p N-строк. Таким образом, матрица $\Re_m$ имеет $(m+1)(p+p) = 2p(m+1)$ строк. Будем искать линейно независимые строки матрицы Сильвестра $\Re_m$ сверху вниз (т. к. матрица Сильвестра транспонированная). Пусть v_i будет число линейно независимых i-х N-строк (N-блочная строка состоит из p строк) и пусть $v := \max\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Тогда все p N-строк в последней N-блочной строке матрицы $\Re_v$ линейно зависимые от их предыдущих строк. Таким образом, матрица $\Re_{v-1}$ включает все линейно независимые N-строки, и их общее число равно степени $W_{ob}(s)$, т. е.

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_p = n.$$

Таким образом, число нулевых столбцов вычисляется по формуле

$$\alpha := \sum_{i=1}^{p} (\mu - \mu_i) = p\mu - (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p) = p\mu - n. \tag{7}$$

Нулевые столбцы в $\Re_m$ появляются при $m = 2, 3, \ldots$. Так как число столбцов в $\Re_m$ равно $p(\mu + m + 1)$, число столбцов в $\tilde{\Re}_{v-1}$ равно

$$\beta := p(\mu + 1 + \nu - 1) - (p\mu - n) = p\nu + n\,.$$

Очевидно, что ранг $\tilde{\Re}_{\nu-1}$ равен рангу $\Re_m$ и равен $p\nu + n$. Таким образом, $\tilde{\Re}_{\nu-1}$ имеет полный столбцовый ранг.

Матричные коэффициенты при старших столбцовых степенях $H_c(s)$ и матричные коэффициенты при старших строчных степенях $H_r(s)$ вычисляются по формулам

$$H_c(s) := \operatorname{diag}(s^{\mu_1},\ s^{\mu_2},\ \ldots,\ s^{\mu_p});$$

$$H_r(s) := \operatorname{diag}(s^{m_1},\ s^{m_2},\ \ldots,\ s^{m_p}).$$

Эти результаты будут использованы в следующем разделе.

Матрица Сильвестра *вырождается*, когда:

а) полиномиальные матрицы $D_r(s)$ и $N_r(s)$ не взаимно простые справа;

б) строчные степени регулятора выбираются $m \ge \nu$, что усложняет решение задачи синтеза, но позволяет наложить дополнительные требования на систему.

Таким образом, ставится задача разработки детализированного алгоритма синтеза многоканальных регуляторов с использованием полиномиального матричного разложения, учитывающая возможность использования регуляторов повышенного порядка и исключающая неоднозначности и противоречия, присущие алгоритмам, изложенным в вышеуказанных работах.

Синтез многоканальных регуляторов в системах с единичной обратной связью

Ниже приведем теорему о *существовании правильного* многоканального регулятора Theorem 9.M2 [2].

Теорема. Пусть в системе «регулятор – объект – обратная связь» объект описывается строго правильной рациональной матрицей $W_{ob}(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s)$ размером $p \times p$, где $D_r(s)$ и $N_r(s)$ – правое взаимно простое разложение и $D_r(s)$ – столбцово приведенная матрица со столбцовыми степенями μ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$. Пусть ν – строчный индекс $W_{ob}(s)$, и пусть $m_i \ge \nu - 1$ (m_i – строчные степени регулятора), $i = 1, 2, \ldots, p$. Тогда для любой полиномиальной матрицы $C(s)$ размером $p \times p$, такой, что

$$\lim_{s \to \infty} H_r^{-1}(s)C(s)H_c^{-1}(s) = C_h,$$

числовая матрица C_h невырожденная, *существует* $p \times p$ *правильный регулятор* $Y^{-1}(s)X(s)$, где $Y(s)$ строчно приведенная со строчными степенями m_i, такая, что матричная передаточная функция системы равна $W_{cl}(s) = N(s)C^{-1}(s)X(s)$.

Комментарий к теореме. В теореме предполагается, что задано правое строго правильное матричное полиномиальное разложение объекта, но будем исходить из общего случая, когда задана матричная передаточная функция объекта, и поэтому необходимо осуществить переход от передаточной функции к полиномиальному разложению. Это легче осуществить для левого полиномиального разложения, для чего достаточно найти наименьшее общее кратное знаменателей строк. Это будет соответствовать $D_l(s)$, а для определения «числителя» необходимо выполнить умножение $N_l(s) = D_l(s)W_{ob}(s)$.

Для вычисления правого взаимно простого разложения объекта воспользуемся процедурой приведения блочной матрицы $\left(N_l(s)\ D_l(s)\right)^t$ к верхнетреугольному виду при помощи элементарных строчных операций, что позволяет выписать требуемое представление объекта.

Рассмотрим числовую матрицу

$$\bar{C} := [C_0 \; C_1 \; C_2 \cdots C_{m+\mu}] .$$

Она сформирована из матричных коэффициентов желаемой характеристической полиномиальной матрицы $C(s)$ и имеет размеры $p \times (\mu + m + 1)p$. Очевидно, что полиномиальная матрица $C(s)$ имеет столбцовую степень, по крайней мере $m + \mu$. Таким образом, $\bar{C}$ имеет α нулевых столбцов, где α задано в (7). Кроме того, положение этих нулевых столбцов совпадает с такими же столбцами $\Re_m$. Пусть $\tilde{C}$ – числовая матрица $\bar{C}$ после удаления этих нулевых столбцов.

Рассмотрим уравнение

$$[Y_0 \, X_0 \; Y_1 \, X_1 \ldots Y_m \, X_m]\tilde{\Re}_m = \tilde{C} . \quad (8)$$

Это уравнение получено из (5) путем удаления α нулевых столбцов в $\Re_m$ и соответствующих нулевых столбцов в $\bar{C}$. Так как $\tilde{\Re}_m$ имеет полный столбцовый ранг при $m \geq v - 1$, можем сделать заключение, что для любого $C(s)$ с столбцовыми степенями, по крайней мере m + С$_i$, решение Y_i и X_i существует в (8). Или, эквивалентно, существуют полиномиальные матрицы $Y(s)$ и $X(s)$ строчной степени m или меньше. Следует отметить, что, как правило, в матрице $\tilde{\Re}_m$ количество строк больше, чем количество столбцов, поэтому решение (8) не единственное. Отметим, что матрица D_μ в общем случае сингулярная.

