Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. А. Тайцлин, Об элементарных теориях коммутативных полугрупп,
Алгебра и логика. Семинар, 1966, том 5, номер 4, 55–89

https://www.mathnet.ru/al1064

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
16 декабря 2025 г., 21:49:28

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 5
Выпуск 4 Руководитель А.И.Мальцев 1966 г.

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЯХ КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП

М.А.Тайцлин

Введение

В работах А.П.Бирюкова [1, 2, 3] и В.А.Емеличева [4] решены некоторые алгоритмические проблемы для конечноопределенных коммутативных полугрупп. Как правило, эти проблемы являются частными случаями сформулированной ниже проблемы А в том смысле, что всякий алгоритм, решающий проблему А, решает и эти проблемы.

Для удобства формулировки проблемы А через $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ обозначим полугруппу, заданную в классе коммутативных полугрупп множеством образующих $\mathfrak{A}$ и множеством определяющих соотношений $\mathfrak{B}$.

П р о б л е м а А. По произвольному конечному множеству $\mathfrak{A}$ образующих, по произвольному конечному множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для этих образующих и по произвольной замкнутой формуле Φ исчисления предикатов первой ступени, не содержащей внелогических символов, отличных от символов образующих и символа операции полугруппы $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, определить, истинна формула Φ в полугруппе $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ или нет.

В настоящей заметке строится алгоритм, решающий проблему А.

Следует отметить, что алгоритм, решающий аналогичную проблему для коммутативных полугрупп с сокращением, построен автором в заметке [5]. Здесь используется методика, развитая в [5]. Од-

нако, по сравнению с заметкой [5], здесь приходится преодолевать дополнительные трудности. При этом используются идеи, развитые А.П.Бирюковым в работе [2], и лемма Г.С.Цейтина (см. [4], лемма 5).

Предполагается, что читатель уже знаком с заметкой [5] и с пунктами 2, 3, 5 из § 2 обзора [7]. Это позволило автору не приводить некоторых определений и опустить некоторые рассуждения.

Автор заинтересовался теориями конечноопределенных коммутативных полугрупп после одного доклада А.П.Бирюкова на семинаре "Алгебра и логика" и выступления А.И.Мальцева на том же заседании этого семинара. Автор благодарен Алексею Петровичу Бирюкову также и за возможность ознакомиться с его работой [2] в рукописи.

§ I. Изучение строения полугруппы $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$

I. Пусть $N=\{0,1,2,\dots\}$ - множество натуральных чисел. Пусть $\mathfrak{A}=\{a_1,\dots,a_t\}$ - конечное множество, называемое далее алфавитом. Элементы множества $\mathfrak{A}$ будем называть буквами. Линейной формой над алфавитом $\mathfrak{A}$ будем называть выражение вида:

$$\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_t a_t, \tag{I}$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_t$ - натуральные числа. Числа $\alpha_1,\dots,\alpha_t$ называются коэффициентами линейной формы (I). Форма (I) называется нулевой, если все её коэффициенты - нули. Число α_i называется коэффициентом при букве a_i в форме (I).

Если $f=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i a_i$ и $g=\sum_{i=1}^{t}\beta_i a_i$ - две линейные формы над алфавитом $\mathfrak{A}$, линейная форма $\sum_{i=1}^{t}(\alpha_i+\beta_i)\,a_i$ над алфавитом $\mathfrak{A}$ называется суммой линейных форм f и g. Пишут:

$$\sum_{i=1}^{t}\alpha_i a_i+\sum_{i=1}^{t}\beta_i a_i=\sum_{i=1}^{t}(\alpha_i+\beta_i)\,a_i.\ ^{*)}$$

Таким образом, на множестве $L(\mathfrak{A})$ линейных форм над алфавитом $\mathfrak{A}$ определяется операция + (сложения). Понятно, что множество $L(\mathfrak{A})$ вместе с этой операцией + образует коммутативную полугруппу. Полугруппа $L(\mathfrak{A})$ называется свободной коммутативной полугруппой с множеством свободных образующих $\mathfrak{A}$.

На множестве $L(\mathfrak{A})$ определяется также отношение частичного порядка $\leq$. Считают для линейных форм f, g из $L(\mathfrak{A})$, что $f\leq g$ (словами, g больше f), если для каждой буквы $a\in\mathfrak{A}$ коэффициент при букве a в форме g не меньше ко-

*) Выражение "$\sum_{i=1}^{t}\psi_i a_i$" используется как сокращение вместо "$\psi_1 a_1+\dots+\psi_t a_t$".

эффициента при букве a в форме f. Считают, что $f<g$, если $f \leq g$ и $f \neq g$.

Если $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ *), каждая форма f из $L(\mathfrak{A}_1)$ естественным образом отождествляется с некоторой формой из $L(\mathfrak{A})$. Именно f отождествляется с такой формой из $L(\mathfrak{A})$, у которой коэффициенты при буквах, не входящих в $\mathfrak{A}_1$, равны нулю и у которой коэффициент при каждой букве из $\mathfrak{A}_1$ равен коэффициенту при этой же букве у f. Это соглашение позволяет рассматривать полугруппу $L(\mathfrak{A}_1)$ как подполугруппу полугруппы $L(\mathfrak{A})$. Отождествляя букву a с линейной формой $1a$ для каждого $a \in \mathfrak{A}$, будем также рассматривать $\mathfrak{A}$ как подмножество из $L(\mathfrak{A})$. Для $f \in L(\mathfrak{A})$ через $\mathfrak{A}_1(f)$ обозначим такую линейную форму над алфавитом $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1$ **), у которой коэффициент при каждой букве $a \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1$ равен коэффициенту при букве a в форме f.

Пусть теперь c, e, f, g – линейные формы над алфавитом $\mathfrak{A}$. Скажем, что форма g получается из формы f с помощью применения соотношения (c, e), если $c=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i a_i$; $e=\sum_{i=1}^{t}\beta_i a_i$; $f=\sum_{i=1}^{t}\gamma_i a_i$; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in N (i=1,\dots,t)$; $\gamma_i \geq \alpha_i$ $(i=1,\dots,t)$; $g=\sum_{i=1}^{t}(\gamma_i-\alpha_i+\beta_i)a_i$.

Пусть теперь c_i, e_i – линейные формы над алфавитом $\mathfrak{A}$ $(i=1,\dots,q)$. Пусть $\mathfrak{B}=\{(c_i,e_i),(e_i,c_i) \mid i=1,\dots,q\}$. Скажем, что $\mathfrak{B}$ есть множество определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$. Через $\lambda(\mathfrak{B})$ обозначим $max\{(c_i)_a,(e_i)_a \mid a \in \mathfrak{A}; i=1,\dots,q\}$, где для $a \in \mathfrak{A}$, $f \in L(\mathfrak{A})$ через $(f)_a$ обозначается коэффициент при букве a в форме f.

Пусть f, g – линейные формы над алфавитом $\mathfrak{A}$. Скажем, что формы f и g $\mathfrak{B}$-эквивалентны, если f есть g или если существует такая конечная последовательность

$$f_0=f,\ f_1,\dots,f_p=g$$

линейных форм над алфавитом $\mathfrak{A}$, что f_i получается из f_{i-1} с помощью применения одного из соотношений, входящих в $\mathfrak{B}$ $(i=1,\dots,p)$. Множество $L(\mathfrak{A})$ распадается на классы $\mathfrak{B}$-эквивалентных форм. Пусть для $f \in L(\mathfrak{A})$ через $\bar{f}$ обозначается класс $\mathfrak{B}$-эквивалентности на $L(\mathfrak{A})$, содержащий f.

