

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Шаташвили, Двухпетлевое приближение в формализме внешнего поля, *ТМФ*, 1984, том 58, номер 2, 219–228

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

11 февраля 2025 г., 15:28:41



ДВУХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ФОРМАЛИЗМЕ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

Шаташвили С. Л.

Рассматривается производящий функционал для S -матрицы в теории Янга — Миллса в формализме внешнего поля. С использованием метода собственного времени явными вычислениями показано, что в двухпетлевом приближении все ультрафиолетовые расходимости устраняются единственной перенормировкой — перенормировкой заряда.

ВВЕДЕНИЕ

В стандартной теории перенормировок квантовой теории Янга — Миллса [1], которая основана на производящем функционале для функции Грина, приходится на промежуточных этапах вычисления матрицы рассеяния оперировать неинвариантными величинами. Калибровочная инвариантность наблюдаемых величин обеспечивается обобщенными тождествами Уорда [2], которые имеют достаточно сложный вид. Особенно трудно оперировать этими тождествами в таких теориях, как гравитация.

Иначе обстоит дело в формализме внешнего поля [3, 4], в котором и при учете квантовых поправок сохраняется явная калибровочная инвариантность. В этом формализме калибровочно-неинвариантные расходящиеся величины вообще не будут появляться. Обобщенные тождества Уорда выполняются тривиально. Все ультрафиолетовые расходимости должны устраняться единственной перенормировкой — перенормировкой заряда [4]. В работе [4] было высказано предположение, что в формализме внешнего поля последнее можно доказать во внутренних терминах производящего функционала для S -матрицы, и это было показано в однопетлевом приближении.

Существуют разные технические методы вычисления расходящейся части эффективного действия в однопетлевом приближении в формализме внешнего поля. В недавних работах [5, 6] некоторые из этих методов были обобщены для двухпетлевого приближения в калибровочных теориях. В первой из них с помощью обычной диаграммной техники вычисляются квантовые поправки к пропагатору внешнего поля, а во второй обобщается метод 'тХоофта [7]. Число диаграмм, которые вычисляются в этих работах, еще достаточно велико, но преимущества перед стандартной теорией перенормировок очевидны.

В данной работе для применения в двухпетлевом приближении обобщается метод собственного времени, который эффективно работает в однопетлевом приближении. В двухпетлевом приближении в рамках метода собственного времени следует вычислить только три типа диаграмм.

Цель настоящей работы — показать во внутренних терминах производящего функционала для S -матрицы с помощью метода собственного времени, что в теории Янга — Миллса в формализме внешнего поля в двухпетлевом приближении единственная перенормировка — это перенормировка заряда, вычислить β -функцию и показать преимущество избранного метода.

В первом разделе приведена необходимая информация об однопетлевом приближении. Вместо S -матрицы здесь вычисляется расширенный производящий функционал для S -матрицы $S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ (см. ниже (9)), в котором заложена более богатая информация, чем в самой S -матрице. Функционал $S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ определен и вне поверхности масс, и в этом смысле мы не до конца остаемся на массовой поверхности. Зато $S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ можно дифференцировать по внешним калибровочным полям $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$. Во втором разделе с его помощью записана S -матрица в двухпетлевом приближении с выходом в конечном счете на массовую поверхность.

Промежуточная регуляризация, которой мы будем пользоваться, заключается в следующем: функция Грина $D(x, y)$ имеет особенности при $\sigma = (x-y)^2/2 \rightarrow 0$; заменив $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$, где $\sigma_0 > 0$ — малый параметр, получим $D_{\sigma_0}(x, y)$, которая всюду — регулярная функция своих аргументов и переходит в $D(x, y)$ при $\sigma_0 \rightarrow 0$.