Об общем и частном решениях диофантова уравнения. Если $m_1 = m_2 = \cdots = m_p = m$, тогда строчно-столбцовая приведенность есть то же самое, что столбцовая приведенность со столбцовыми степенями $m + \mu_i$. Мы можем выбрать $C(s)$ диагональной или треугольной с полиномами с желаемыми корнями по диагональным элементам. Тогда $C^{-1}(s)$ и, следовательно, $W_{cl}(s)$ имеют желаемые корни в качестве ее полюсов. Рассмотрим снова матрицу $\Re_{v-1}$ – ее размер $(p+p)v \times (\mu + v)p$. Она имеет $\alpha = p\mu - n$ нулевых столбцов. Таким образом, матрица $\tilde{\Re}_{v-1}$ имеет размеры $(p+p)v \times [(\mu+v)p - (p\mu - n)]$ или $(p+p)v \times (vp+n)$. Матрица $\tilde{\Re}_{v-1}$ содержит pv линейно независимых D-строк, но содержит только $v_1 + v_2 + \cdots + v_p = n$ линейно независимых N-строк. Таким образом, $\tilde{\Re}_{v-1}$ содержит $\gamma := (p+p)v - pv - n = pv - n$ линейно зависимых N-строк. Пусть $\hat{\Re}_{v-1}$ будет матрица $\tilde{\Re}_{v-1}$ после переноса (удаления) этих линейно зависимых N-строк. Тогда матрица $\hat{\Re}_{v-1}$ имеет размеры

$$[(p+p)v - (pv - n)] \times (vp + n) = (vp + n) \times (vp + n) .$$

Таким образом, $\hat{\Re}_{v-1}$ будет квадратная и невырожденная.

Рассмотрим систему линейных уравнений (8) с $m = v - 1$:

$$\Im\tilde{\Re}_{v-1} := [Y_0 \, X_0 \; Y_1 \, X_1 \ldots Y_{v-1} \, X_{v-1}]\tilde{\Re}_{v-1} = \tilde{C} .$$

Эта система линейных уравнений состоит из p систем линейных алгебраических уравнений

$$j_i \tilde{\Re}_{v-1} = \tilde{c}_i , \; i = 1, 2, ..., p , \quad (9)$$

где j_i и $\tilde{c}_i$ – i-е строки $\Im$ и $\tilde{C}$ соответственно. Так как $\tilde{\Re}_{v-1}$ имеет полный столбцовый ранг для любого $\tilde{c}_i$, существуют решения j_i (9). Так как $\tilde{\Re}_{v-1}$ имеет больше строк, чем столбцов, по крайней мере на γ, общее решение (9) содержит γ свободных параметров. Если m в матрице $\Re_m$ возрастает на 1, от $v-1$ до v, то число строк $\tilde{\mathfrak{R}}_v$ увеличивается на $p+p$, но ранг $\tilde{\mathfrak{R}}_v$ увеличивается только на p. В этом случае количество *свободных параметров* будет увеличиваться от γ до $\gamma+p$. Таким образом, в многоканальном случае имеем дело с увеличением числа свободных параметров, что необходимо учитывать при синтезе.

Обсудим частный случай уравнения (9). Матрица $\tilde{\mathfrak{R}}_{v-1}$ имеет γ линейно зависимых N-строк. Если удалим эти линейно зависимые N-строки из $\tilde{\mathfrak{R}}_{v-1}$ и присвоим соответствующим столбцам в X_i нулевые значения, то уравнение (8) преобразуется:

$$[Y_0\,\bar{X}_0\,\ldots\,Y_{v-1}\,\bar{X}_{v-1}]\hat{\mathfrak{R}}_{v-1}=\tilde{C},$$

где $\hat{\mathfrak{R}}_{v-1}$, как обсуждалось ранее, квадратная и невырожденная. Таким образом, решение единственное.

Синтез многоканальных регуляторов

Пример 1. Вычислим регулятор для строго правильного объекта с двумя входами и двумя выходами со столбцовыми степенями $\mu_1=2$ и $\mu_2=1$ [2]:

$$W_{ob}(s)=\begin{bmatrix}1/s^2 & 1/s\\ 0 & 1/s\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что левое полиномиальное матричное разложение следующее:

$$D_l^{-1}(s)N_l(s)=\begin{bmatrix}s^2 & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

где $v_1=2$, $v_2=1$ и, следовательно, $v=\max(v_1,v_2)=2$.

Перейдем от левого разложения к правому разложению в соответствии с последовательностью решения задачи синтеза, изложенного во введении; одновременно это позволит проверить взаимную простоту левого разложения. Для этого приведем матрицу $\left[D_l(s),N_l(s)\right]^t$ к верхнетреугольному виду [22]. После четырех элементарных операций над строками получим результирующее преобразование $L=L_4L_3L_2L_1$:

$$L=L_4L_3L_2L_1=\left[\begin{array}{cc:cc}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -s & 1\\ \hdashline 1 & 0 & -s^2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -s\end{array}\right].$$

Для проверки умножим $\left[D_l(s),N_l(s)\right]^t$ слева на $L(s)$ (L-функция от s!) и получим тот же результат $L(s)\left[D_l(s),N_l(s)\right]^t=\left[R(s)\quad O_{2\times2}\right]^t$, или

$$\left[D_l(s),N_l(s)\right]L^t(s)=\left[R(s)\quad O_{2\times2}\right].$$

Здесь

$$L'(s)=\left[\begin{array}{c:c}Y_l & -N_r\\ \hdashline X_l & D_r\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:cc}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & -s & -s^2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -s\end{array}\right];\; D_r(s)=\begin{bmatrix}-s^2 & 0\\ 0 & -s\end{bmatrix};\; N_r(s)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix};\; R(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Элементы $D_r(s)$ и $N_r(s)$ умножим на –1 и получим

$$D_r(s)=\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix};\ N_r(s)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица $R(s)$ унимодальная, это подтверждает, что полиномиальные матрицы $D_l(s)$, $N_l(s)$ взаимно простые; матрицы $D_r(s)$, $N_r(s)$ взаимно простые, в соответствии с процедурой.

Далее запишем передаточную функцию объекта в виде правого матричного полиномиального взаимно простого разложения:

$$W_{ob}(s)=N_r(s)D_r^{-1}(s)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}.$$

В данном случае столбцовые степени $D_r(s)$ равны $\mu_1=2$, $\mu_2=1$ и в сумме дают значение три (равно степени детерминанта deg det $D_r(s)=3$), т. е. она является столбцово приведенной, что требуется по условиям теоремы. Можем написать

$$D_r(s)=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_0}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D_1}s+\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_2}s^2;\ N_r(s)=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{N_0}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N_1}s+\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N_2}s^2. \quad (10)$$

