Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. Бокан, П. Гилькей, У. Симон, Локальные аффинные инварианты второго порядка,
Изв. вузов. Матем., 1995, номер 5, 11–15

https://www.mathnet.ru/ivm1736

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
16 июня 2025 г., 13:08:09

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1995 МАТЕМАТИКА № 5 (396)

УДК 514.75

Н. БОКАН, П. ГИЛЬКЕЙ, У. СИМОН

ЛОКАЛЬНЫЕ АФФИННЫЕ ИНВАРИАНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Инварианты Кодацци

Понятия сопряженной тройки и преобразования Кодацци являются основными в аффинной дифференциальной геометрии. За деталями мы отсылаем к ([1], [4], § 4.4), а здесь лишь суммируем необходимые результаты. Будем говорить, что совокупность (∇, g, ∇^*) является сопряженной тройкой, если g – риманова метрика, а ∇ и ∇^* – связности без кручения с симметрическими тензорами Риччи, причем для любых векторных полей U, V, W выполняется условие

$$Ug(V,W) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla^*_U W).$$

В этом случае выполняются условия Кодацци, т.е. ∇g и $\nabla^* g$ являются симметрическими тензорами типа (0. 3), и связность Леви-Чивита ∇^g метрики g может быть записана в виде $\nabla^g = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$. Здесь и далее будем предполагать, что метрика g положительно определенная, хотя рассуждения легко распространяются и на случай неопределенной метрики.

Существует другая полезная точка зрения. Определим тензор

$$C := \nabla^g - \nabla^* = \nabla - \nabla^g.$$

Тогда по отношению к локальному полю орторепера e_i в $T\mathcal{M} = T^*\mathcal{M}$ имеем

$$C_{ijk} := g((\nabla^g_{e_i} - \nabla^*_{e_i})e_j, e_k).$$

Используем правило Эйнштейна и будем производить суммирование по парам одинаковых индексов. Из результатов работы ([4], § 4, 1–3 и § 4, 4.8) непосредственно вытекает

ЛЕММА 1.1. *Пусть g – риманова метрика и (∇, ∇^*) – связности на $T\mathcal{M}$, определяемые равенствами $\nabla = \nabla^g + C$ и $\nabla^* = \nabla^g - C$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) (∇, g, ∇^*) – *сопряженная тройка*;

(б) $C_{ijk} = C_{jik} = C_{ikj}$ *и* $C_{iij;k} = C_{iik;j}$.

Изменим нашу точку зрения и впредь будем отождествлять тройку Кодацци с парой $Z = (g, C)$, где g – риманова метрика на $\mathcal{M}$, а тензор C удовлетворяет условиям симметрии (б) леммы 1.1. Пусть пара $\beta(Z)$ для $\beta = e^{2\varphi}$ определена с помощью закона преобразования ([4], с. 87–88):

$$\tilde{g} = e^{2\varphi} g,$$

$$\tilde{C}(U,V,W) = e^{2\varphi}\{C(U,V,W) - U(\varphi)g(V,W) - V(\varphi)g(U,W) - W(\varphi)g(U,V)\}.$$

Используя терминологию из [1], назовем такое преобразование преобразованием Кодацци. Пусть $\mathcal{P}_{2k}$ – множество таких локальных инвариантов $P = P(Z)$, что

$$P(\beta(Z)) = \beta^{-k}P(Z).$$

Пусть dv_g – мера, отвечающая римановой метрике g. Если $P \in \mathscr{P}_m$, то

$$P(Z)dv_g = P(\beta(Z))dv_{\beta(g)}.$$

ПРИМЕР. Пусть $\mathscr{M}$ – невырожденная аффинная гиперповерхность и пусть (∇, g, ∇^*) – сопряженная тройка, определенная некоторой нормализацией (подробности см. в [1], § 6). Сопряженные тройки, определяемые другими нормализациями, отличаются одна от другой преобразованием Кодацци. Поэтому выражение в левой части предыдущего равенства не зависит от выбора релятивной нормализации; это свойство лежит в основе нашего исследования. Вообще, если $P \in \mathscr{P}_j$, то Pdv_g^ε является инвариантной плотностью при выборе надлежащего ε.