1. РАСШИРЕННЫЙ ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ ДЛЯ S -МАТРИЦЫ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Формализм внешнего поля позволяет непосредственно вычислять матричные элементы S -матрицы. В теории Янга — Миллса S -матрица в калибровке внешнего поля записывается в следующем виде [4]:

$$(1) \quad S(A) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int dx [\mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A+\Phi) + \mathcal{L}_{\text{кал}} + \mathcal{L}_{\text{дух}}] \right\} \prod_x d\Phi d\bar{\eta} d\eta,$$

N^{-1} — нормировочный множитель, $A_\mu = A_\mu^a T^a$, T^a — базис присоединенного представления калибровочной группы, $\text{tr}(T^a T^b) = -2\delta^{ab}$, A_μ — внешнее классическое поле, удовлетворяющее уравнениям движения, Φ_μ и η — квантовые векторные и «духовые» поля, соответственно,

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A) &= -\frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu}^a(A) G_{\mu\nu}^a(A), \\ \mathcal{L}_{\text{кал}} &= -\frac{1}{2\alpha g^2} (\nabla_\mu(A) \Phi_\mu)^a (\nabla_\nu(A) \Phi_\nu)^a, \\ \mathcal{L}_{\text{дух}} &= -(\nabla_\mu(A) \bar{\eta})^a (\nabla_\mu(A+\Phi) \eta)^a, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a(A) &= \partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ (\nabla_\mu(A))^{ab} &= \partial_\mu \delta^{ab} + f^{abc} A_\mu^c, \end{aligned}$$

α — калибровочная константа, f^{abc} — структурные константы калибровочной группы; для них имеем

$$(3) \quad f^{abc} f^{abd} = C \delta^{cd}, \quad f^{abc} f^{cdn} f^{nma} = -1/2 C f^{b\bar{a}m}.$$

По определению A_μ — классическое поле на массовой поверхности

$$(4) \quad (\nabla_\mu(A) G_{\mu\nu}(A))^a = 0.$$

S -матрица (1) инвариантна при калибровочных преобразованиях классических полей $A_\mu(x)$:

$$(5) \quad A_\mu^{\circ} = \omega A_\mu \omega^{-1} + \partial_\mu \omega \cdot \omega^{-1},$$

$\omega(x)$ — элемент группы при каждом x . Инвариантность относительно (5) проверяется легко, если одновременно сделать вращение полей Φ_μ и η без растяжения:

$$(6) \quad \Phi_\mu^{\circ} = \omega \Phi_\mu \omega^{-1}, \quad \eta^{\circ} = \omega \eta \omega^{-1}.$$

Выражение (1) не зависит от калибровки α , поэтому везде, где специально не оговорено, α принимается равной 1 (т. е. мы будем работать в фейнмановской калибровке).

Из (2) для $\mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A+\Phi)$ и $\mathcal{L}_{\text{дук}}$ имеем

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A+\Phi) = & \mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A) - \frac{1}{2g^2} (\nabla_\mu(A) \Phi_\nu)^a (\nabla_\mu(A) \Phi_\nu)^a - \\ & - \frac{1}{g^2} f^{abc} G_{\mu\nu}^a(A) \Phi_\mu^b \Phi_\nu^c + \frac{1}{2g^2} (\nabla_\mu(A) \Phi_\mu)^a (\nabla_\nu(A) \Phi_\nu)^a - \\ & - \frac{1}{g^2} f^{abc} (\nabla_\mu(A) \Phi_\nu)^a \Phi_\mu^b \Phi_\nu^c - \frac{1}{4g^2} f^{abc} f^{amn} \Phi_\mu^b \Phi_\nu^c \Phi_\mu^m \Phi_\nu^n, \end{aligned}$$

$$(8) \quad \mathcal{L}_{\text{дук}} = -(\nabla_\mu(A) \bar{\eta})^a (\nabla_\mu(A) \eta)^a + (\nabla_\mu(A) \bar{\eta})^a f^{abc} \Phi_\mu^b \eta^c.$$

Каждое слагаемое суммы в формулах (7) и (8), а также $\mathcal{L}_{\text{кал}}$ инвариантны при совместных вращениях (5) и (6).

С точки зрения R -операции рассматриваемая теория перенормируема. Эффективное действие состоит из двух слагаемых: первое — бесконечная часть — локально зависит от внешних полей, а второе — конечная часть — содержит нелокальные по A_μ члены. Нас интересует бесконечная часть эффективного действия.