Для формирования системы линейных уравнений (1), включающих полиномиальные матрицы $X(s)$ и $Y(s)$ искомого регулятора, учтем, что $\mu_1+\mu_2=n=\deg\det D(s)=3$. В соответствии с теоремой выберем максимальное значение столбцового индекса равным $\mu=\max(\mu_1,\mu_2)=2$ и вычислим степень регулятора: степень регулятора выберем по формуле $m_i\geq v-1-$ *берем наименьшую степень регулятора*, т. е. $m=m_1=m_2=v-1=1$. Запишем полиномиальные матрицы «числителя» и «знаменателя» регулятора (2)–(4):

$$X(s)=X_0+X_1s;\ Y(s)=Y_0+Y_1s.$$

Переходим к формированию $C(s)$. Для этого рассчитаем столбцовые степени желаемого матричного характеристического полинома (4) для каждого канала $f_i=m_i+\mu_i$; при этом структуру характеристической полиномиальной матрицы можно задавать диагональной или треугольной – здесь задаем ее диагональной. Таким образом, в матрице $C(s)$ первая столбцовая степень равна трем ($f_1=m_1+\mu_1=3$), а вторая столбцовая степень равна двум ($f_2=m_2+\mu_2=2$). Это позволяет найти правильный регулятор, такой, что характеристическая матрица системы равна заданной

$$C(s)=\mathrm{diag}\{15+17s+7s^2+s^3,\ 5+2s+s^2\}=C_0+C_1s+C_2s^2+C_3s^3. \quad (11)$$

Перейдем от полиномиального уравнения (1) к числовому уравнению (5), для чего составим систему уравнений и приравняем коэффициенты при s с одинаковыми степенями:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_0 & X_0 & Y_1 & X_1 \end{pmatrix}}_{\Im}\underbrace{\begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 & O \\ N_0 & N_1 & N_2 & O \\ O & D_0 & D_1 & D_2 \\ O & N_0 & N_1 & N_2 \end{pmatrix}}_{\Re_m}=\underbrace{\begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}}_{\bar{C}},$$

или (5):

$$\Im\Re_m=\bar{C},$$

где O – нулевая матрица размером $p \times p$; Y_0, Y_1, X_0, X_1 – искомые параметры (матрицы) регулятора с элементами y_{ij}^i и x_{ij}^i размером $p \times p$. Подставим значения N_i и D_i (это матричные коэффициенты для правого разложения) из (10), C_i из (11) в (5) и получим

$$\mathfrak{I}^t = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cc} y_{11}^0 & y_{21}^0 \\ y_{12}^0 & y_{22}^0 \\ \hline x_{11}^0 & x_{21}^0 \\ x_{12}^0 & x_{22}^0 \\ \hline y_1^1 & y_{21}^1 \\ y_{12}^1 & y_{22}^1 \\ \hline x_{11}^1 & x_{21}^1 \\ x_{12}^1 & x_{22}^1 \end{array}\right)^t & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}; \quad \Re_m = \begin{array}{cl} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} & \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ n_1 \\ n_2 \\ d_1 \\ d_2 \\ n_1 \\ n_2 \end{matrix} \end{array}; \quad \bar{C}^t = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 0 & 5 \\ \hline 17 & 0 \\ 0 & 2 \\ \hline 7 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)^t & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array},$$

где $\Re_m$ – матрица Сильвестра (6). Количество линейно зависимых N-строк можно вычислить по формуле $\gamma = pv - n = 2 \cdot 2 - 3 = 1$, но неизвестно, какие столбцы линейно зависимые. Поэтому используем пакет Matlab для вычисления линейно зависимых N-строк и линейно независимых D и N-строк. Количество линейно независимых N-строк, которые соответствуют строчному индексу v_i: при помощи QR-разложения определим линейно независимые строки (после транспонирования матрицы $\Re_m$!) в направлении сверху вниз. Для этого вводим значения D_i и N_i, где $i = \overline{1, 2}$, из (11) и нулевую матрицу O размером $p \times p = 2 \times 2$ для формирования матрицы Сильвестра $\Re_m$, после чего для поиска линейно независимых строк в направлении сверху вниз используем оператор $[q, r] = qr(\Re_m^t)$. В результате получим две матрицы q и r, где

$$r = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ & & -1{,}4 & -0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & & \boxed{0} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} d1 & d2 & n1 & n2 & d1 & d2 & n1 & n2 \end{matrix} \end{array}.$$

Ненулевые элементы на диагонали матрицы r подтверждают, что эти столбцы линейно независимые в матрице $\Re_m^t$ или, что эквивалентно, линейно независимые строки в матрице $\Re_m$. Очевидно, что матрица $\Re_m$ имеет две линейно независимые n_1-строки и одну линейно независимую n_2-строку. Степень передаточной функции объекта $\deg W_{ob}(s) = 3$, и мы нашли три линейно независимые строки. Поэтому нет необходимости продолжать дальнейшие поиски – мы получили $v_1 = 2$ и $v_2 = 1$ и $v := \max(v_1, v_2) = 2$. Это подтверждает, что ранее мы нашли строчные индексы правильно.

Матрица $\Re_m$ имеет размеры $2p(m+1) \times (\mu + m + 1)p = 8 \times 8$. В данной задаче количество нулевых столбцов $\alpha = p\mu - n = 1$ (7). Очевидно, что у матриц $\Re_m$ и $\bar{C}$ существует по одному нулевому столбцу: после их удаления переобозначим матрицы через $\tilde{\Re}_m$ и $\bar{C}_1$, и уравнение (5) преобразуется к виду

$$\mathfrak{I}\tilde{\Re}_m = \bar{C}_1.$$

Размер матрицы $\tilde{\mathfrak{R}}_m$ изменился до 8 × 7. Из [2] следует, что линейно зависимая *строка удаляется* совместно с соответствующим столбцом из матрицы с неизвестными коэффициентами $\mathfrak{I}$. Однако это соответствует частному решению системы линейных уравнений.

В конкретных задачах может иметь смысл анализ не частного, а общего решения данной системы уравнений [20], что позволяет удовлетворить дополнительные требования к системе. При поиске строчного индекса определили, что 8-я строка $\mathfrak{R}_m$ линейно зависимая и ее можем перенести в правую часть с 8-м столбцом матрицы $\mathfrak{I}$ – ее обозначим через $\mathfrak{I}_1$. После удаления нулевого столбца и переноса линейно зависимой строки из матрицы $\mathfrak{R}_m$ ее размер изменился: $(pv+n)\times(pv+n)=7\times 7$; новые матрицы обозначим $\hat{\mathfrak{R}}_m$, $\bar{C}_2=\bar{C}_1-q$, где q – произведение линейно зависимой строки из матрицы $\tilde{\mathfrak{R}}_m$ на соответствующий столбец $\mathfrak{I}$. В результате получим новую систему линейных уравнений

$$\mathfrak{I}_1\hat{\mathfrak{R}}_m=\bar{C}_2. \qquad (12)$$

Так как матрица $\hat{\mathfrak{R}}_m$ стала квадратной и невырожденной, несложно найти $\mathfrak{I}_1=\bar{C}_2\hat{\mathfrak{R}}_m^{-1}$, после чего необходимо вернуться от $\mathfrak{I}_1\to\mathfrak{I}$ и $\hat{\mathfrak{R}}_m\to\tilde{\mathfrak{R}}_m$. Вычисления параметров регулятора удобно выполнить в пакете Matlab, в результате получим решение уравнения (12):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \mathfrak{I}_1= & \begin{pmatrix} 7 & -17-x_{12}^1 & 15 & -15 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 2-x_{22}^1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