Пусть τ^g – скалярная кривизна метрики g. Обозначим символом (;) кратное ковариантное дифференцирование относительно связности Леви–Чивита.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для $\mathscr{P}_2$ образуют базис следующие инварианты:*

$$\mathscr{E}_1 := -\frac{m+2}{m-1}\tau^g + C_{iij;j} + \frac{1}{2}C_{iik}C_{jjk},$$

$$\mathscr{E}_2 := 3C_{ijj}C_{ikk} - (m+2)C_{ijk}C_{ijk}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Член $C_{iij;j}$ имеет вид дивергенции. В аффинной геометрии он может быть выражен как лапласиан известной функции ([4], §4.4.8 и §5.1.3. iii). Чебышевская 1-форма удовлетворяет равенству $mT_i=C_{ijj}$. Условие аполярности в эквиаффинной геометрии дает $T=0$. Тогда в любой релятивной геометрии с опорной функцией s имеем

$$T = -\frac{m+2}{2m}d\log\frac{s}{s(e)},$$

где $s(e)$ – эквиаффинная опорная функция.

Теорема 1.1 непосредственно следует из следующей леммы.

ЛЕММА 1.2.

(а) *Пусть P – локальный инвариант со свойством $P(\beta(Z))=\beta^{-1}P(Z)$, $\forall\beta\in R^+$. Тогда*

$$P = c_1\tau^g+c_2C_{ijj}C_{ikk}+c_3C_{ijk}C_{ijk}+c_4C_{iij;j}.$$

(б) *Пусть $\beta=e^{2\varepsilon\varphi}$ и $(g(\varepsilon), C(\varepsilon))=\beta(\varepsilon)(g, C)$. Тогда*

(i) $$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\tau^g = \{-2\varphi\tau^g-2(n-1)\varphi_{;ii}\}\Big|_{\varepsilon=0},$$

(ii) $$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}C_{ijk}C_{ijk} = \{-2\varphi C_{ijk}C_{ijk}-6C_{iik}\varphi_{;k}\}\Big|_{\varepsilon=0},$$

(iii) $$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}C_{ijj}C_{ikk} = \{-2\varphi C_{ijj}C_{ikk}-2(m+2)C_{iik}\varphi_{;k}\}\Big|_{\varepsilon=0},$$

(iv) $$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}C_{iij;j} = \{-2\varphi C_{iij;j}-(m+2)\varphi_{;ii}+(m-2)\varphi_{;i}C_{ijj}\}\Big|_{\varepsilon=0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (а) вытекает из теоремы Г. Вейля об инвариантах ортогональной группы. В отношении (i) отошлем читателя к ([2], с.269). Для доказательства (ii) и (iii) находим, используя преобразование Кодацци:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}C_{ijk}C_{ijk} = -2\varphi C_{ijk}C_{ijk}-2C_{ijk}(\varphi_{;i}\delta_{jk}+\varphi_{;j}\delta_{ik}+\varphi_{;k}\delta_{ij}),$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}C_{ijj}C_{ikk} = -2\varphi C_{ijj}C_{ikk}-2C_{ijj}(\varphi_{;i}\delta_{kk}+2\varphi_{;k}\delta_{ik}).$$

Чтобы доказать (iv), выводим

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} C_{iij;j}(\varepsilon) = -\{2\varphi C_{iij;j}+a(m)\varphi_{;ii}+b(m)\varphi_{;i}C_{ijj}\}(0).$$

Если метрика g плоская, то

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} C_{iij;j} = -\partial_\nu(\delta_{\eta\eta}\partial_\nu\varphi+2\delta_{\eta\nu}\partial_\eta\varphi) = -(m+2)\varphi_{;\nu\nu},$$