$S(A)$ в однопетлевом приближении вычисляется, если в показателе экспоненты сохранить члены, квадратичные по Φ и η . Однако удобнее для дальнейшего использования вычислить более сложный объект — расширенный производящий функционал для S -матрицы

$$(9) \quad \begin{aligned} S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) = & N^{-1} \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A) \right\} \times \\ & \times \int \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_0(x) \right\} \prod_x d\Phi d\bar{\eta} d\eta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) = & \mathcal{L}_0(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \Phi, \eta, \bar{\eta}) = \\ = & - \frac{1}{g^2} (\nabla_\mu(A^{(1)}) \Phi_\nu)^a (\nabla_\mu(A^{(1)}) \Phi_\nu)^a - \\ & - \frac{1}{g^2} f^{abc} G_{\mu\nu}^a(A^{(2)}) \Phi_\mu^b \Phi_\nu^c - (\nabla_\mu(A^{(3)}) \bar{\eta})^a (\nabla_\mu(A^{(3)}) \eta)^a, \end{aligned}$$

$A_\mu^{(1)}$, $A_\mu^{(2)}$ и $A_\mu^{(3)}$ — совершенно произвольные поля, т. е. они не обязательно лежат на массовой поверхности. Очевидно, что функционал $S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ при совпадающих аргументах на массовой поверхности переходит в S -матрицу в однопетлевом приближении S_0 :

$$S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) = S_0(A), \quad A^{(1)} = A^{(2)} = A^{(3)} = A, \quad (\nabla_\mu(A) G_{\mu\nu}(A))^a = 0.$$

После взятия гауссова интеграла в (9) получаем

$$(10) \quad S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) = N^{-1} \exp\{i \int dx \mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A)\} (\det F_1)^{-1/2} \det F_2,$$

где для операторов F_1 и F_2 имеем

$$(11) \quad F_{1,\mu\nu}^{ab} = g_{\mu\nu} (\nabla_\lambda(A^{(1)}) \nabla_\lambda(A^{(1)}))^{ab} - 2f^{abc} G_{\mu\nu}{}^c(A^{(2)}), \\ F_2^{ab} = (\nabla_\lambda(A^{(3)}) \nabla_\lambda(A^{(3)}))^{ab}.$$

Для вычисления бесконечных частей детерминантов в (10) воспользуемся методом собственного времени. Одновременно проведем разложение функции Грина операторов F_1 и F_2 вблизи светового конуса. Эти функции Грина нужны для вычисления двухпетлевого приближения.

Если F — эллиптический дифференциальный оператор, $K_t(x, y|F)$ — решение уравнения

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial t} K_t(x, y|F) = i F K_t(x, y|F)$$

с граничными условиями $K_t(x, y|F) \rightarrow I \delta(x-y)$, $D(x, y|F)$ — функция

Грина оператора F (пренебрегаем нулевыми модами)

$$(13) \quad F D(x, y|F) = -I \delta(x-y),$$

то для функции Грина и детерминанта имеем

$$(14) \quad D(x, y|F) = i \int_0^\infty dt K_t(x, y|F), \quad \ln \det F = -\text{Tr} \int_0^\infty dt \frac{K_t(x, y|F)}{t}.$$

При $t \rightarrow 0$ имеется следующая асимптотика:

$$(15) \quad K_t(x, y|F) = \frac{-i}{(4\pi t)^2} \exp\left\{i \frac{\sigma}{2t}\right\} \sum_{n=0}^\infty (it)^n a_n(x, y|F),$$

здесь $a_n(x, y|F)$ — регулярная функция своих аргументов, σ — геодезический интервал. Для операторов (11) $\sigma = (x-y)^2/2$.

Из разложения (15) видно, что интегралы в (14) расходятся на нижнем пределе $t \rightarrow 0$, когда $(x-y)^2 \rightarrow 0$. Эта расходимость соответствует ультрафиолетовой расходимости. Тем самым (15) дает разложение $D(x, y|F)$ вблизи светового конуса [8]:

$$(16) \quad D(x, y|F) = \frac{i}{(4\pi)^2 \sigma/2} \left[a_0(x, y|F) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \ln \sigma \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^k a_k(x, y|F) \right] + D_{\text{нл}}(x, y|F).$$

$D_{\text{пл}}(x, y|F)$ нелокальна по внешним полям. Она полиномиальна по $(x-y)_\mu$ с коэффициентами, которые суть C^∞ -функции от y .

Из (16) видно, что функция Грина имеет особенности в точках на контуре $\sigma=0$. Регуляризация, которой мы будем пользоваться, заключается в замене $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$, где $\sigma_0 > 0$ — малый параметр. При такой замене $D(x, y|F) \rightarrow D_{\sigma_0}(x, y|F)$, которая является регулярной функцией своих аргументов и при $\sigma_0 \rightarrow 0$ переходит в $D(x, y|F)$.