где параметры регулятора x_{12}^1 и x_{22}^1 можно считать свободными и задавать их произвольно. Вернемся от $\mathfrak{I}_1$ к $\mathfrak{I}$, для чего восстановим 8-й столбец матрицы $\mathfrak{I}$ и, соответственно, восстановим 8-ю строку матрицы $\tilde{\mathfrak{R}}_m$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \mathfrak{I}= & \begin{pmatrix} 7 & -17-x_{12}^1 & 15 & -15 & 1 & 0 & 17 & x_{12}^1 \\ 0 & 2-x_{22}^1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & x_{22}^1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Это общее решение, *содержащее свободные параметры*, которые можно задавать произвольно. Выпишем полиномиальные матрицы регулятора:

$$Y(s)=\begin{bmatrix} s+7 & -17-x_{12}^1 \\ 0 & s+2-x_{22}^1 \end{bmatrix};\quad X(s)=\begin{bmatrix} 17s+15 & x_{12}^1 s-15 \\ 0 & x_{22}^1 s+5 \end{bmatrix}.$$

Если зададим $x_{12}^1=x_{22}^1=0,$ получим регулятор, совпадающий с регулятором, вычисленным Ченом [2], что соответствует *частному решению для минимального порядка регулятора*:

$$Y(s)=\begin{bmatrix} s+7 & -17 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix};\ X(s)=\begin{bmatrix} 17s+15 & -15 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Как известно, переходный процесс в системе существенно зависит от так называемых *нулей системы* – тех значений s, при которых ранг «числителя» регулятора $X(s)$ понижается: в данном случае это s = –15/17. В установившемся режиме система автономная, действительно, если $W_{cl}(s)=N_r(s)C^{-1}(s)X_l(s)$, то при s = 0

$$W_{cl}(s=0)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 15 & -15 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система с данным регулятором астатическая – это очевидно, т. к. передаточная функция разомкнутой системы содержит нулевые полюса по обоим каналам «знаменателя» передаточной функции объекта $D_r(s) = \mathrm{diag}\{s^2, s\}$, что указывает на астатические свойства системы по обоим каналам.

Выше был рассмотрен частный случай, соответствующий нулевым значениям свободных параметров. Но можем воспользоваться свободными параметрами и задать, к примеру, $x_{12}^1 = -17$, $x_{22}^1 = 2$, тогда получим *«знаменатель» регулятора диагональный и по второму каналу обеспечим астатизм второго порядка*:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} s+7 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}; \; X(s) = \begin{bmatrix} 17s+15 & -17s-15 \\ 0 & 2s+5 \end{bmatrix}.$$

В этом случае у системы появится два нуля: –15/17 и –5/2.

Следует подчеркнуть, что если в матрицах $X(s)$ и $Y(s)$ берем любые x_{12}^1 и x_{22}^1, то $C(s) = \mathrm{diag}\{15 + 17s + 7s^2 + s^3, \; 5 + 2s + s^2\}$, что подтверждает правильность вычислений.

Пример 2. Продолжим исследование задачи синтеза для объекта из примера 1. Для формирования системы линейных уравнений (1), включающих полиномиальные матрицы $X(s)$ и $Y(s)$ искомого регулятора, учтем, что $\mu_1 + \mu_2 = n = \deg\det D(s) = 3$. В соответствии с теоремой о существовании решения выберем максимальное значение столбцового индекса равным $\mu = \max(\mu_1, \mu_2) = 2$ и вычислим степень регулятора: степень регулятора выберем по формуле $m_i \geq \nu - 1$, т. е. берем степень первых строк матриц $X(s)$ и $Y(s)$ $m_1 = \nu = 2$, а степени вторых строк $m_2 = \nu - 1 = 1$. Запишем полиномиальные матрицы «числителя» и «знаменателя» регулятора (2)–(4):

$$X(s) = X_0 + X_1 s + X_2 s^2; \; Y(s) = Y_0 + Y_1 s + Y_2 s^2,$$

где

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{11}^0 & y_{12}^0 \\ y_{21}^0 & y_{22}^0 \end{pmatrix}; Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11}^1 & y_{12}^1 \\ y_{21}^1 & y_{22}^1 \end{pmatrix}; Y_2 = \begin{pmatrix} y_{11}^2 & y_{12}^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; X_0 = \begin{pmatrix} x_{11}^0 & x_{12}^0 \\ x_{21}^0 & x_{22}^0 \end{pmatrix}; X_1 = \begin{pmatrix} x_{11}^1 & x_{12}^1 \\ x_{21}^1 & x_{22}^1 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходим к формированию $C(s)$. Для этого рассчитаем столбцовые степени желаемого матричного характеристического полинома (4) для каждого канала $f_i = m_i + \mu_i$: в нашем случае первая столбцовая степень матрицы $C(s)$ равна четырем ($f_1 = 4$), а вторая – двум ($f_2 = 2$). Структуру характеристической полиномиальной матрицы задаем диагональной. Это позволяет найти правильный регулятор, такой, что характеристическая матрица системы равна заданной

$$C(s) = \mathrm{diag}\{1 + 4s + 6s^2 + 4s^3 + s^4, \; 1 + 2s + s^2\}, \tag{13}$$

или $C(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + C_4 s^4$. Здесь задали корни по первому каналу равными $\{-1, -1, -1, -1\}$, а по второму $\{-1, -1\}$.