т.е. $a(m)=-(m+2)$. Так как $\int C_{iij;j}dv_g=0$ и $\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} dv_g=m\varphi dv_g$, то

$$0 = \int_{\mathscr{M}} \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(C_{iij;j}dv_g) = \int_{\mathscr{M}}\{(m-2)\varphi C_{iij;j}+a(m)\varphi_{;ii}+b(m)\varphi_{;j}C_{iij}\}dv_g.$$

Так как $\int\varphi_{;j}C_{iij}dv_g=-\int\varphi C_{iij;j}dv_g$, то $b(m)=m-2$.

§ 2. Аффинная геометрия

Пусть число $m=2k$ четное. Заметим, что $\mathscr{P}_2^k\subseteq\mathscr{P}_m$. Пусть $P\in\mathscr{P}_m$ и $\mathscr{M}$ – невырожденная аффинная гиперповерхность, (∇, g, ∇^*) – сопряженная тройка, определенная некоторой нормализацией; сопряженные тройки, определенные другими нормализациями, получаются из нее преобразованиями Кодацци [1]. Поэтому, как отмечено в § 1, $P(\nabla, g, \nabla^*)dv_g$ является аффинно инвариантной мерой. Заметим, что $\{\mathscr{E}_1^i\mathscr{E}_2^j dv_g\}_{i+j=k}$ дают $k+1$ локальных инвариантов гиперповерхности $\mathscr{M}$. Пусть

$$\tau := \mathrm{trace}_g\mathrm{Ric}(\nabla), \quad \tau^* := \mathrm{trace}_g\mathrm{Ric}(\nabla^*)$$

– обобщенные скалярные кривизны связностей ∇ и ∇^*. Пусть H – релятивная средняя кривизна и J – релятивный инвариант Пика. В ([4], сс. 58, 60, 69, 62) были доказаны формулы

$$mT_i = C_{ijj},$$
$$\tau = \tau^g-C_{ijk}C_{ijk}+C_{iij}C_{kkj} = m(m-1)H = \tau^*,$$
$$m(m-1)J = C_{ijk}C_{ijk}.$$

В статье [1] были введены инварианты a_n уравнения теплопроводности, а также след гессиана $\mathscr{D}(g, \nabla^*)$. Там же было показано, что

$$\int_{\mathscr{M}} a_m(x, \mathscr{D}(g, \nabla^*))dv_g$$

является глобальным аффинным инвариантом (теорема 6.0.1) и что

$$a_{m-2}(x, \mathscr{D}(g, \nabla^*))dv_g^{(m-2)/m}$$

– инвариантно определенная, аффинно инвариантная плотность (теоремы 1.1 и 1.2). В частности, если $m=4$, то $a_2^2dv_g$ является локальным аффинным инвариантом. В теореме 6.1.3 было показано, что нормированный второй член асимптотически продолженного уравнения теплопроводности имеет вид

$$\bar{a}_2 := 12(4\pi)^2a_2(x, \mathscr{D}(g, \nabla^*)) = 2\tau^g+12mH-3m^2|T|^2-6mT_{i;i}.$$

ПРИМЕР. Пусть $m = 2$. Тогда

$$\bar{a}_2 = 2\tau^g+12\tau-3C_{iij}C_{kkj}-6C_{iij;j} = 2\tau^g+12\{\tau^g-C_{ijk}C_{ijk}+C_{iij}C_{kkj}\} -$$
$$- 3C_{iij}C_{kkj}-6C_{iij;j} = 14\tau^g+9C_{iij}C_{kkj}-12C_{ijk}C_{ijk}-6C_{iij;j}.$$