---

*) Запись "$\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$" (или "$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_1$") означает, что $\mathfrak{A}_1$ есть подмножество множества $\mathfrak{A}$ и что $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}$. Запись "$\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}$" (или "$\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}_1$") означает, что $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ или что $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$.

**) Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – множества, через $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ обозначается множество, которое содержит те и только те элементы, которые входят в $\mathfrak{A}$ и одновременно не входят в $\mathfrak{B}$.

На множестве $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ классов $\mathfrak{B}$ -эквивалентности на $L(\mathfrak{A})$ рассматривается операция $+$ (сложения). Именно, если $f,g\in L(\mathfrak{A})$, то $\bar{f}+\bar{g}$ есть $\overline{f+g}$. Множество $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ вместе с этой операцией $+$ образует коммутативную полугруппу. Полагают, что полугруппа $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ - пустое множество, есть полугруппа $L(\mathfrak{A})$. Говорят, что полугруппа $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ задана в классе коммутативных полугрупп множеством образующих $\mathfrak{A}$ и множеством определяющих соотношений $\mathfrak{B}$. Каждая полугруппа, изоморфная полугруппе $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ при некоторых конечных $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, называется конечноопределенной.

2. ЛЕММА I. Существует алгоритм, который по произвольным конечным алфавитам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ таким, что $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}_1$, по произвольному конечному множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ и по произвольным формам f и g из $L(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1)$ определяет:

I) существуют ли такие формы $e',e''\in L(\mathfrak{A}_1)$, что форма $f+e'$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна форме $g+e''$;

2) существуют ли такие формы $e',e''\in L(\mathfrak{A}_1)$, что $e'\neq e''$ и форма $f+e'$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна форме $f+e''$ *).

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Алгоритм для ответа на вопрос I) легко получить из алгоритма, решающего проблему тождества. Наша задача сводится к построению алгоритма для ответа на вопрос 2). Однако попутно получится и алгоритм, отвечающий на вопрос I).

2. В основе нашего доказательства леммы I лежит использование некоторого описания всех форм из $L(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{B}$ -эквивалентных данной форме из $L(\mathfrak{A})$. Это описание принадлежит А.П.Бирюкову и имеется в работе [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно договоримся о некоторой терминологии, которая будет использована только в доказательстве леммы I.

Пусть $\mathfrak{A}_1=\{a_{s+1},\dots,a_{s+r}\}$, $\mathfrak{A}_2=\{a_1,\dots,a_s\}$. Пусть $\omega_1,\dots,\omega_r$ - некоторые символы, не входящие в $\mathfrak{A}$. Выражение вида:

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i a_i+\sum_{i=1}^{r}(\omega_i+\gamma_i)\,a_{s+i}\,, \tag{2}$$

*) Вопрос 2) имеет смысл только, если $\mathfrak{A}_1\neq\varnothing$. Если $\mathfrak{A}_1=\varnothing$, под вопросом I) понимается следующий вопрос: "являются ли формы f и g $\mathfrak{B}$-эквивалентными". Здесь и далее $\varnothing$ - пустое множество.

где $\alpha_i \in N$ $(i=1,\dots,s)$; γ_i - целое число (возможно, отрицательное) $(i=1,\dots,r)$ назовем формальной формой. Выражение вида:

$$\sum_{i=1}^{s+r} \alpha_i a_i, \tag{3}$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_s \in N$; $\alpha_{s+1},\dots,\alpha_{s+r}$ - целые числа (некоторые из них, возможно, отрицательны) назовем обобщенной формой. В частности, каждая линейная форма над алфавитом $\mathfrak{A}$ является обобщенной формой. Множество всех обобщенных форм обозначим через L'.

Пусть $\Lambda_j=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i^{(j)}a_i+\sum_{i=1}^{r}(\omega_i+\gamma_i^{(j)})a_{s+i}$ - формальная форма $(j=1,2)$; $g_j=\sum_{i=1}^{s+r}\varphi_i^{(j)}a_i$ - линейная форма над алфавитом $\mathfrak{A}$ $(j=1,2)$. Скажем, что формальная форма Λ_2 получается из формальной формы Λ_1 с помощью применения соотношения (g_1,g_2) , если $\alpha_i^{(1)}\geqslant\varphi_i^{(1)}$ и $\alpha_i^{(2)}=\alpha_i^{(1)}-\varphi_i^{(1)}+\varphi_i^{(2)}$ для $i=1,\dots,s$ и если

$$\gamma_i^{(2)}=\gamma_i^{(1)}-\varphi_{s+i}^{(1)}+\varphi_{s+i}^{(2)} \quad (i=1,\dots,r).$$

Пусть по-прежнему $\mathfrak{B}=\{(e_i,c_i),(c_i,e_i)/i=1,\dots,q\}$. Назовем формальные формы Λ' и Λ'' $\mathfrak{B}$-эквивалентными, если Λ' есть Λ'' или если существует такая конечная последовательность $\Lambda'=\Lambda_1,\dots,\Lambda_p=\Lambda''$ формальных форм, что Λ_i получается из Λ_{i-1} с помощью применения некоторого соотношения, входящего в $\mathfrak{B}$ $(i=1,\dots,p)$. Число p назовем длиной рассматриваемого $\mathfrak{B}$ -вывода Λ' из Λ''.

Если Λ - формальная форма вида (2) (или если u - обобщенная форма вида (3)), через $\mathfrak{A}_1(\Lambda)$ (соответственно, через $\mathfrak{A}_1(u)$) обозначим линейную форму $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i a_i$ над алфавитом $\mathfrak{A}_2$. Другими словами, если x - формальная или обобщенная форма, через $\mathfrak{A}_1(x)$ обозначается такая линейная форма над алфавитом $\mathfrak{A}_2$, у которой коэффициент при каждой букве из $\mathfrak{A}_2$ равен коэффициенту при этой же букве у x . Если $\mathfrak{M}$ - множество, состоящее из формальных или обобщенных форм, через $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{M})$ обозначим множество

$$\{\mathfrak{A}_1(x)/\, x\in\mathfrak{M}\}.$$

Если $\Lambda=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i a_i+\sum_{i=1}^{r}(\omega_i+\gamma_i)a_{s+i}$ - формальная форма, $u_j=\sum_{i=1}^{s+r}\beta_i^{(j)}a_i$ - обобщенная форма $(j=1,2)$, пусть $\Lambda+u_1$ есть формальная форма $\sum_{i=1}^{s}(\alpha_i+\beta_i^{(1)})a_i+\sum_{i=1}^{r}(\omega_i+\gamma_i+\beta_{s+i}^{(1)})a_{s+i}$ и пусть u_1+u_2 есть обобщенная форма $\sum_{i=1}^{s+r}(\beta_i^{(1)}+\beta_i^{(2)})a_i$.

Рассмотрим всевозможные формальные формы, которые можно получить из формальной формы $\Lambda_0=\ell+\sum_{i=1}^{r}\omega_i a_{s+i}$ с помощью применения некоторого соотношения из $\mathfrak{B}$. Точнее, рассмотрим множество $\{\Lambda/$ при некотором $i=\{1,\dots,q\}$ Λ получается из Λ_0 с помощью применения либо соотношения (c_i,e_i) , либо соотношения $(e_i,c_i)\}$.