Как и в первом примере, перейдем от полиномиального уравнения к числовому уравнению:

$$\underbrace{(Y_0 \quad X_0 \quad Y_1 \quad X_1 \quad Y_2 \quad X_2)}_{\Im} \underbrace{\begin{pmatrix} D_0 & D_1 & D_2 & O & O \\ N_0 & N_1 & N_2 & O & O \\ O & D_0 & D_1 & D_2 & O \\ O & N_0 & N_1 & N_2 & O \\ O & O & D_0 & D_1 & D_2 \\ O & O & N_0 & N_1 & N_1 \end{pmatrix}}_{\Re_m} \begin{array}{l} D \\ N \\ D \\ N \\ D \\ N \end{array} = (C_0 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4),$$

или (5):

$$\Im \Re_m = \bar{C},$$

где O – нулевая матрица размером $p \times p$; $Y_0, Y_1, Y_2, X_0, X_1, X_2$ – искомые параметры (матрицы) регулятора с элементами y_{ij}^i и x_{ij}^i размером $p \times p$. Подставим значения N_i и D_i (это матричные коэффициенты для правого разложения) из (10), C_i из (13) в (5) и получим

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}$$
$$\Im = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cccccc} y_{11}^0 & y_{12}^0 & x_{11}^0 & x_{12}^0 & y_{11}^1 & y_{12}^1 & x_{11}^1 & x_{12}^1 & y_{11}^2 & y_{12}^2 & x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ y_{21}^0 & y_{22}^0 & x_{21}^0 & x_{22}^0 & y_{21}^1 & y_{22}^1 & x_{21}^1 & x_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\Re_m = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ n_1 \\ n_2 \\ d_1 \\ d_2 \\ n_1 \\ n_2 \\ d_1 \\ d_2 \\ n_1 \\ n_2 \end{array}; \quad \bar{C}^t = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ \hline 6 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)^t.$$

Матрица $\Re_m$ размером 12 × 10 вырожденная, т. к. ее ранг равен девяти и, кроме того, имеет один нулевой столбец. Для определения линейно зависимых строк, в направлении сверху вниз, можно использовать QR-разложение в Matlab – $[q, r] = qr(\Re_m^t)$. Однако *здесь не удается использовать эту команду*, т. к. при транспонировании матрицы $\Re_m$ количество строк становится меньше количества столбцов и использование этой команды приводит к ошибкам. Поэтому будем решать задачу другим способом: по очереди вычеркиваем строки и выписываем ранг матрицы $\Re_m$ – понижение ранга матрицы означает, что вычеркиваемая строка линейно независимая, а если ранг не изменяется, то она линейно зависимая (табл.).

Изменение ранга матрицы $\Re_m$ при вычеркивании строки

Строка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ранг	9	9	8	8	8	9	8	9	8	8	9	9

Строки, в которых ранг равен 9, линейно зависимые, и для решения задачи их можно перенести направо с соответствующими столбцами из матрицы $\Im$. Таким образом, существует несколько вариантов решений – появляется несколько свободных параметров, значения которых следует каким-либо образом определить. Приведем один из вариантов решения.

Из матриц $\Re_m$ и $\bar{C}$ удаляем нулевые столбцы – это 10-е столбцы; после вычеркивания обозначим $\Re_m \to \tilde{\Re}_m$ и $\bar{C} \to \bar{C}_1$, тогда уравнение (5) принимает вид

$$\Im \tilde{\Re}_m = \bar{C}_1. \tag{14}$$

Затем 1-ю, 2-ю и 6-ю строки из матрицы $\tilde{\Re}_m$ вместе со столбцами 1, 2 и 6 из матрицы $\Im$ перенесем направо и после переноса обозначим $\Im \to \Im_1$, $\tilde{\Re}_m \to \hat{\Re}_m$ и $\bar{C}_1 \to \bar{C}_2$. Таким образом, уравнение (14) преобразуется к виду

$$\Im_1 \hat{\Re}_m = \underbrace{\bar{C}_1 - (q_1 + q_2 + q_3)}_{\bar{C}_2}, \tag{15}$$

где $q_1 = (y_{11}^0 \; y_{21}^0)^t (0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0)$, $q_2 = (y_{12}^0 \; y_{22}^0)^t (0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0)$, $q_3 = (y_{12}^1 \; y_{22}^1)^t (0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0)$, индекс t вверху – знак транспонирования. Тогда

$$\Im_1^t = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_{11}^0 & x_{21}^0 \\ x_{12}^0 & x_{22}^0 \\ \hline y_{11}^1 & y_{21}^1 \\ \hline x_{11}^1 & x_{21}^1 \\ x_{12}^1 & x_{22}^1 \\ \hline y_{11}^2 & 0 \\ y_{12}^2 & 0 \\ \hline x_{11}^2 & 0 \\ x_{12}^2 & 0 \end{pmatrix}^t \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}; \quad \hat{\Re}_m = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}; \quad \bar{C}_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 4 & 0 \\ -y_{12}^0 & 2 - y_{22}^0 \\ \hline 6 - y_{11}^0 & -y_{21}^0 \\ 0 & 1 \\ \hline 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{pmatrix}^t.$$

Так как матрица $\hat{\Re}_m$ стала квадратной 9×9 и невырожденной, а матрица $\bar{C}_2$ имеет размер 2×9, несложно найти матрицу $\Im_1$ из (15):

$$\Im_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c|cc|cc|cc} 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc} 1 & -1 & 4 & 4 & -4 - y_{12}^0 & 1 & 0 & 6 - y_{11}^0 & -6 + y_{11}^0 - y_{12}^1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 - y_{22}^0 & 0 & 0 & -y_{21}^0 & 1 + y_{21}^0 - y_{22}^1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Теперь восстановим $\Im$ по $\Im_1$, $\tilde{\Re}_m$ по $\hat{\Re}_m$ и $\bar{C}_1$ по $\bar{C}_2$. Приведем только окончательный результат

$$\Im = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc} y_{11}^0 & y_{12}^0 & 1 & -1 & 4 & y_{12}^1 & 4 & -4 - y_{12}^0 & 1 & 0 & 6 - y_{11}^0 & -6 + y_{11}^0 - y_{12}^1 \\ y_{21}^0 & y_{22}^0 & 0 & 1 & 0 & y_{22}^1 & 0 & 2 - y_{22}^0 & 0 & 0 & -y_{21}^0 & 1 + y_{21}^0 - y_{22}^1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Запишем матричное полиномиальное уравнение регулятора

$$Y(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 4s + y_{11}^0 & y_{12}^1 s + y_{12}^0 \\ y_{21}^0 & y_{22}^1 s + y_{22}^0 \end{bmatrix}; \; X(s) = \begin{bmatrix} (6 - y_{11}^0)s^2 + 4s + 1 & (-6 + y_{11}^0 - y_{12}^1)s^2 + (-4 - y_{12}^0)s - 1 \\ -y_{21}^0 s^2 & (1 + y_{21}^0 - y_{22}^1)s^2 + (2 - y_{22}^0)s + 1 \end{bmatrix}.$$

Это общее решение, содержащее свободные параметры, которые можно задавать произвольно. У нас появились шесть свободных параметров, которые следует каким-либо образом задать.

Если зададим $y_{12}^0 = y_{21}^0 = y_{12}^1 = 0,\; y_{22}^0 = y_{22}^1 = 1,\; y_{11}^0 = 6$, то получим строго правильный регулятор по первому каналу и правильный по второму каналу:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 4s + 6 & 0 \\ 0 & -s + 1 \end{bmatrix}; \; X(s) = \begin{bmatrix} 4s + 1 & -4s - 1 \\ 0 & s + 1 \end{bmatrix}.$$

В данном случае у системы один ноль, равный $-1/4$, и в установившемся режиме ошибки отсутствуют, т. к. $W_{cl}(0) = I$, где I – единичная матрица.