Для бесконечной части детерминанта имеем

$$(17) \quad \ln \det F_{\text{оч}} = \frac{i}{(4\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{1}{(\sigma_0/2)^2} a_0(x, y|F) - \frac{i}{\sigma_0/2} a_1(x, y|F) + \ln \sigma_0 \cdot a_2(x, y|F) \right].$$

Для операторов F_1 и F_2 после подстановки разложения (15) в уравнение на собственное время (12) получаем рекуррентные соотношения ($a_0^{ab}(x, x|F_2) = \delta^{ab}$, $a_{0,\mu\nu}^{ab}(x, x|F_1) = g_{\mu\nu} \delta^{ab}$):

$$(18) \quad (x-y)_\lambda (\nabla_\lambda (A^{(1)}) a_{0,\mu\nu}(x, y|F_1))^{ab} = 0,$$

$$(n+1) a_{n+1,\mu\nu}^{ab}(x, y|F_1) + (x-y)_\lambda (\nabla_\lambda (A^{(1)}) a_{n+1,\mu\nu}(x, y|F_1))^{ab} =$$

$$= F_{1,\mu\lambda}^{ac} a_{n,\lambda\nu}^{cb}(x, y|F_1),$$

$$(19) \quad (x-y)_\lambda (\nabla_\lambda (A^{(1)}) a_0(x, y|F_2))^{ab} = 0,$$

$$(n+1) a_{n+1}^{ab}(x, y|F_2) + (x-y)_\lambda (\nabla_\lambda (A^{(3)}) a_{n+1}(x, y|F_2))^{ab} =$$

$$= F_2^{ac} a_n^{cb}(x, y|F_2).$$

В дальнейшем нам нужны $\lim_{x \rightarrow y} a_n(x, y|F)$ при $n=1, 2$. Приведем результаты вычисления:

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow y} a_1^{ab}(x, y|F_2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow y} a_{1,\mu\nu}^{ab}(x, y|F_1) = -2f^{abc} G_{\mu\nu}^c(A^{(2)}),$$

$$\lim_{x \rightarrow y} a_2^{ab}(x, y|F_2) = -1/12 f^{amnfbcn} G_{\sigma\lambda}^m(A^{(3)}) G_{\sigma\lambda}^c(A^{(3)}),$$

$$\lim_{x \rightarrow y} a_{2,\mu\nu}^{ab}(x, y|F_1) = 1/2 [-1/6 g_{\mu\nu} f^{amnfbcn} G_{\sigma\lambda}^m(A^{(1)}) G_{\sigma\lambda}^c(A^{(1)}) +$$

$$+ 4f^{amnfbcn} G_{\mu\lambda}^m(A^{(2)}) G_{\nu\lambda}^c(A^{(2)}) - 2/3 f^{abc} (\nabla_\sigma(A^{(1)}) \nabla_\sigma(A^{(1)}) G_{\mu\nu}(A^{(2)}))^c].$$

В случае $A^{(1)} = A^{(2)} = A^{(3)} = A$ эти коэффициенты были вычислены в работах [9, 8].

Наконец, с помощью (20) и (17) находим

$$(21) \quad S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) = N^{-1} \exp \left\{ i \int dx \left[-\frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu}^a(A) G_{\mu\nu}^a(A) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{C}{(4\pi)^2} \ln \sigma_0 (1/6 G_{\mu\nu}^a(A^{(1)}) G_{\mu\nu}^a(A^{(1)}) - G_{\mu\nu}^a(A^{(2)}) G_{\mu\nu}^a(A^{(2)}) - \right. \right.$$

$$\left. -^{1/12}G_{\mu\nu}{}^a(A^{(3)})G_{\mu\nu}{}^a(A^{(3)}) \right] + i\Gamma(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) \left. \right\}.$$

В N^{-1} включены несущественные расходящиеся константы, а $\Gamma(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ — конечная часть эффективного действия; она нелокально зависит от аргументов.