Это множество обозначим через $\mathcal{L}_1''$. Пусть $\mathcal{L}_1'=\mathcal{L}_1''\cup\{\Lambda_0\}$. Пусть $\mathcal{D}_1''=\{u\in L'/\exists\Lambda_1\Lambda_2(\Lambda_1\in\mathcal{L}_1'\&\Lambda_2\in\mathcal{L}_1'\&\mathfrak{A}_1(\Lambda_1)>\mathfrak{A}_1(\Lambda_2)\&\Lambda_1=\Lambda_2+u)\}$. Пусть $\mathcal{D}_1''(1)=\mathcal{D}_1''$ и пусть $\mathcal{D}_1''(j)$ уже построено. Пусть $\mathcal{D}_1''(j+1)$ есть $\mathcal{D}_1''(j)\cup\{u\in L'/\exists u_1u_2(u_1\in\mathcal{D}_1''(j)\&u_2\in\mathcal{D}_1''(j)\&\mathfrak{A}_1(u_1)>\mathfrak{A}_1(u_2)\&u_1=u_2+u)\}$. Находим такое натуральное $j_1>0$, что $\mathfrak{A}_1(\mathcal{D}_1''(j_1))=\mathfrak{A}_1(\mathcal{D}_1''(j_1+1))$. Пусть $\mathcal{D}_1'=\mathcal{D}_1''(j_1)$. Через $\mathcal{D}_1$ (соответственно, через $\mathcal{L}_1$) обозначим множество таких $u\in\mathcal{D}_1'$ (соответственно, множество таких $\Lambda\in\mathcal{L}_1'$), что $\mathfrak{A}_1(u)$ (соответственно, $\mathfrak{A}_1(\Lambda)$) будет минимальным элементом (в смысле отношения $\leq$) в $\mathfrak{A}_1(\mathcal{D}_1')$ (соответственно, в $\mathfrak{A}_1(\mathcal{L}_1')$). Точнее, пусть $\mathcal{D}_1=\{u\in\mathcal{D}_1'/\forall u'(u'\in\mathcal{D}_1'\to\neg(\mathfrak{A}_1(u')<\mathfrak{A}_1(u)))\}$ и пусть

$$\mathcal{L}_1=\{\Lambda\in\mathcal{L}_1'/\forall\Lambda'(\Lambda'\in\mathcal{L}_1'\to\neg(\mathfrak{A}_1(\Lambda')<\mathfrak{A}_1(\Lambda)))\}.$$

Пусть $\lambda=\lambda(\mathcal{B})$. Пусть множества $\mathcal{L}_i',\mathcal{L}_i'',\mathcal{L}_i,\mathcal{D}_i',\mathcal{D}_i'',\mathcal{D}_i$ для $i=1,\dots,k$ уже построены. Рассматриваем всевозможные формальные формы Λ такие, что при некотором $i=\{1,\dots,q\}$ и при некоторых натуральных $p\leq\lambda S$; $x\in\mathcal{L}_k$; $y_j\in\mathcal{D}_k$ $(j=1,\dots,p)$ формальная форма Λ получается из формальной формы одного из видов

$$x,\ x+y_1+\dots+y_p \tag{4}$$

с помощью применения либо соотношения (e_i,c_i), либо соотношения (c_i,e_i). Полученное множество формальных форм Λ ооозначим через $\mathcal{L}_{k+1}''$. Пусть

$\mathcal{L}_{k+1}'=\mathcal{L}_{k+1}''\cup\mathcal{L}_k'$, $\mathcal{D}_{k+1}''=\{u\in L'/\exists\Lambda_1\Lambda_2(\Lambda_1\in\mathcal{L}_{k+1}'\&\Lambda_2\in\mathcal{L}_{k+1}'\&\mathfrak{A}_1(\Lambda_1)>\mathfrak{A}_1(\Lambda_2)\&\Lambda_1=u+\Lambda_2)\}$. Пусть $\mathcal{D}_{k+1}''(1)=\mathcal{D}_{k+1}''$ и пусть $\mathcal{D}_{k+1}''(j)$ уже построено. Пусть $\mathcal{D}_{k+1}''(j+1)$ есть $\mathcal{D}_{k+1}''(j)\cup\{u\in L'/\exists u_1u_2(u_1\in\mathcal{D}_{k+1}''(j)\&u_2\in\mathcal{D}_{k+1}''(j)\&\mathfrak{A}_1(u_1)>\mathfrak{A}_1(u_2)\&u_1=u+u_2)\}$. Пусть натуральное число $j_{k+1}>0$ таково, что $\mathfrak{A}_1(\mathcal{D}_{k+1}''(j_{k+1}))=\mathfrak{A}_1(\mathcal{D}_{k+1}''(j_{k+1}+1))$. Пусть $\mathcal{D}_{k+1}'=\mathcal{D}_{k+1}''(j_{k+1})$. Пусть

$$\mathcal{L}_{k+1}=\{\Lambda\in\mathcal{L}_{k+1}'/\forall\Lambda'(\Lambda'\in\mathcal{L}_{k+1}'\to\neg(\mathfrak{A}_1(\Lambda')<\mathfrak{A}_1(\Lambda)))\}$$

и пусть $\mathcal{D}_{k+1}=\{u\in\mathcal{D}_{k+1}'/\forall u'(u'\in\mathcal{D}_1'\to\neg(\mathfrak{A}_1(u')<\mathfrak{A}_1(u)))\}$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_1(\mathcal{B})$ множество

$$\{(\mathfrak{A}_1(c_i),\mathfrak{A}_1(e_i)),(\mathfrak{A}_1(e_i),\mathfrak{A}_1(c_i))\,/\,i=1,\dots,q\}$$

определяющих соотношений для $\mathfrak{A}_2$. Из теоремы А.П.Бирюкова (см. [2]) следует, что существует такое натуральное число $k_0>0$, что всякая линейная форма над алфавитом $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1(\mathcal{B})$- эквивалентная

форме f, имеет один из видов (4), где

$$x \in \mathfrak{A}_1(\mathcal{L}_{K_0});\ y_1,\dots,y_p \in \mathfrak{A}_1(\mathcal{D}_{K_0}).$$

Точнее, в качестве такого K_0 годится любое такое натуральное $K>0$, что одновременно $\mathfrak{A}_1(\mathcal{L}_K)=\mathfrak{A}_1(\mathcal{L}_{K+1})$ и $\mathfrak{A}_1(\mathcal{D}_K)=\mathfrak{A}_1(\mathcal{D}_{K+1})$. Требуется доказать только существование таких K. Соответствующее доказательство содержится в [2]. Тем самым получается алгоритм, дающий ответ на вопрос I) леммы I.

Рассмотрим теперь условие Б и докажем предложения В и Е.

УСЛОВИЕ Б. Существуют две формальные формы Λ', Λ'' $\mathcal{L}$-эквивалентные формальной форме Λ_0 и такие, что $\Lambda' \neq \Lambda''$, но $\mathfrak{A}_1(\Lambda')=\mathfrak{A}_1(\Lambda'')$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ В. Из истинности условия Б следует положительный ответ на вопрос 2) леммы I.

Пусть условие Б выполнено. Выбирая подходящим образом натуральные числа $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ и подставляя их вместо $\omega_1,\dots,\omega_r$, заметим, что найдутся две линейные формы $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$ над алфавитом $\mathfrak{A}$ такие, что линейная форма $f+\sum_{i=1}^{r}\gamma_i a_{s+i}$ $\mathcal{L}$-эквивалентна как форме $c^{(1)}$, так и форме $c^{(2)}$, $c^{(1)}\neq c^{(2)}$, $\mathfrak{A}_1(c^{(1)})=\mathfrak{A}_1(c^{(2)})=f'$. Пусть $c^{(j)}=f'+\sum_{i=1}^{r}\gamma_i^{(j)}a_{s+i}$ $(j=1,2)$. Пусть

$$e^{(j)}=\sum_{i=1}^{r}\gamma_i a_{s+i}+\sum_{i=1}^{r}\gamma_i^{(j)}a_{s+i}\ (j=1,2).$$

Теперь $e^{(1)}\neq e^{(2)}$, но форма $f+e^{(1)}$ $\mathcal{L}$-эквивалентна форме $f+e^{(2)}$.