Следовательно, $\int_{\mathscr{M}}\bar{a}_2dv_g=0$, т.к.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\bar{a}_2 = -2\varphi\bar{a}_2-28\varphi_{;ii}-72\varphi_{;k}C_{iik}+72\varphi_{;k}C_{iik}+24\varphi_{;ii} = -2\varphi\bar{a}_2-4\varphi_{;ii}.$$

ПРИМЕР. Пусть $m=4$. Тогда

$$\bar{a}_2 = 2\tau^g+4\tau-3C_{iij}C_{kkj}-6C_{iij;j} = 2\tau^g+4\{\tau^g-C_{ijk}C_{ijk}+C_{iij}C_{kkj}\}-3C_{iij}C_{kkj}-6C_{iij;j} =$$
$$= 6\tau^g+C_{iij}C_{kkj}-4C_{ijk}C_{ijk}-6C_{iij;j}.$$

Следовательно, $\bar{a}_2$ – локальный инвариант, т.к.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\bar{a}_2 = -2\varphi\bar{a}_2+6(-6\varphi_{;ii})-12C_{iik}\varphi_{;k}-4(-6C_{iik}\varphi_{;k})-6(-6\varphi_{;ii}+2\varphi_{;i}C_{ijj}) = 0.$$

ЛЕММА 2.1. *Пусть $\mathcal{M}$ – гиперовалоид. В таком случае равенство $\mathcal{E}_2=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ – эллипсоид.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя ([4], (5.1.4)), получим, что для произвольной релятивной метрики $-\mathcal{E}_2=(m+2)|\tilde{C}|^2$. Поэтому из ([4], (7.1.1)) следует, что $\mathcal{E}_2=0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ – эллипсоид.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что квадратичная норма зависит от релятивной метрики. Как установлено в [1], $\int_{\mathcal{M}}\mathcal{E}_2$ (здесь и далее $\int_{\mathcal{M}}\mathcal{E}$ – сокращенное обозначение для $\int_{\mathcal{M}}\mathcal{E}dv_g$) дает функционал Пика $P(\mathcal{M})$ с точностью до постоянного множителя, а именно $\int_{\mathcal{M}}\mathcal{E}_2=-8P(\mathcal{M})$.

Пара невырожденных гиперповерхностей $x:\mathcal{M}\to V$ и $x^*:\mathcal{M}\to V^*$ называется полярной парой, если

$$\langle x, x^*\rangle = -1, \quad \langle x^*, dx\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle dx^*, x\rangle = 0.$$

Например, эти соотношения имеют место для невырожденной гиперповерхности и для ее центроаффинного конормального образа.

ТЕОРЕМА 2.1. *Рассмотрим полярную пару. Тогда:*

(а) *$\mathcal{E}_2$ – инвариант поляризации (локальный);*

(б) *для замкнутой гиперповерхности $\mathcal{M}$ интеграл $\int_{\mathcal{M}}\mathcal{E}_1$ является инвариантом поляризации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем центроаффинную нормализацию, которую можно осуществить глобально и локально (локально всегда существует необходимая окрестность). Справедливость теоремы вытекает из ([3], (7.2.1)).

ЗАМЕЧАНИЕ. Инвариант $\mathcal{E}_1$ представляет особый интерес в случае евклидовой нормализации. Евклидова чебышевская форма $T(E)$ удовлетворяет уравнению $2mT(E)=-d\log K$, где K – кривизна Гаусса–Кронекера (см. [4], с. 103). Тогда формула для $\mathcal{E}_1$ включает τ^g и вторую фундаментальную форму (как релятивную метрику) в одно дифференциальное уравнение с частными производными.