Переход к S -матрице осуществляется подстановкой в (21) $A^{(1)}=A^{(2)}=A^{(3)}=A$. В результате получаем контрчлен, устраняющий расходимости из однопетлевых вакуумных диаграмм:

$$(22) \quad -\frac{Z-1}{4g^2} G_{\mu\nu}{}^a(A) G_{\mu\nu}{}^a(A),$$

где

$$(23) \quad Z=1 - \frac{11}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} C \ln \sigma_0.$$

Здесь надо отметить, что если даже поле A_μ не удовлетворяет уравнениям движения, (22) является правильным контрчленом, т. к. при его вычислении мы нигде не пользовались уравнениями движения. По правилам R -операции для перенормированной S -матрицы получаем

$$(24) \quad S(A) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int dx [Z\mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A+\Phi) + \mathcal{L}_{\text{кал}} + \mathcal{L}_{\text{дух}}] \right\} \times \\ \times \prod_x d\Phi \, d\bar{\eta} \, d\eta.$$

В функционале $S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ заложена более богатая информация, чем в S -матрице. Он инвариантен при калибровочных преобразованиях $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ и $A^{(3)}$; $S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ можно дифференцировать по $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ и $A^{(3)}$, получая важные соотношения. Основываясь на свойствах $S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$, в следующем разделе мы вычислим бесконечную часть эффективного действия в двухпетлевом приближении.

2. ДВУХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В РАМКАХ МЕТОДА СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ

Для того чтобы вычислить бесконечную часть эффективного действия в двухпетлевом приближении, распишем (24) для применения в данном приближении (легко заметить, что ряд по петлям является также рядом

по g^2):

$$(25) \quad S(A) = N^{-1} \exp \left\{ i \int dx Z\mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A) \right\} \int \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_0(x) \right\} \left\{ 1 + \right. \\ \left. + i \int dx \left[-\frac{Z-1}{2g^2} ((\nabla_\mu(A)\Phi_\nu)^a (\nabla_\mu(A)\Phi_\nu)^a + 2f^{abc} G_{\mu\nu}{}^a(A) \Phi_\mu{}^b \Phi_\nu{}^c - \right. \right. \\ \left. \left. - (\nabla_\mu(A)\Phi_\mu)^a (\nabla_\nu(A)\Phi_\nu)^a) \right] + \frac{i^2}{2} \int dx dy \left[\frac{1}{g^2} f^{abc} (\nabla_\mu(A) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi_\nu(x))^a \Phi_\mu{}^b(x) \Phi_\nu{}^c(x) - \frac{1}{g^2} f^{mnk} (\nabla_\lambda(A)\Phi_\sigma(y))^m \Phi_\lambda{}^n(y) \Phi_\sigma{}^k(y) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i^2}{2} \int dx dy [f^{abc} (\nabla_\mu(A) \bar{\eta}(x))^a \Phi_\mu^b(x) \eta^c(x) f^{mnh} (\nabla_\lambda(A) \bar{\eta}(y))^m \times \\
& \times \Phi_\lambda^n(y) \eta^h(y)] - i^2 \int dx dy \left[\frac{1}{g^2} f^{abc} (\nabla_\mu(A) \Phi_\nu(x))^a \Phi_\mu^b(x) \Phi_\nu^c(x) \times \right. \\
& \times f^{mnh} (\nabla_\lambda(A) \bar{\eta}(y))^m \Phi_\lambda^n(y) \eta^h(y) \left. \right] - \frac{i}{4g^2} \int dx f^{abc} f^{amn} \times \\
& \times \Phi_\mu^b \Phi_\nu^c \Phi_\mu^m \Phi_\nu^n \left. \right\} \prod_x d\Phi d\bar{\eta} d\eta,
\end{aligned}$$

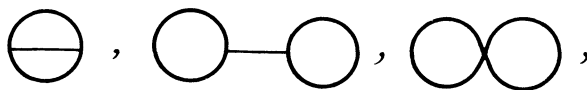
здесь $\mathcal{L}_0(x) = \mathcal{L}_0(x) |_{A^{(1)}=A^{(2)}=A^{(3)}=A}$; $(\nabla_\mu(A) G_{\mu\nu}(A))^a = 0$.