Можем воспользоваться свободными параметрами и получить регулятор, обеспечивающий астатизм, например третьего порядка по первому каналу и второго порядка по второму каналу, если зададим $y_{11}^0 = y_{12}^0 = y_{21}^0 = y_{22}^0 = 0,\ y_{22}^1 = 1$ и $y_{12}^1 = -6$:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 4s & -6s \\ 0 & s \end{bmatrix};\ X(s) = \begin{bmatrix} 6s^2 + 4s + 1 & -4s - 1 \\ 0 & 2s + 1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае нули системы равны $-0{,}5;\ -0{,}333 \pm 0{,}236i$.

Для проверки правильности расчетов вычислим полиномиальную характеристическую матрицу системы

$$C(s) = \mathrm{diag}\{1 + 4s + 6s^2 + 4s^3 + s^4,\ 1 + 2s + s^2\},$$

которая совпадает с желаемой (13).

Таким образом, на примерах показано, как, задав строчные степени регулятора, в соответствии с теоремой существования решения получить общее решение системы линейных уравнений с матрицей Сильвестра, соответствующее правильному/строго правильному регулятору.

Алгоритм синтеза многоканальных регуляторов

Предполагается, что задано правое строго правильное матричное полиномиальное разложение передаточной функции объекта

$$W_{ob}(s) = N_r(s) D_r^{-1}(s),$$

где

$$D_r(s) = \sum_{i=0}^{n} D_{r_i} s^i;\ N_r(s) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{r_i} s^i,$$

такие, что $\deg N_r(s) < \deg D_r(s)$; $\dim D_{r_i} = \dim N_{r_j} = p \times p$, где p – число каналов.

Если дана матричная передаточная функция, то необходимо осуществить переход к полиномиальному разложению. Это легче осуществить для левого полиномиального разложения, для чего достаточно найти наименьшее общее кратное знаменателей строк, что позволяет выписать $D_l(s)$. Произведение $D_l(s)$ на $W_{ob}(s)$ соответствует ($D_l(s) W_{ob}(s) = N_l(s)$). По левому разложению, точнее по $D_l(s)$, выпишем строчные индексы ν_i, а ν выбирается $\nu = \max(\nu_1, \nu_2, \nu_p)$.

Далее следует перейти от левого к правому разложению в соответствии с последовательностью решения задачи синтеза, одновременно это позволит нам проверить взаимную простоту левого разложения. Для этого привести матрицу $\left[D_l(s), N_l(s)\right]^t$ к верхнетреугольному виду: выполняем элементарные строчные операции, что соответствует умножению матрицы слева на унимодальные матрицы $L_i(s)$. После выполнения нескольких действий получим правое взаимно простое полиномиальное разложение, а также наибольший общий делитель для левого разложения. Алгоритм синтеза регулятора приведен ниже. Если имеется общий не унимодальный множитель, его следует вставить в характеристическую матрицу системы. Ниже приведен алгоритм синтеза регулятора, состоящий из 18 шагов.

Шаг 1. В виде дифференциальных уравнений выписать математическое описание объекта и перейти к изображениям, для этого заменить d/dt на s или, если дана матричная передаточная функция объекта, перейти на следующий шаг.

Шаг 2. Найти левое полиномиальное разложение (возможно не взаимно простое) по передаточной функции объекта, найти строчные индексы $v_1, v_2, ..., v_p$ и строчный индекс $v = \max(v_1, v_2, ..., v_p)$. Вычислить правое взаимно простое полиномиальное разложение по левому разложению и найти столбцовые индексы $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$, а также столбцовый индекс $\mu = \max(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p)$.

Шаг 3. Проверка столбцовой приведенности, т. е. проверка равенства $\mu_1 + \mu_2 + \mu_p = \deg\det D_r(s) = n$. Если матрица не столбцово приведенная, ее легко преобразовать к столбцово приведенной (умножением на унимодальную матрицу справа).

Шаг 4. Выбрать строчный/столбцовый степень регулятора $m_i \geq v - 1$: можно выбрать равные m_i (или не равные m_i) и выписать полиномиальные матрицы «числителя» и «знаменателя» регулятора $X(s) = X_0 + X_1 s + \cdots + X_m s^m$ и $Y(s) = Y_0 + Y_1 s + \cdots + Y_m s^m$.

Шаг 5. Выбрать степень и структуру характеристической полиномиальной матрицы системы: $f = \max\limits_i (f_i)$, где $f_i = m_i + \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, и выписать ее вид $C(s) = C_0 + C_1 s + \cdots + C_f s^f$.

Шаг 6. При необходимости сделать проверку невырожденности коэффициентной матрицы C_h по формуле

$$\lim_{s \to \infty} H_r^{-1}(s) C(s) H_c^{-1}(s) = C_h.$$

При правильном выборе m_i и f_i, где $i = 1, 2, \ldots, p$, C_h будет невырожденной.

Шаг 7. Переход от полиномиальных матриц к числовым матрицам и составление системы линейных уравнений $\Im \Re_m = \bar{C}$ (5); формирование матрицы Сильвестра $\Re_m$ размером $m + 1$ блочных строк и $\mu + 1$ блочных столбцов и матриц $\Im$ и $\bar{C}$, где

$$\Im := [Y_0\, X_0\; Y_1\, X_1 \ldots Y_m\, X_m]; \quad \bar{C} := [C_0\; C_1 \ldots C_{\mu+m}].$$

Шаг 8. Если нет нулевых столбцов и линейно зависимых строк – переход на шаг 9. Если существуют – переход на шаг 11.

Шаг 9. Решение уравнения $\Im \Re_m = \bar{C}$: $\Im = \bar{C} \Re_m^{-1}$.

Шаг 10. Формирование полиномиальных матриц $X(s)$ и $Y(s)$; выполнение проверки вычислений – по известным $N_r(s)$, $D_r(s)$, $X(s)$ и $Y(s)$ вычисление характеристической полиномиальной матрицы $C(s)$. *Конец.*

Шаг 11. Определение линейно независимых N-строк матрицы $\Re_m$ в направлении *сверху вниз*, если транспонировать ее, то в направлении *слева направо* при помощи команды $[q, r] = qr(\Re_m^t)$ (количество γ линейно зависимых N-строк можно вычислить по формуле $\gamma = pv - n$).

Шаг 12. Проверка совпадения значений строчных индексов ν_i, вычисленных на 2-м и 11-м шаге.

Шаг 13. Удаление нулевых столбцов (и определение их количества α по формуле $\alpha = p\mu - n$) из матриц $\Re_m$ и $\bar{C}$. Формирование матриц $\tilde{\Re}_m$ и $\bar{C}_1$.