Предложение В доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Е. Формальная форма Λ_0+u $\mathcal{L}$-эквивалентна формальной форме Λ_0 для любой обобщенной формы $u \in \mathcal{D}_K''(j)$ и при любых натуральных положительных K, j. Формальная форма $\Lambda \in \mathcal{L}_K'$ $\mathcal{L}$-эквивалентна формальной форме Λ_0 при любом натуральном положительном K.

Доказательство будем вести индукцией по K, а при фиксированном K индукцией по j.

Пусть $u \in \mathcal{D}_1''$. Существуют такие $\Lambda_1,\Lambda_2 \in \mathcal{L}_1'$, что $\Lambda_1=\Lambda_2+u$. По определению $\mathcal{L}_1'$, Λ_0 $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_2+u, Λ_2+u $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0+u, откуда Λ_0 $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0+u.

Пусть для $K=1$ и для $j-1$ предложение Е доказано. Пусть $u \notin \mathcal{D}_1''(j-1)$, $u \in \mathcal{D}_1''(j)$. Существуют $u_1,u_2 \in \mathcal{D}_1''(j-1)$ такие, что $u_1=u_2+u$. По предположению индукции, Λ_0 $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0+u_2+u, Λ_0+u_2+u $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0+u, откуда Λ_0 $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0+u.

Пусть для $K-1$ и для всех j предложение Е доказано. Если $\Lambda \in \mathcal{L}_K'$, то либо $\Lambda \in \mathcal{L}_{K-1}'$, либо Λ $\mathcal{L}$-эквивалентна

форме Λ' одного из видов (4), где $\rho \leq \lambda s$, $x \in \mathcal{L}_{k-1}$, $y_j \in \mathcal{J}_{k-1}$ $(j=1,\dots,\rho)$. В первом случае Λ $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0 (по предположению индукции). Во втором случае, заметив, что $\mathcal{J}_{k-1} \subseteq \mathcal{J}'_{k-1}$, что $\mathcal{J}'_{k-1} = \mathcal{J}''_{k-1}(j_{k-1})$ и что, по предположению индукции, x $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0 и $\Lambda_0 + y_j$ $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0 $(j=1,\dots,\rho)$, найдем, что Λ' $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0, значит, и Λ $\mathcal{L}$-эквивалентна Λ_0.

Пусть $u \in \mathcal{J}''_k(1)$. Существуют $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}'_k$ такие, что $\Lambda_1 = \Lambda_2 + u$. По предыдущему, Λ_0 $\mathcal{L}$-эквивалентна $\Lambda_2 + u$, $\Lambda_2 + u$ $\mathcal{L}$-эквивалентна $\Lambda_0 + u$, откуда Λ_0 $\mathcal{L}$-эквивалентна $\Lambda_0 + u$.

Пусть теперь для k и $j-1$ предложение Е доказано. Пусть $u \notin \mathcal{J}''_k(j-1)$, $u \in \mathcal{J}''_k(j)$. Существуют $u_1, u_2 \in \mathcal{J}''_k(j-1)$ такие, что $u_1 = u_2 + u$. По предположению индукции, Λ_0 $\mathcal{L}$-эквивалентна $\Lambda_0 + u_2 + u$, $\Lambda_0 + u_2 + u$ $\mathcal{L}$-эквивалентна $\Lambda_0 + u$, откуда Λ_0 $\mathcal{L}$-эквивалентна $\Lambda_0 + u$.

Предложение Е доказано.

Вернемся теперь к построению алгоритма, отвечающего на вопрос 2) леммы I.

Рассмотрим $\mathcal{J}''_k(j_k)$ и $\mathcal{J}''_k(j_k+1)$ для $k=1,\dots,k_0+1$. Если существует такое натуральное k, $1 \leq k \leq k_0+1$, что $\mathcal{J}''_k(j_k) \neq \mathcal{J}''_k(j_k+1)$, то существуют две обобщенные формы $u' \in \mathcal{J}''_k(j_k)$ и $u'' \in \mathcal{J}''_k(j_k+1)$ такие, что $\mathfrak{A}_1(u') = \mathfrak{A}_1(u'')$, но $u' \neq u''$.

Из предложения Е следует, что $\Lambda_0, \Lambda_0 + u'$ и $\Lambda_0 + u''$ $\mathcal{L}$-эквивалентны. Кроме того, $\mathfrak{A}_1(\Lambda_0 + u') = \mathfrak{A}_1(\Lambda_0 + u'')$, но $\Lambda_0 + u' \neq \Lambda_0 + u''$. Это означает, что выполнено условие Б. Из предложения В следует положительный ответ на вопрос 2) леммы I.

Рассмотрим $\mathcal{L}'_{k_0+1}$ и $\mathcal{J}'_{k_0+1}$. Если существуют такие x_1, $x_2 \in \mathcal{L}'_{k_0+1}$ (соответственно, $x_1, x_2 \in \mathcal{J}'_{k_0+1}$), что $\mathfrak{A}_1(x_1) = \mathfrak{A}_1(x_2)$ и $x_1 \neq x_2$, то выполнено условие Б. Из предложения В следует положительный ответ на вопрос 2) леммы I. Это означает, что ответ на рассматриваемый вопрос положителен, если $\mathcal{L}_{k_0} \neq \mathcal{L}_{k_0+1}$ или если $\mathcal{J}_{k_0} \neq \mathcal{J}_{k_0+1}$.

Таким образом, можно предполагать, что $\mathcal{L}_{k_0} = \mathcal{L}_{k_0+1}$, $\mathcal{J}_{k_0} = \mathcal{J}_{k_0+1}$ и $\mathcal{J}''_k(j_k) = \mathcal{J}''_k(j_k+1)$ для $k=1,\dots,k_0+1$.

<u>В этом случае каждая формальная форма Λ, $\mathcal{L}$-эквивалентная Λ_0, представима в одном из видов (4), где $x \in \mathcal{L}_{k_0}$; $y_1,\dots,y_\rho \in \mathcal{J}_{k_0}$.</u>

Последнее предложение назовем предложением И. Докажем его.

Заметим, что каждая формальная форма $\Lambda \in \mathcal{L}'_{k_0+1}$ представима в одном из видов (4), где $x \in \mathcal{L}_{k_0}$; $y_1,\dots,y_\rho \in \mathcal{J}_{k_0}$.

Действительно, если $\Lambda \notin \mathcal{L}_{k_0}$, то существует такая $x \in \mathcal{L}_{k_0}$, что $\mathfrak{A}_1(\Lambda) > \mathfrak{A}_1(x)$. Теперь $\Lambda = u + x$ и $u \in \mathcal{J}''_{k_0+1}(1)$. Ес-

ли $u \in \mathcal{D}'_{k_0+1}$ и сумма коэффициентов $\mathfrak{A}_1(u)$ равна I, то $u \in \mathcal{D}_{k_0+1} = \mathcal{D}_{k_0}$. Допустим, что для всех $u \in \mathcal{D}'_{k_0+1}$ с суммой коэффициентов у $\mathfrak{A}_1(u)$ меньшей p, имеется представление: $u = u_1 + \ldots + u_p$, где $u_1, \ldots, u_p \in \mathcal{D}_{k_0}$. Нужно доказать наличие такого представления для всех $u \in \mathcal{D}'_{k_0+1}$, у которых сумма коэффициентов $\mathfrak{A}_1(u)$ равна p. Пусть $u \notin \mathcal{D}_{k_0}$. Существуют $u', u'' \in L'$ такие, что $u' \in \mathcal{D}_{k_0}$ и $u = u' + u''$. Так как $u, u' \in \mathcal{D}'_{k_0+1} = \mathcal{D}''_{k_0+1}(j_{k_0+1})$ и $\mathfrak{A}_1(u) > \mathfrak{A}_1(u')$, то $u'' \in \mathcal{D}''_{k_0+1}(j_{k_0+1}+1) = \mathcal{D}'_{k_0+1}$. Из сделанного индукционного предположения следует, что $u'' = u_1 + \ldots + u_p$, где $u_1, \ldots, u_p \in \mathcal{D}_{k_0}$. Теперь $u = u' + u_1 + \ldots + u_p$.