Прежде всего отметим, что однопетлевой контрчлен дает вклад только в нормировочный множитель. Действительно, после интегрирования по Φ , η и $\bar{\eta}$ в (25) вклад контрчлена будет пропорционален

$$\begin{aligned}
(26) \quad & S_0(A) g^2 \int dx dy \frac{Z-1}{2g^2} \delta(x-y) F_{1,\mu\nu}^{ab} D_{\nu\mu}^{ba}(x, y | F_1) |_{A^{(1)}=A^{(2)}=A^{(3)}=A} + \\
& + N^{-1} g^2 \int \frac{Z-1}{g^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \exp \left\{ i \int dx \left[\mathcal{L}_0 + \left(\frac{1}{2g^2} - \frac{1}{2\alpha g^2} \right) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times (\nabla_\mu(A) \Phi_\mu)^a (\nabla_\nu(A) \Phi_\nu)^a \right] \right\} \Big|_{\alpha=1} \prod_x d\Phi d\bar{\eta} d\eta.
\end{aligned}$$

Оба слагаемых в (26) имеют вид $g^2 \text{const } S_0(A)$, для первого это следует из определения (13), а для второго после интегрирования по Φ , η , $\bar{\eta}$ — из независимости однопетлевого эффективного действия от α . Отметим, что мы имели бы такой же эффект, если бы в (25) ввели просто перенормировку волновой функции Φ .

После исключения в (25) однопетлевого контрчлена остаются три типа диаграмм:



в которых участвуют как векторный, так и духовый пропагаторы. Для того чтобы получить локально-расходящиеся части этих диаграмм, используем функционал $S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$. Из структуры $\mathcal{L}_0(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \Phi, \eta, \bar{\eta})$ следует

$$\begin{aligned}
(27) \quad & \frac{i^2}{g^4} \int dx dy f^{abc} (\nabla_\mu(A) \Phi_\nu(x))^a \Phi_\mu^b(x) \Phi_\nu^c(x) f^{mnh} (\nabla_\lambda(A) \Phi_\sigma(y))^m \times \\
& \times \Phi_\lambda^n(y) \Phi_\sigma^h(y) \exp \left\{ i \int dz \mathcal{L}_0(z) \right\} = - \frac{1}{2} \int dx dy \Phi_\mu^a(x) \Phi_\nu^b(y) \times \\
& \times \frac{\delta^2 \exp \left\{ i \int dz \mathcal{L}_0(z) \right\}}{\delta A_\mu^{a(2)}(x) \delta A_\nu^{b(1)}(y)} \Big|_{A^{(1)}=A^{(2)}=A^{(3)}=A},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{i^2}{g^2} \int dx dy f^{abc} (\nabla_\mu(A) \Phi_\nu(x))^a \Phi_\mu^b(x) \Phi_\nu^c(x) f^{mnh} (\nabla_\lambda(A) \bar{\eta}(y))^m \times \\
& \times \Phi_\lambda^n(y) \eta^h(y) \exp\left\{i \int dz \mathcal{L}_0(z)\right\} = - \int dx dy \Phi_\mu^a(x) \Phi_\nu^b(y) \times \\
& \times \frac{\delta^2 \exp\left\{i \int dz \mathcal{L}_0(z)\right\}}{\delta A_\mu^{a(1)}(x) \delta A_\nu^{b(3)}(y)} \Bigg|_{A^{(1)}=A^{(2)}=A^{(3)}=A}, \\
& i^2 \int dx dy f^{abc} (\nabla_\mu(A) \bar{\eta}(x))^a \Phi_\mu^b(x) \eta^c(x) f^{mnh} (\nabla_\lambda(A) \bar{\eta}(y))^m \times \\
& \times \Phi_\lambda^n(y) \eta^h(y) \exp\left\{i \int dz \mathcal{L}_0(z)\right\} = - \frac{1}{4} \int dx dy \Phi_\mu^a(x) \Phi_\nu^b(y) \times \\
& \times \frac{\delta^2 \exp\left\{i \int dz \mathcal{L}_0(z)\right\}}{\delta A_\mu^{a(3)}(x) \delta A_\nu^{b(3)}(y)} \Bigg|_{A^{(1)}=A^{(2)}=A^{(3)}=A} + \\
& + \frac{i}{2} \int dx f^{abc} f^{amn} \Phi_\mu^b \bar{\eta}^c \Phi_\nu^m \eta^n \exp\left\{i \int dz \mathcal{L}_0(z)\right\}.
\end{aligned}$$