Шаг 14. Составление системы линейных уравнений вида $\Im \tilde{\Re}_m = \bar{C}_1$.

Шаг 15. Перенести направо произведение линейно зависимых строк (определенных на 11-м шаге) на соответствующие столбцы из матрицы $\Im$ и составить систему линейных уравнений $\Im_1 \hat{\Re}_m = \bar{C}_2$. Здесь $\bar{C}_2 = \bar{C}_1 - (j_1 r_1 + \cdots + j_k r_i)$, где $j_1 r_1$ – произведение первого столбца матрицы $\Im$ и первой строки матрицы $\tilde{\Re}_m$, $j_k r_i$ – произведение k-го столбца матрицы $\Im$ и i-й строки матрицы $\tilde{\Re}_m$ ($r_1, \ldots, r_i$ – линейно зависимые строки).

Шаг 16. Решение уравнения $\Im_1 \hat{\Re}_m = \bar{C}_2$, что несложно сделать ввиду невырожденности $\hat{\Re}_m$: $\Im_1 = \bar{C}_2 \hat{\Re}_m^{-1}$, в результате которого появляются *свободные параметры* регулятора.

Шаг 17. Вернуться от $\mathfrak{I}_1$ к $\mathfrak{I}$, от $\hat{\mathfrak{R}}_m$ к $\mathfrak{R}_m$ и от $\overline{C}_2$ к $\overline{C}$.

Шаг 18. Выписать полиномиальные матрицы $X(s)$ и $Y(s)$, включающие свободные параметры; проверить вычисления: по известным $N_r(s)$, $D_r(s)$, $X(s)$ и $Y(s)$ вычислить характеристическую полиномиальную матрицу $C(s)$.

Заключение

В работе приводится сравнение алгоритмов синтеза многоканальных регуляторов, предложенных в диссертационных работах [14–16], алгоритма Чена, опирающегося на теорему, изложенную в [2], с алгоритмом, разработанным в данной статье. Основные требования, изложенные в Theorem 9.M2 [2] – это взаимно простое полиномиальное матричное правое разложение, строгая правильность объекта и столбцовая приведенность $D_r(s)$. Как и в большинстве работ по синтезу многоканальных регуляторов, в предложенном исследовании выполнен переход от полиномиальных выражений к числовым матрицам, использующим матрицу Сильвестра, которая в общем случае вырожденная. Ключевым является вопрос преобразования этого матричного числового уравнения, в результате которого матрица Сильвестра становится квадратной и невырожденной, что дает возможность вычислить полиномиальные матрицы регулятора. Также рассмотрен случай, который не встречается в названных выше работах, а именно, когда степень регулятора равна степени объекта, что усложняет задачу синтеза. Приведен подробный формализованный алгоритм синтеза регуляторов, особенностью которого является возможность введения дополнительных (так называемых свободных) параметров, позволяющих обеспечивать дополнительные требования к системе автоматического управления.

В предлагаемом алгоритме линейно зависимые строки матрицы Сильвестра переносятся в правую часть системы уравнений – появляются свободные параметры, позволяющие выполнить дополнительные требования к системе автоматического управления. При этом имеется возможность:

– получить матричное характеристическое уравнение с заданными полюсами системы;
– синтезировать правильный регулятор с заданными порядками астатизма по каналам;
– добиться удовлетворительного расположения нулей системы;
– решить задачу автономизации каналов в статическом или динамическом режиме.

В вышеназванных работах, как правило, свободные параметры задают нулевыми, что соответствует частному решению диофантова уравнения с использованием матрицы Сильвестра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986. 263 с.
2. *Chen C. T.* Linear System Theory and Design. Third Edition. New York; Oxford, 1999. 334 p.
3. *Chen C. T.* Linear System Theory and Design. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984. 636 p.
4. *Kailath T.* Linear Systems. New Jersey: Prentice Hall, 1980. 350 p.
5. *Dorf R. C.* Modern control systems. Harlow: PIARSON, 2011. 1111 p.
6. *Albertos P., Sala A.* Multivariable control systems: an engineering approach. Springer, 2004. 340 p.
7. *Bonivento C., Isidori A., Marconi L., Rossi C.* Advances in control theory and application. Springer, 2007. 306 p.
8. *Isidori A.* Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer, 2016. 414 p.
9. *Astrom K. J., Murray R. M.* Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. United Kingdom: Princeton University Press, 2008. 409 p.
10. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учеб. пособие. М.: Физматлит, 2004. 464 с.
11. *Волгин Л. Н.* Оптимальное дискретное управление динамическими системами / под ред. П. Д. Крутько. М.: Наука, 1986. 240 с.
12. *Гайдук А. Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.
13. *Гайдук А. Р.* Теория автоматического управления. М.: Высш. шк., 2010. 415 с.

14. *Мелешкин А. И.* Модальный синтез регуляторов пониженного порядка: дис. … канд. техн. наук. Новосибирск: НГТУ, 1999. 166 с.

15. *Шоба Е. В.* Модальный метод синтеза многоканальных динамических систем с использованием полиномиального разложения: дис. … канд. техн. наук. Новосибирск: НГТУ, 2013. 192 с.

16. *Вороной В. В.* Полиномиальный метод расчета многоканальных регуляторов пониженного порядка: дис. … канд. техн. наук. Новосибирск: НГТУ, 2013. 173 с.

17. *Бобобеков К. М.* О структурных преобразованиях многоканальных линейных систем в матричном полиномиальном представлении // Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. 2017. № 2 (67). С. 7–25.

18. *Воевода А. А*. Стабилизация двухмассовой системы: модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения // Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. 2010. № 1 (38). С. 195–198.

19. *Воевода А. А., Бобобеков К. М.* Синтез линейных многоканальных регуляторов с использованием структурных преобразований // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 4. С. 7–20.

20. *Воевода А. А., Бобобеков К. М.* Решение переопределенной линейной системы уравнений при полиномиальном синтезе регуляторов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2017. № 4 (56). С. 84–99.

21. *Воевода А. А., Бобобеков К. М.* Автономность и астатизм в многоканальной системе с двухпараметрическим регулятором // Сб. науч. тр. НГТУ. 2017. № 3 (89). С. 7–31.

22. *Воевода А. А., Шоба Е. В.* О разрешимости задачи автономизации многоканальной системы. Ч. 1 // Сб. науч. тр. НГТУ. 2010. № 2 (60). С. 16–25.

Статья поступила в редакцию 31.10.2018

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Бобобеков Курбонмурод Мулломиракович – Россия, 630073, Новосибирск; Новосибирский государственный технический университет; аспирант кафедры автоматики; kurbon_111@mail.ru.