Пусть предложение И доказано для всех Λ, длина $\mathcal{L}$-вывода которых из Λ_0 не превосходит n. Пусть Λ имеет $\mathcal{L}$-вывод длины $n+1$ из Λ_0. Тогда Λ получается из некоторой формальной формы Λ' с помощью применения одного из соотношений из $\mathcal{L}$ и имеется $\mathcal{L}$-вывод длины n Λ' из Λ_0. По предположению индукции, Λ' представима в одном из видов (4), где $x \in L_{k_0}; y_1, \ldots, y_p \in \mathcal{D}_{k_0}$. Если при этом $p \leq \lambda s$, то $\Lambda \in L'_{k_0+1}$. Если $p > \lambda s$, то существует формальная форма Λ'' такая, что $\Lambda'' \in L'_{k_0+1}$ и Λ есть $\Lambda'' + u_1 + \ldots + u_{p'}$, где $u_j \in \mathcal{D}_{k_0}$ $(j = 1, \ldots, p')$.

Предложение И доказано.

Пусть λ_1 – наибольший из коэффициентов в форме f. Рассмотрим всевозможные формальные формы одного из видов (4), где $x \in L_{k_0}; y_1, \ldots, y_p \in \mathcal{D}_{k_0}; p \leq \lambda_1 s$. Среди этих формальных форм выберем все такие, которые удовлетворяют условию: $\mathfrak{A}_1(\Lambda) = f$. Если будет выбрано несколько различных формальных форм, выполнено условие Б. Из предложения В следует, что ответ на вопрос 2) леммы I в этом случае положительный.

Если будет выбрана только Λ_0, ответ на рассматриваемый вопрос отрицательный. Иначе нашлись бы такие $c^{(1)}, c^{(2)} \in L(\mathfrak{A}_1)$, что $c^{(1)} \neq c^{(2)}$, $c^{(j)} = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i^{(j)} a_{s+i}$ $(j = 1, 2)$ и форма $f + c^{(1)}$ $\mathcal{L}$-эквивалентна форме $f + c^{(2)}$. Тогда Λ_0 была бы $\mathcal{L}$-эквивалентна формальной форме $\Lambda = f + \sum_{i=1}^{2} (\omega_i + \gamma_i^{(2)} - \gamma_i^{(1)}) a_{s+i}$ и при этом $\Lambda \neq \Lambda_0$, что в рассматриваемом случае невозможно.

Лемма I доказана.

ЛЕММА 2. Существует алгоритм, который по произвольному конечному множеству $\mathfrak{A}$ и произвольному конечному множеству $\mathcal{L}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ определяет для произвольных линейных форм f и g из $L(\mathfrak{A})$, существует ли такая линейная форма $e \in L(\mathfrak{A})$, что форма f $\mathcal{L}$-эквивалент-

на форме $g+e$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 2 принадлежит А.П.Бирюкову (см. [2]). Мы приводим доказательство леммы 6, в ходе которого строится алгоритм, отвечающий на сходный вопрос (см. лемму 6, шаг I).

3. Пусть $\chi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})=\lambda(\mathfrak{B})(q+1)$, где q - число определяющих соотношений в $\mathfrak{B}$. Через $M(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ обозначим полугруппу, заданную в классе коммутативных полугрупп с сокращением множеством образующих $\mathfrak{A}$ и множеством определяющих соотношений $\mathfrak{B}$ (см. [5]).

ЛЕММА Г.С.Цейтина (см. [4], лемма 5). Пусть $\mathfrak{A}=\{a_1,\dots,a_t\}$; $e_1,e_2\in L(\mathfrak{A})$; $\chi=\chi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$; $e_i\geqslant \chi a_1+\dots+\chi a_t$ $(i=1,2)$. Форма e_1 тогда и только тогда $\mathfrak{B}$-эквивалентна форме e_2, когда $[e_1]=[e_2]$ в $M(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$.*)

Пусть $h_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})=\sum\limits_{a\in\mathfrak{A}}\chi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\cdot a$.

4. Договоримся использовать следующие обозначения.

Для $a\in\mathfrak{A}$ определим множество $\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})$. Пусть $\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})\subseteq\mathfrak{A}$, и для каждого $b\in\mathfrak{A}$ включение $b\in\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такое $\alpha\in N$, что форма αa $\mathfrak{B}$-эквивалентна некоторой такой форме $f\in L(\mathfrak{A})$, для которой $(f)_b\neq 0$. В частности, $a\in\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})$ при всяком $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ - множество определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$. Для $a\in\mathfrak{A}$ определим $\mathfrak{B}(a)$. Пусть $\mathfrak{B}(a)\subseteq\mathfrak{B}$ и пусть для каждого соотношения $(c,e)\in\mathfrak{B}$ включение $(c,e)\in\mathfrak{B}(a)$ имеет место тогда и только тогда, когда $c,e\in L(\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B}))$.**)

Пусть для $a\in\mathfrak{A}$ $\chi_a=\chi(\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B}),\mathfrak{B}(a))$. Пусть γ_a - наименьшее из таких натуральных чисел γ, что в $L(\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B}),\mathfrak{B}(a))$ $\gamma\bar{a}=\sum\limits_{b\in\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})}\beta_b\bar{b}$, где $\beta_b\in N$, $\beta_b\geqslant\chi_a$ $(b\in\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B}),a\in\mathfrak{A})$. Из всевозможных равенств в $L(\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B}),\mathfrak{B}(a))$ вида $\gamma_a\bar{a}=\sum\limits_{b\in\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})}\beta_b\bar{b}$, где $\beta_b\in N$, $\beta_b\geqslant\chi_a$ выберем такое, для которого $\max\{\beta_b\mid b\in\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})\}$ принимает наименьшее значение. Пусть это будет равенство

$$\gamma_a a=\sum_{b\in\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})}\beta_b^{(a)}b. \tag{5}$$

Пусть $\beta^{(a)}=\max\{\beta_b^{(a)}\mid b\in\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})\}$.

Рассматриваем такие $a\in\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})=\mathfrak{A}$. Множество всех таких $a\in\mathfrak{A}$ обозначим через $\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}}$. Для $a\in\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}}$ находим $\beta^{(a)}$. Пусть $\beta=\max\{\chi(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),\beta^{(a)}\mid a\in\mathfrak{A}^{\mathfrak{B}}\}$. Пусть $h(\mathfrak{A},\mathfrak{B})=\sum\limits_{a\in\mathfrak{A}}\beta a$.

---

*) Определение $[x]$ для $x\in L(\mathfrak{A})$ имеется в заметке [5].

**) Пусть $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}$ и $c\in L(\mathfrak{A})$. Запись "$c\in L(\mathfrak{A}_1)$" означает, что $(c)_a=0$ для $a\in\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1$.

Ясно, что $h(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \geqslant h_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$.