Используя эти соотношения и интегрируя по Φ , η и $\bar{\eta}$ в (25), для S -матрицы получаем

$$\begin{aligned}
(28) \quad S(A) = & N^{-1} \exp\left\{i \int dx \left[-\frac{Z-1}{4g^2} G_{\mu\nu}^a(A) G_{\mu\nu}^a(A)\right]\right\} \times \\
& \times \left\{ S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) - \frac{1}{4} X(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) + Y(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) + \right. \\
& + \frac{1}{8} Z(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) + \frac{ig^2}{4} S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) \int dx dy \delta(x-y) \times \\
& \times f^{abc} f^{amn} [D_{\mu\nu}^{bc}(x, y|F_1) D_{\mu\nu}^{mn}(x, y|F_1) + D_{\mu\nu}^{bn}(x, y|F_1) D_{\nu\mu}^{cm}(x, y|F_1) + \\
& \left. + D_{\mu\mu}^{bm}(x, y|F_1) D_{\nu\nu}^{cn}(x, y|F_1) + D_{\mu\mu}^{bm}(x, y|F_1) D^{cn}(x, y|F_2)] \right\} \Bigg|_{A^{(1)}=A^{(2)}=A^{(3)}=A}
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
(29) \quad X = & \int dx dy \frac{\delta^2 (-ig^2 D_{\mu\nu}^{ab}(x, y|F_1) S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}))}{\delta A_\mu^{a(2)}(x) \delta A_\nu^{b(1)}(y)}, \\
Y = & \int dx dy \frac{\delta^2 (-ig^2 D_{\mu\nu}^{ab}(x, y|F_1) S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}))}{\delta A_\mu^{a(1)}(x) \delta A_\nu^{b(3)}(y)}, \\
Z = & \int dx dy \frac{\delta^2 (-ig^2 D_{\mu\nu}^{ab}(x, y|F_1) S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}))}{\delta A_\mu^{a(3)}(x) \delta A_\nu^{b(3)}(y)}.
\end{aligned}$$

В (28) нас интересует значение функционалов $X(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$, $Y(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ и $Z(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ при $A^{(1)}=A^{(2)}=A^{(3)}=A$. Подставляя в (29) выражение для расширенной S -матрицы (21), получим

$$\begin{aligned}
 (30) \quad X(A, A, A) &= \\
 &= N^{-1} \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{Z-1}{4g^2} G_{\mu\nu}{}^a(A) G_{\mu\nu}{}^a(A) + \mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A) \right] \right\} X'(A, A, A), \\
 Y(A, A, A) &= \\
 &= N^{-1} \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{Z-1}{4g^2} G_{\mu\nu}{}^a(A) G_{\mu\nu}{}^a(A) + \mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A) \right] \right\} Y'(A, A, A), \\
 Z(A, A, A) &= \\
 &= N^{-1} \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{Z-1}{4g^2} G_{\mu\nu}{}^a(A) G_{\mu\nu}{}^a(A) + \mathcal{L}_{\text{я.м.}}(A) \right] \right\} Z'(A, A, A) + \\
 &+ g^2 \text{const } S_0(A).
 \end{aligned}$$

Величины $X'(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$, $Y'(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ и $Z'(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ определяются из (29) заменой $S(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ на $\exp\{i\Gamma(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})\}$. Второе слагаемое в выражении для $Z(A, A, A)$ в (30) содержит const, которая имеет такое же происхождение, как несущественная постоянная в (26), и она в конечном счете будет включена в нормировочный множитель.

$$\text{Подставляя (30) в (28), видим, что } \exp \left\{ i \int dx \frac{Z-1}{4g^2} G_{\mu\nu}{}^a(A) G_{\mu\nu}{}^a(A) \right\}$$