POLYNOMIAL METHOD FOR THE SYNTHESIS OF MULTICHANNEL SYSTEMS BY TRANSITION TO MATRIX POLYNOMIAL REPRESENTATION

K. M. Bobobekov

Novosibirsk State Technical University,
Novosibirsk, Russian Federation

Abstract. Polynomial methods for synthesizing linear regulators for automatic control systems with linear objects, proposed by a number of authors, including Chen, Kailath, Gaiduk, and others, along with methods of synthesis in the state space, are becoming increasingly widespread. The synthesis of multichannel regulators caused by the need to use the matrix polynomial calculus is of a special difficulty, which is aggravated by a significant increase in the dimension of the matrices during the transition from polynomial matrices to numeric ones, in which Sylvester matrices are used. Herewith, it is necessary to take into account the requirements of controllability and observability, leading to the need to check for the presence of identical roots in polynomial matrices corresponding to the numerator and denominator of the object. This leads to the requirement of a relatively prime matrix polynomial fraction, which can be significantly weakened if it is possible to include in the desired characteristic matrix of the system some zeros and poles of the object located far to the left of the imaginary axis. In calculations using numerical matrices and, consequently, using Sylvester matrices, the latter degenerate due to the lowering of the rank, which complicates the calculations. The research continues to study polynomial synthesis of multichannel regulators based on the results obtained by Chen and other researchers and presents an algorithm for the synthesis of regulators, the feature of which is the possibility of introducing additional so-called free parameters that allow additional requirements for the automatic control system. The free parameters allow to obtain strictly proper regulators, along with the proper regulators.

Key words: synthesis of linear multi-channel systems, matrix transfer function, left/right matrix polynomial expansion, relatively prime polynomial expansion, Sylvester matrices, free parameters, astaticism of the first and second order, synthesis algorithm of the regulator, characteristic matrix.

For citation: Bobobekov K. M. Polynomial method for the synthesis of multichannel systems by transition to matrix polynomial representation. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*. 2019;1:7-25. (In Russ.) DOI: 10.24143/2072-9502-2019-1-7-25.

REFERENSES

1. Aleksandrov A. G. *Sintez reguliatorov mnogomernykh sistem* [Synthesis of regulators of multivariate systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 263 p.

2. Chen C. T. *Linear System Theory and Design*. Third Edition. New York, Oxford, 1999. 334 p.

3. Chen C. T. *Linear System Theory and Design*. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1984. 636 p.

4. Kailath T. *Linear Systems*. New Jersey, Prentice Hall, 1980. 350 p.

5. Dorf R. C. *Modern control systems*. Harlow, PIARSON, 2011. 1111 p.

6. Albertos P., Sala A. *Multivariable control systems: an engineering approach*. Springer, 2004. 340 p.

7. Bonivento C., Isidori A., Marconi L., Rossi C. *Advances in control theory and application.* Springer, 2007. 306 p.

8. Isidori A. *Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing*. Springer, 2016. 414 p.

9. Astrom K. J., Murray R. M. *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. United Kingdom, Princeton University Press, 2008. 409 p.

10. Kim D. P. *Teoriia avtomaticheskogo upravleniia. T. 2. Mnogomernye, nelineinye, optimal'nye i adaptivnye sistemy: uchebnoe posobie* [Theory of automatic control. Vol. 2. Multivariate, nonlinear, optimal and adaptive systems: teaching guide]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 464 p.

11. Volgin L. N. *Optimal'noe diskretnoe upravlenie dinamicheskimi sistemami* [Optimal discrete management of dynamic systems]. Pod redaktsiei P. D. Krut'ko. Moscow, Nauka Publ., 1986. 240 p.

12. Gaiduk A. R. *Teoriia i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniia (polinomial'nyi podkhod)* [Theory and methods of analytic synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p.

13. Gaiduk A. R. *Teoriia avtomaticheskogo upravleniia* [Theory of automatic control]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 2010. 415 p.

14. Meleshkin A. I. *Modal'nyi sintez reguliatorov ponizhennogo poriadka: dis. kand. tekhn. nauk* [Modal synthesis of regulators of lower order: Diss. Cand.Tech.Sci.]. Novosibirsk, NGTU, 1999. 166 p.

15. Shoba E. V. *Modal'nyi metod sinteza mnogokanal'nykh dinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniia: dis. kand. tekhn. nauk* [Modal method of synthesis of multichannel dynamic systems using polynomial expansion: Diss.Cand.Tech.Sci.]. Novosibirsk, NGTU, 2013. 192 p.

16. Voronoi V. V. *Polinomial'nyi metod rascheta mnogokanal'nykh reguliatorov ponizhennogo poriadka: dis. kand. tekhn. nauk* [Polynomial method of analysis of multichannel regulators of lower order: Diss. Cand.Tech.Sci.]. Novosibirsk, NGTU, 2013. 173 p.

17. Bobobekov K. M. O strukturnykh preobrazovaniiakh mnogokanal'nykh lineinykh sistem v matrichnom polinomial'nom predstavlenii [On structural transformations of multichannel linear systems in matrix polynomial representation]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2017, no. 2 (67), pp. 7-25.

18. Voevoda A. A. Stabilizatsiia dvukhmassovoi sistemy: modal'nyi metod sinteza s ispol'zovaniem polinomial'nogo razlozheniia [Stabilization of dual-mass system: modal method of synthesis using polynomial expansion]. *Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universitet*a, 2010, no. 1 (38), pp. 195-198.

19. Voevoda A. A., Bobobekov K. M. Sintez lineinykh mnogokanal'nykh reguliatorov s ispol'zovaniem strukturnykh preobrazovanii [Synthesis of linear multichannel regulators using structural transformations]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2017, no. 3, pp. 7-20.

20. Voevoda A. A., Bobobekov K. M. Reshenie pereopredelennoi lineinoi sistemy uravnenii pri polinomial'nom sinteze reguliatorov [Solution of overdetermined linear system of equations under polynomial synthesis of regulators]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*, 2017, no. 4 (56), pp. 84-99.

21. Voevoda A. A., Bobobekov K. M. Avtonomnost' i astatizm v mnogokanal'noi sisteme s dvukhparametricheskim reguliatorom [Autonomy and astaticism in a multichannel system with two-parameter regulator]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*, 2017, no. 3 (89), pp. 7-31.

22. Voevoda A. A., Shoba E. V. O razreshimosti zadachi avtonomizatsii mnogokanal'noi sistemy. Ch. 1 [On solubility of problem of autonomism of multichannel system. Part 1]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*, 2010, no. 2 (60), pp. 16-25.

The article submitted to the editors 31.10.2018

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Bobobekov Kurbonmurod Mullomirakovich – Russia, 630073, Novosibirsk; Novosibirsk State Technical University; Postgraduate Student of the Department of Automatics; kurbon_111@mail.ru.