Как обычно, нулем полугруппы M с операцией + назовем такой элемент $a \in M$, что $a+x=x+a=x$ для всех $x \in M$. Пусть $R \subset M$. Подполугруппой, порожденной в M множеством R , называется пересечение всех подполугрупп из M , содержащих R . Если множество R таково, что подполугруппа, порожденная R в M , есть M , то говорят, что полугруппа M порождается множеством R . Полугруппа M называется конечнопорожденной, если она порождается некоторым конечным множеством. В частности, если M порождается одноэлементным множеством, полугруппа M называется моногенной. Пусть $\delta(M)$ - количество всех обладающих нулями элементов конечной моногенной полугруппы и пусть $\varepsilon(M)$ - количество её элементов, не обладающих нулями . При этом элемент $a \in M$ называется нулем для элемента $x \in M$, если $a+x=x+a=x$ в M . Типом конечной моногенной полугруппы M называется пара чисел $(\varepsilon(M),\delta(M))$(см. [8], стр. 153) . Если M - полугруппа, $x \in M$, и полугруппа, порожденная $\{x\}$ в M , конечна, типом элемента x в M называется тип подполугруппы, порожденной $\{x\}$ в M . Если полугруппа , порожденная $\{x\}$ в M , бесконечна, типом элемента x в M называют пару чисел $(\infty, 0)$. Элемент $x \in M$ называется элементом конечного или бесконечного типа в соответствии с тем, является ли подполугруппа, порожденная $\{x\}$ в M , конечной или бесконечной.

ЛЕММА А.П.Бирюкова (см. [1],[3]). (1) Существует алгоритм, который по произвольному конечному множеству $\mathfrak{A}$ и по произвольному конечному множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ для каждого $a \in \mathfrak{A}$ строит $\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})$, $\mathfrak{B}(a)$ и находит некоторое такое натуральное число γ , что $\gamma\bar{a}=\sum_{b \in \mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})} \beta_b b$ в $L(\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B}),\mathfrak{B}(a))$, где

$$\beta_b \in N,\ \beta_b \geqslant K(\mathfrak{A}(a,\mathfrak{B}),\mathfrak{B}(a))(b \in \mathfrak{A}(a,\mathfrak{B})).$$

(2) Существует алгоритм, который по произвольному конечному множеству $\mathfrak{A}$ и по произвольному конечному множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ для каждого $a \in \mathfrak{A}$ определяет тип элемента $\bar{a}$ в $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$.

СЛЕДСТВИЕ. Существует алгоритм, который по произвольному конечному

множеству $\mathfrak{A}$ и произвольному конечному множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ строит линейную форму $h(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ из $L(\mathfrak{A})$.

5. Пусть $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1$, $h=h(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Рассмотрим множество $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ таких $c\in L(\mathfrak{A}_2)$, что для любой $e\in L(\mathfrak{A}_1)$ форма $c+e$ не является $\mathfrak{B}$-эквивалентной форме $h+f$ ни при какой $f\in L(\mathfrak{A})$. Во множестве $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ выберем все максимальные элементы. Получим множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$. Точнее,

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})=\{x\in\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})\mid(\forall y)(y\in\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})\to\neg(x<y))\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})=\{x\in L(\mathfrak{A}_2)\mid(\exists y)(y\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})\&x\leq y)\}$. Ясно, что $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ пусто, если $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ пусто. Заметим, что множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ может оказаться пустым, даже если $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ не пусто.

ЛЕММА 3. (I). Если $c\in\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$, $f\in L(\mathfrak{A}_1)$, $e\in L(\mathfrak{A}_1)$, $c'\in L(\mathfrak{A}_2)$ и форма $c+f$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна форме $c'+e$ в $L(\mathfrak{A})$, то $c'\in\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$.

(2) Если $c\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ (соответственно, $c\in\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$), $f\in L(\mathfrak{A}_1)$, $e\in L(\mathfrak{A}_1)$, $c'\in L(\mathfrak{A}_2)$ и форма $c+f$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна форме $c'+e$, то $c'\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ (соответственно, $c'\in\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$).

(3) Если $x\in L(\mathfrak{A})$, то либо форма x $\mathfrak{B}$-эквивалентна некоторой форме, большей h, либо существует такое $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}$ и такая форма $c\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$, что $x=c'+f$, где $c'\in L(\mathfrak{A}_2)$, $f\in L(\mathfrak{A}_1)$, $c'\leq c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (I) и (2) леммы 3 очевидны.

Докажем (3). Пусть форма x не $\mathfrak{B}$-эквивалентна никакой форме из $L(\mathfrak{A})$, большей h. Пусть $\mathfrak{A}=\{a_1,\dots,a_t\}$.

Проверяем для каждого $i\in\{1,\dots,t\}$, принадлежит ли $\{a_i\}(x)$ множеству $\mathfrak{N}(\{a_i\},\mathfrak{B})$. Если для каждого

$$i\in\{1,\dots,t\}\quad\{a_i\}(x)\notin\mathfrak{N}(\{a_i\},\mathfrak{B}),$$

то находим натуральное число γ_1 такое, что форма $\gamma_1a_1+\{a_1\}(x)$ не $\mathfrak{B}$-эквивалентна $h+f$ ни при каком $f\in L(\mathfrak{A})$, но форма $(\gamma_1+1)a_1+\{a_1\}x$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна $h+f$ при некотором $f\in L(\mathfrak{A})$.

Пусть уже построены натуральные числа $\gamma_1,\dots,\gamma_k$, где $k<t$. Находим такое $\gamma_{k+1}\in N$, что форма

$$\gamma_1a_1+\dots+\gamma_ka_k+\gamma_{k+1}a_{k+1}+\{a_1,\dots,a_k,a_{k+1}\}(x)$$

не $\mathfrak{B}$-эквивалентна $h+f$ ни при каком $f\in L(\mathfrak{A})$, но форма

$\gamma_1 a_1+\ldots+\gamma_k a_k+(\gamma_{k+1}+1)a_{k+1}+\{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}\}(x)$ $\mathcal{L}$-эквивалентна $h+f$ при некотором $f\in L(\mathfrak{A})$.

Таким образом, построим натуральные числа $\gamma_1,\ldots,\gamma_t$. Форму $\gamma_1 a_1+\ldots+\gamma_t a_t$ следует взять в качестве c, положив $\mathfrak{A}_1=\phi$.

Пусть теперь существует такое $i_0\in\{1,\ldots,t\}$, что

$$\{a_{i_0}\}(x)\in\mathfrak{N}(\{a_{i_0}\},\mathcal{L}).$$

Для всевозможных $i\neq i_0$ проверяем, верно ли, что

$$\{a_{i_0},a_i\}(x)\in\mathfrak{N}(\{a_{i_0},a_i\},\mathcal{L}).$$

После конечного числа шагов найдем такое $\{a_{i_0},a_{i_1},\ldots,a_{i_r}\}\subset\mathfrak{A}$, что $\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r}\}(x)\in\mathfrak{N}(\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r}\}\mathcal{L})$, но при любом $a_i\notin\{a_{i_0},a_{i_1},\ldots,a_{i_r}\}$, где $i\in\{1,\ldots,t\}$, имеем, что или $\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r},a_i\}(x)\notin$ $\notin\mathfrak{N}(\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r},a_i\},\mathcal{L})$, или $\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r},a_i\}=\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A}\setminus\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r}\}=\{b_1,\ldots,b_s\}$. Находим такое $\gamma_1\in N$, что $\gamma_1 b_1+\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r},b_1\}(x)\in\mathfrak{N}(\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r}\},\mathcal{L})$, но

$$(\gamma_1+1)b_1+\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r},b_1\}(x)\notin\mathfrak{N}(\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r}\},\mathcal{L}).$$

Пусть уже найдены $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$, где $k<s$. Находим такое $\gamma_{k+1}\in N$, что $\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r},b_1,\ldots,b_{k+1}\}(x)+\gamma_1 b_1+\ldots+\gamma_{k+1}b_{k+1}\in\mathfrak{N}(\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r}\},\mathcal{L})$, но $\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r},b_1,\ldots,b_{k+1}\}(x)+\gamma_1 b_1+\ldots+\gamma_k b_k+(\gamma_{k+1}+1)b_{k+1}\notin\mathfrak{N}(\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r}\},\mathcal{L})$. Форму $\gamma_1 b_1+\ldots+\gamma_s b_s$ следует взять в качестве c, положив $\mathfrak{A}_1=\{a_{i_0},\ldots,a_{i_r}\}$.