сокращается с соответствующим множителем в (28). Теперь уже видно, что функционалы X' , Y' и Z' не дают вклада в локально расходящуюся часть эффективного действия и в выражении (28) для S -матрицы остался невычисленным вклад, который соответствует диаграмме «восьмерка» (здесь также присутствует «восьмерка» с участием «духов», которой нет в первоначальном лагранжиане), локально расходящуюся часть которой легко вычислить с помощью (20); из коэффициентов $a_n(x, y|F)$ достаточно знать $a_1(x, y|F)$ и $a_2(x, y|F)$ (20). Окончательно получаем для S -матрицы в двухпетлевом приближении

$$\begin{aligned}
 (31) \quad S(A) &= N^{-1} \exp \left\{ \frac{i}{4} \int dx \left[-\frac{1}{g^2} G_{\mu\nu}{}^a(A) G_{\mu\nu}{}^a(A) - \right. \right. \\
 &- \frac{34}{3} \left(\frac{g}{(4\pi)^2} \right)^2 C^2 \ln \sigma_0 G_{\mu\nu}{}^a(A) G_{\mu\nu}{}^a(A) - \\
 &\left. \left. - 6 \left(\frac{g}{(4\pi)^2} \right)^2 C^2 \ln^2 \sigma_0 G_{\mu\nu}{}^a(A) G_{\mu\nu}{}^a(A) + \text{конечная часть} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Для контрчлена, который устраняет расходимости из вакуумных диаграмм, в этом приближении имеем

$$(32) \quad -\frac{Z_2-1}{4g^2} G_{\mu\nu}{}^a(A) G_{\mu\nu}{}^a(A),$$

где

$$(33) \quad Z_2 = 1 - \frac{11}{3} C \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \ln \sigma_0 - \frac{34}{3} C^2 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^4 \ln \sigma_0 - 6 C^2 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^4 \ln^2 \sigma_0.$$

Коэффициент перед $\ln \sigma_0$ в (33) определяет коэффициенты β_0 и β_1 для β -функции:

$$(34) \quad \beta = \beta_0 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 + \beta_1 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^4; \quad \beta_0 = -\frac{11}{3} C, \quad \beta_1 = -\frac{34}{3} C^2.$$

(34) совпадает с ранее полученными значениями для коэффициентов β -функции [5, 6, 10].

Итак, в двухпетлевом приближении, так же как и в однопетлевом приближении, все расходимости в формализме внешнего поля устраняются перенормировкой заряда. Видимо, это свойство сохранится и в следующих порядках. При доказательстве этого факта в трехпетлевом приближении возникают некоторые технические трудности, связанные с тем, что бесконечная часть эффективного действия в двухпетлевом приближении, как видно из вычислений, в отличие от однопетлевого случая зависит от того, внешнее поле A_μ на массовой поверхности или нет.

Автор выражает признательность Л. Д. Фаддееву за постановку задачи, а также благодарит его и В. Е. Корепина за полезные обсуждения.

Литература

- [1] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
- [2] Славнов А. А. — ТМФ, 1972, 10, № 1, 153–161. Taylor J. C. — Nucl. Phys., 1971, B33, № 2, 436–444.
- [3] De Witt B. S. — Phys. Rev., 1967, 162, № 5, 1239–1256. Honnerkamp T. — Nucl. Phys., 1972, B48, № 1, 269–287. Kallosh R. — Nucl. Phys., 1974, B78, № 2, 293–312.
- [4] Арефьева И. Я., Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. — ТМФ, 1974, 21, № 3, 311–321.
- [5] Abbot L. F. — Nucl. Phys., 1981, B185, № 1, 189–203. Capper D. M., MacLean A. — Nucl. Phys., 1982, B203, № 3, 413–442.
- [6] Ichinose Sh., Omote M. — Nucl. Phys., 1982, B203, № 2, 221–267.
- [7] 'tHooft G. — Nucl. Phys., 1973, B62, 444–460.
- [8] Luscher M. — Ann. Phys., 1982, 142, № 2, 359–392.
- [9] Романов В. Н., Шеварц А. С. — ТМФ, 1979, 41, № 2, 190–204.
- [10] Jones D. R. T. — Nucl. Phys., 1974, B75, № 3, 531–538. Caswell W. E. — Phys. Rev. Lett., 1974, 33, № 4, 244–246. Владимиров А. А., Тарасов Д. В. — ЯФ, 1977, 25, в. 5, 1104–1106.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3.V.1983 г.

TWO-LOOP RENORMALIZATION IN THE BACKGROUND FIELD METHOD

Shatashvili S. L.

S-matrix generating functional for Yang – Mills theory in the background field formalism is considered. It is shown by means of the explicit calculation using the proper-time method that two-loop ultraviolet divergencies can be removed by means of the charge renormalization only.