И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Трехвалентные графы и солитоны, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 149–150

DOI: 10.4213/rm239

1999 г. ноябрь — декабрь *т. 54, вып. 6(330)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ТРЕХВАЛЕНТНЫЕ ГРАФЫ И СОЛИТОНЫ

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

До недавнего времени нелинейные интегрируемые системы были известны только на решетках $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$ ((L,A)-пары типа цепочки Тода для $\mathbb{Z}$ и (L,A,B)-тройки для $\mathbb{Z}^2$, равно как и дискретные спектральные симметрии линейного оператора L второго порядка типа преобразований Эйлера–Дарбу и Лапласа – см. [1]). Заметим, что трехвалентное дерево Γ_3 представляет собой дискретную модель гиперболической геометрии – плоскости Лобачевского, а не Евклида, в отличие от $\mathbb{Z}^2$. Никаких изоспектральных деформаций операторов L второго порядка на Γ_3 обнаружить не удалось – даже и в виде (L,A,B)-тройки $\dot L = LA - BL$, деформирующем лишь один спектральный уровень $L\Psi = 0$ (см. [2]–[4]).

Порядком уравнения $L\Psi = 0$, где $(L\Psi)_P = \sum_Q b_{P,Q}\Psi_Q$, называется максимальный диаметр $\max_P d(Q_1,Q_2)$, где $b_{P,Q_1} \neq 0, b_{P,Q_2} \neq 0$ или $b_{Q_1,Q_2} \neq 0$. Метрика на графе определяется так, что длина ребра равна 1; здесь Ψ_P – это функция от вершин P.

Мы рассматриваем графы, где каждое ребро имеет ровно две вершины и в каждой вершине сходится 3 ребра.

Теорема 1. *Общий вещественный самосопряженный оператор L четвертого порядка на дереве Γ_3 обладает изоспектральными деформациями одного уровня энергии $L\Psi = 0$ в виде (L,A,B)-тройки*:

$$\dot L = LA - BL$$

где

$$(L\Psi)_P = \sum b_{PP''}\Psi_{P''} + b_{PP'}\Psi_{P'} + w_P\Psi_P,$$

P, P', P'' – вершины, $d(P,P'') = 2$, $d(P,P') = 1$, и мы предполагаем, что $b_{P,P''} > 0$. При этом $B = -A^t$, $(A\Psi)_P = \sum c_{PP'}\Psi_{P'}$.

Для выражения коэффициентов $c_{P,P'}$ для ближайших соседей P, P' мы выберем начальную вершину Γ_3, обозначаемую через P_0. Возьмем минимальный путь γ, состоящий из ребер $R_i \in \gamma$, соединяющий P_0 и P и ориентированный от P_0 к P. Пусть ребра R'_{i_1}, R'_{i_2} сходятся в начальной вершине ребра R_i, а ребра R''_{i_1}, R''_{i_2} расходятся в конечной вершине ребра R_i. Рассмотрим мультипликативный 1-коцикл на Γ_3 такой, что

$$\chi(R_i) = -\frac{(b_{R''_{i_1}R_i} \cdot b_{R''_{i_2}R_i})}{(b_{R'_{i_1}R_i} \cdot b_{R'_{i_2}R_i})}.$$

По определению положим

$$c_R = -\frac{1}{b_{R_1'R_2'}}\Big(\prod_{R_i\in\gamma}\chi(R_i)\Big), \qquad R = PP'.$$

Эти формулы получаются из условия, что оператор $LA + A^tL$ имеет порядок не более 4. После этого динамическая система $\dot{L} = LA + A^tL$ корректно определена. Она имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{b}_{PP''} &= b_{P'P''}c_{P'P} + c_{P'P}b_{P'P};\\ \dot{b}_{PP'} &= b_{P'P_i''}c_{P_i''P'} + c_{P_\alpha^*P}b_{P_\alpha^*P'} + w_Pc_{PP'} + w_{P'}c_{P'P};\\ \dot{w}_P &= 2b_{PP'}c_{P'P}, \quad i,\alpha = 1,2. \end{aligned}$$

Здесь $P_\alpha^*PP'P_i''$ – это кратчайшие пути длинны $d = 3$, содержащие отрезок $PP' = R$.

Замечание 1. Для любого тривалентного графа Γ коэффициенты $c_{PP'}$ оператора A определены на абелевой накрывающей Γ, определяемой 1-коциклом χ (выше), вдоль 1-циклов.

Теорема 2. *Общий самосопряженный вещественный оператор L четвертого порядка на дереве Γ_3 допускает однопараметрическое семейство факторизации вида*

$$L = Q^tQ + u_P, \quad \textit{где} \quad (Q\psi)_P = \sum_Q d_{PQ}\psi_Q + v_P\psi_P,$$

где

$$b_{PP''} = d_{P'P}d_{P'P''}; \qquad b_{PP'} = d_{P'P}v_{P'} + d_{PP'}v_P,$$
$$w_P = v_P^2 + \sum_{P'} d_{P'P}^2 + u_P \quad (\textit{пусть} \;\; d_{PQ} > 0).$$

При этом коэффициенты d_{PQ} определены однозначно, коэффициент v_P определяется одним параметром – значением в избранной центральной точке $P_0 \in \Gamma_3$. Эта факторизация определяет преобразование типа Лапласа

$$\widetilde{L} = Qu_P^{-1}Q^t + 1, \qquad \tilde{\psi} = Q\psi,$$

где $\widetilde{L}\tilde{\psi} = 0$, если $L\psi = 0$. Самосопряженный оператор $\widetilde{L}$ определен с точностью до преобразования

$$\widetilde{L} \to f_P^{-1}\cdot\widetilde{L}\cdot f_P, \qquad \tilde{\psi} \to f_P^{-1}\cdot\tilde{\psi}.$$

Удобно выбрать $f_P = u_P^{1/2}$. Тогда мы имеем $\widetilde{L} = \widetilde{Q}^t\widetilde{Q} + u_P$, где

$$\widetilde{Q} = u_P^{-1/2}Q^tu_P^{1/2}, \qquad \tilde{\psi} = u_P^{-1/2}Q\psi$$

(ср. [5] для $\mathbb{Z}^2$).

Замечание 2. Факторизация оператора L зависит только от разрешимости линейного уравнения $b_{PQ} = d_{QP}v_Q + d_{PQ}v_P$. Кстати, этот оператор обладает нетривиальным (одномерным) ядром, если и только если коцикл χ (выше) – когомологичен нулю на графе Γ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Новиков С., Дынников И. // УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 175–234. [**2**] Манаков С. // УМН. 1976. Т. 31. № 5. С. 245–246. [**3**] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. С. 15–18. [**4**] Novikov S., Veselov A. // Physica D. 1986. V. 18. P. 267–273. [**5**] Novikov S., Veselov A. // Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 109–132.

University of Maryland at College Park

Принято редколлегией
02.10.1999