Лемма 3 доказана.

Разобьем множество $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathcal{L})$ на классы сводимости следующим образом. Отнесем c', c'' из $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathcal{L})$ тогда и только тогда к одному классу сводимости, когда существуют такие e',e'' из $L(\mathfrak{A}_1)$, что форма $c'+e'$ $\mathcal{L}$-эквивалентна форме $c''+e''$ в $L(\mathfrak{A})$.

Пусть $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathfrak{A}_1,\mathcal{L}),\ldots,\mathfrak{M}_{2,i(\mathfrak{A})}(\mathfrak{A}_1,\mathcal{L})$ – все различные классы сводимости из $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathcal{L})$.

Для каждого $j\in\{1,\ldots,i(\mathfrak{A}_1)\}$, каждого $\mathfrak{A}_3\subset\mathfrak{A}_1$ и каждых c', c'' из $\mathfrak{M}_{2,j}(\mathfrak{A}_1,\mathcal{L})$ рассмотрим множество $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_3,c',c'',\mathcal{L})$ таких линейных форм c из $L(\mathfrak{A}_1\setminus\mathfrak{A}_3)$, что для любой формы f из $L(\mathfrak{A}_3)$ форма $c'+c+f$ не является $\mathcal{L}$-эквивалентной форме $c''+g$ ни при каком $g\in L(\mathfrak{A}_1)$. Пусть

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_3,c',c'',\mathcal{L})=\{x\in\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_3,c',c'',\mathcal{L})\mid\forall y(y\in\mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_3,c',c'',\mathcal{L})\to\neg(x<y))\}.$$

ЛЕММА 4. Пусть $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}$; $c',c''\in\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathcal{L})$; x есть $c'+e$, где $e\in L(\mathfrak{A}_1)$. Либо форма x $\mathcal{L}$-эквивалентна форме $c''+g$ при некотором $g\in L(\mathfrak{A}_1)$; либо формы c' и c'' лежат

в разных классах сводимости из $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$; либо существует такое $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{A}_1$ и такая форма c из $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', \mathfrak{B})$, что e есть $c_1 + f$, где $f \in L(\mathfrak{A}_3)$, $c_1 \in L(\mathfrak{A}_1 \setminus \mathfrak{A}_3)$, $c_1 \leq c$.

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 3 (3).

ЛЕММА 5. (I) Существует алгоритм, который по произвольному конечному множеству $\mathfrak{A}$, по произвольному конечному множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ и по произвольному $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ строит множества $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$ и $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$ и разбивает множество $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$ на классы сводимости.

(2) Существует алгоритм, который по произвольным конечным множествам $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$ таким, что $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, по произвольному конечному множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ и по таким произвольным

$$c', c'' \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}),$$

что c' и c'' лежат в одном классе сводимости из $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$, строит множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', \mathfrak{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что построение $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', \mathfrak{B})$ производится аналогично построению $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$, а построение $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$ по $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$ и разбиение $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$ на классы сводимости производится очевидным образом. Мы ограничимся описанием алгоритма для построения $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})$.

Рассмотрим (линейные) упорядочения множества $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1$. Пусть $\langle b_1, \ldots, b_s \rangle$ – одно из таких упорядочений. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Для $j = 0, 1, \ldots, \mathfrak{H}-1, \mathfrak{H}$ проверяем, принадлежит ли jb_1 множеству $\mathfrak{M}(\mathfrak{A} \setminus \{b_1\}, \mathfrak{B})$. Эта проверка осуществляется при помощи алгоритма, существование которого утверждается в лемме 2.

Пусть γ_1 – наименьшее из таких $j = \{0, 1, \ldots, \mathfrak{H}-1, \mathfrak{H}\}$, что $jb_1 \notin \mathfrak{M}(\mathfrak{A} \setminus \{b_1\}, \mathfrak{B})$. пусть $\alpha_1 = \mathfrak{H}$.

Пусть уже построены функции $\gamma_1, \gamma_2(j_1), \ldots, \gamma_k(j_1, \ldots, j_{k-1})$ и

$$\alpha_1, \alpha_2(j_1), \ldots, \alpha_k(j_1, \ldots, j_{k-1}).$$

Пусть при этом для $i = 1, \ldots, k$ функции $\gamma_i(j_1, \ldots, j_{i-1})$ и $\alpha_i(j_1, \ldots, j_{i-1})$

определены для тех и только тех наборов $\langle j_1,\dots,j_{i-1}\rangle$, которые удовлетворяют условиям:

$$j_\ell \in \{\gamma_\ell(j_1,\dots,j_{\ell-1}),\dots,\alpha_\ell(j_1,\dots,j_{\ell-1})-1\} \quad (\ell=1,\dots,i-1).^{ж)}$$

Пусть при этом $\gamma_i(j_1,\dots,j_{i-1}) \le \alpha_i(j_1,\dots,j_{i-1})$.

Пусть $k<s$ и $j_\ell \in \{\gamma_\ell(j_1,\dots,j_{\ell-1}),\dots,\alpha_\ell(j_1,\dots,j_{\ell-1})-1\}$ для $\ell=1,\dots,k$. Для форм $f\in L(\{b_{k+1},\dots,b_s\})$ через $\lambda(f)$ обозначаем наибольший коэффициент формы f. Среди форм

$$f\in L(\{b_{k+1},\dots,b_s\})$$

таких, что $j_1b_1+\dots+j_kb_k+f\notin \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{L})$, выбираем форму, для которой $\lambda(f)$ принимает наименьшее значение. Пусть эта форма есть f_0 и пусть $\lambda(f_0)=\lambda_0$. Пусть $c(j_1,\dots,j_k)$ есть

$$\lambda_0 b_{k+1}+\dots+\lambda_0 b_s.$$

Пусть $\alpha_{k+1}(j_1,\dots,j_k)=\lambda_0$ и пусть $\gamma_{k+1}(j_1,\dots,j_k)$ – наименьшее из таких $j\in\{0,1,\dots,\alpha_{k+1}(j_1,\dots,j_k)\}$, что

$$j_1b_1+\dots+j_kb_k+jb_{k+1}\notin \mathfrak{M}(\mathfrak{A}\setminus\{b_1,\dots,b_{k+1}\},\mathfrak{L}).$$

Понятно, что описанное здесь построение корректно и что это построение определяет $\alpha_i(j_1,\dots,j_{i-1})$ и $\gamma_i(j_1,\dots,j_{i-1})$ для

$$j_\ell\in\{\gamma_\ell(j_1,\dots,j_{\ell-1}),\dots,\alpha_\ell(j_1,\dots,j_{\ell-1})-1\} \quad (\ell=1,\dots,i-1;\ i=1,\dots,s).$$

Кортеж $\langle j_1,\dots,j_{k-1}\rangle$ назовем допустимым, если $\gamma_k(j_1,\dots,j_{k-1})$ определено. С каждым допустимым кортежем $\langle j_1,\dots,j_{s-1}\rangle$ таким, что $\gamma_s(j_1,\dots,j_{s-1})\ge 1$, связываем линейную форму

$$j_1b_1+\dots+j_{s-1}b_{s-1}+j_sb_s,$$

где $j_s=\gamma_s(j_1,\dots,j_{s-1})-1$. Полученное множество линейных форм из $L(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1)$ (для всевозможных упорядочений множества $\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1$ и всевозможных допустимых кортежей) обозначаем через $\mathfrak{M}'(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{L})$. Понятно, что $\mathfrak{M}'(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{L})\subset\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{L})$. Покажем, что $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{L})\subseteq\mathfrak{M}'(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{L})$.