Имея в виду предыдущее замечание, укажем глобальные приложения инварианта $\mathcal{E}_1$ в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $x:\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ – гиперовалоид. Тогда*

$$\int_{\mathcal{M}}\mathcal{E}_1 + \frac{m+2}{m-1}\int_{\mathcal{M}}\tau^g \geq 0.$$

При этом:

(i) *при любой нормализации равенство выполняется тогда и только тогда, когда $T=0$;*

(ii) *для евклидовой нормализации $T=0$ тогда и лишь тогда, когда $K=\text{const}$, т.е. тогда и только тогда, когда гиперповерхность $x:\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ является сферой;*

(iii) *в центроаффинном случае* $T=0$ *тогда и только тогда, когда гиперповерхность* $x:\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ *является аффинной гиперсферой, т.е. тогда и лишь тогда, когда она является гиперэллипсоидом;*

(iv) *для (глобальной) эквиаффинной нормализации мы всегда имеем* $T=0$, *т.е. в указанном выше неравенстве мы всегда имеем равенство.*

ЗАМЕЧАНИЕ. (i) Во всякой геометрии, за исключением эквиаффинной, тождество $T=0$ влечет, как следствие, то, что опорные функции s и $s(e)$ совпадают с точностью до ненулевого постоянного множителя (см. замечание после теоремы 1.1).

(ii) Центроаффинная опорная функция удовлетворяет тождеству $s(c)=1$; это равенство совместно с условием $T=0$ приводит к тому, что $s(e)$ постоянна. Это означает, что гиперповерхность оказывается собственной аффинной сферой, а значит, по теореме Бляшке и Дейке (см. [5], III 5.5) является гиперэллипсоидом.

(iii) Рассмотрим евклидовы гиперповерхности. Пусть $\Delta(\mathrm{I})$ – оператор Лапласа для метрики I в евклидовой нормализации, $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}$ – норма по отношению к метрике I, гиперповерхность $x:\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ локально строго выпукла и $\mathcal{E}_1+\frac{m+2}{m-1}\tau(\mathrm{I})=0$. Тогда

$$\Delta(\mathrm{I})(\log K) = \frac{1}{4m}\|\operatorname{grad}\log K\|^2_{\mathrm{I}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть* $m=2$ *и гиперповерхность* $x:\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ *является овалоидом. Тогда во всякой релятивной геометрии*

$$\int\mathcal{E}_1 \geqslant -32\pi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 2.2, имеем $\int_{\mathcal{M}}\mathcal{E}_1+4\int_{\mathcal{M}}\tau^g\geqslant 0$. По теореме Гаусса-Бонне $\int_{\mathcal{M}}\tau^g=8\pi$. Следовательно, $\int\varepsilon_1\geqslant -32\pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 2.2 (i) известно, что $\int_{\mathcal{M}}\mathcal{E}_1=-32\pi$ тогда и только тогда, когда $T=0$, а это значит, что данная релятивная нормализация совпадает с эквиаффинной нормализацией. Если данная нормализация центроаффинна, то это равенство выполняется тогда и только тогда, когда овалоид является эллипсоидом. Если же данная нормализация евклидова, то указанное равенство справедливо тогда и только тогда, когда овалоид является сферой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bokan N., Gilkey P.B., Simon U. *Applications of spectral geometry to affine and projective geometry //* Contrib. Algebra and Geometry. – 1994. – V.35. – P.283–314.

2. Branson T., Gilkey P. *The asymptotics of the Laplacian on a manifold with boundary //* Comm. in Part. Diff. Equations. – 1990. – V.15. – P.245–272.

3. Oliker V., Simon U. *Affine geometry and polar hypersurfaces //* Analysis and Geometry. – 1992. – P.87–112.

4. Simon U., Schwenk-Schellschmidt A., Viesel H. *Introduction to the affine differential geometry of hypersurfaces //* Lect. Notes Sci. University Tokyo. – 1991. ISBN 3798315299.

5. Simon U. *Zur Entwicklung der affinen Differentialgeometrie nach Blaschke //* Gesammelte Werke W. Blaschke. – Essen: Thales Verlag, 1985. – Bd. 4. – S.11–34.

Берлинский технический технический университет (Германия)

Поступила 26.12.1994