Пусть $x\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{L})$. Тогда, по крайней мере, один коэффициент в форме x меньше $\aleph$. Соответствующую букву выбираем в качестве b_1. Понятно, что $x=j_1b_1+\{b_1\}(x)$, где $\gamma_1\le j_1<\aleph$. Пусть уже выбраны буквы $b_1,\dots,b_k$ $(k<s-1)$ так, что

ж) Если $a,b\in N$, через $\{a,\dots,b\}$ обозначается множество, состоящее из тех и только тех натуральных чисел x, которые удовлетворяют условию $a\le x\le b$. Если $a>b$, множество $\{a,\dots,b\}$ пусто.

$x=j_1b_1+\ldots+j_kb_k+\{b_1,\ldots,b_k\}(x)$, кортеж $\langle j_1,\ldots,j_{k-1}\rangle$ является допустимым и $\gamma_k(j_1,\ldots,j_{k-1})\le j_k<\alpha_k(j_k,\ldots,j_{k-1})$. Рассматриваем форму $c(j_1,\ldots,j_k)$. По крайней мере, один коэффициент в форме $\{b_1,\ldots,b_k\}(x)$ меньше соответствующего коэффициента в форме $c(j_1,\ldots,j_k)$. Соответствующую букву выбираем в качестве b_{k+1} . Пусть $x=j_1b_1+\ldots+j_kb_k+j_{k+1}b_{k+1}+\{b_1,\ldots,b_k,b_{k+1}\}(x)$. Понятно, что кортеж $\langle j_1,\ldots,j_k\rangle$ является допустимым и что

$$\gamma_{k+1}(j_1,\ldots,j_k)\le j_{k+1}<\alpha_{k+1}(j_1,\ldots,j_k).$$

Таким образом, получим упорядочение $\langle b_1,\ldots,b_s\rangle$ такое, что кортеж $\langle j_1,\ldots,j_{s-1}\rangle$ является допустимым, $j_s=\gamma_s(j_1,\ldots,j_{s-1})-1$ и $x=j_1b_1+\ldots+j_sb_s$. Это показывает, что $x\in\mathfrak{M}'(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$.

Остается проверить для $x\in\mathfrak{M}'(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$, принадлежит ли x множеству $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$. Эта проверка производится очевидным образом.

Лемма 5 доказана.

6. Зафиксируем $\mathfrak{A}_0\subset\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}_0\ne\phi$ и $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_0$.

Пусть $c\in L(\mathfrak{A}')$. Будем говорить, что форма $x\in L(\mathfrak{A}_0)$, $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_0,c)$ -эквивалентна форме $y\in L(\mathfrak{A}_0)$, если $c+x$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна $c+y$ в $L(\mathfrak{A})$. Понятно, что отношение $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_0,c)$-эквивалентности на $L(\mathfrak{A}_0)$ является конгруентностью по отношению к операции + на $L(\mathfrak{A}_0)$. Известно, что каждая конгруентность на $L(\mathfrak{A}_0)$ является конечноопределенной (см. [6], теорема 72, стр. 124). Другими словами, существует такое конечное множество $\mathfrak{B}_0$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}_0$, что $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_0,c)$ -эквивалентность на $L(\mathfrak{A}_0)$ совпадает с $\mathfrak{B}_0$-эквивалентностью на $L(\mathfrak{A}_0)$.

Будем говорить, что конечное множество $\mathfrak{B}_0$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}_0$ удовлетворяет условию $\Gamma(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B},c)$, если $\mathfrak{B}_0$ -эквивалентность на $L(\mathfrak{A}_0)$ совпадает с $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_0,c)$ -эквивалентностью на $L(\mathfrak{A}_0)$. Понятно, что существует много различных конечных $\mathfrak{B}_0$, удовлетворяющих условию $\Gamma(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B},c)$.

ЛЕММА 6. Существует алгоритм, который по произвольным конечным множествам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_0$ таким, что $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_0\ne\phi$, по произвольному конечному множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ и по произвольной линейной форме $c\in L(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_0)$ строит некоторое такое конечное множество $\mathfrak{B}_0$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}_0$, которое удовлетворяет условию $\Gamma(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B},c)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму 6 будем доказывать индукцией по числу

элементов множества $\mathfrak{A}$, а для множеств $\mathfrak{A}$ с данным числом элементов индукцией по числу элементов множества $\mathfrak{A}_0$.

Лемма очевидна, если множество $\mathfrak{A}_0$ содержит один элемент. Пусть лемма 6 доказана во всех случаях, когда число элементов множества $\mathfrak{A}$ меньше t и когда число элементов множества $\mathfrak{A}$ равно t, а число элементов множества $\mathfrak{A}_0$ меньше p.

Рассмотрим случай, когда множество $\mathfrak{A}$ содержит t элементов, а множество $\mathfrak{A}_0$ содержит p элементов $(0<p<t)$.

Опишем алгоритм, который для произвольного конечного множества $\mathfrak{B}_0$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}_0$ такого, что если пара $(e,f)\in\mathfrak{B}_0$, то форма e $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_0,c)$-эквивалентна форме f, отвечает на следующий вопрос Д.

Вопрос Д. Совпадает ли $\mathfrak{B}_0$-эквивалентность с $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_0,c)$-эквивалентностью на $L(\mathfrak{A}_0)$?

Строим множества $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}_0)$, $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}_0)$, $\mathfrak{M}_{2,j}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}_0)$ и $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_3,c',c'',\mathfrak{B}_0)$ для всех $\mathfrak{A}_3\subset\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}_0$; $c',c''\in\mathfrak{M}_{2,j}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}_0)$; $j=1,\dots,i(\mathfrak{A}_1)$.

Шаг I. Для каждого $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}_0$ и для каждой формы $c_1\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}_0)$ проверяем, существует ли такая форма $e_1\in L(\mathfrak{A}_1)$, что форма $c+c_1+e_1$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна форме $c+h(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0)+f$, где $f\in L(\mathfrak{A}_0)$.

Эта проверка может быть проведена следующим образом. Построим конечные множества $\mathcal{L}$ и $\mathcal{Y}$ из $L(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1)$ такие, что каждая форма z из $L(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1)$ тогда и только тогда $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B})$-эквивалентна форме $c+c_1$, когда z имеет один из видов (4), где $x\in\mathcal{L}$; $y_1,\dots,y_p\in\mathcal{Y}$. Способ построения таких множеств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{Y}$ указан в работе А.П.Бирюкова [2].

Среди всех форм $y\in\mathcal{Y}$ выбираем такие, для которых $(\mathfrak{A}_0\setminus\mathfrak{A}_1)(y)$ есть ненулевая форма. Полученное множество обозначим через $\mathcal{Y}'$.

Среди всевозможных выражений z одного из видов (4), где $x\in\mathcal{L}$; $y_1,\dots,y_p\in\mathcal{Y}'$; $p\leq\lambda(t-p)$, λ – наибольший коэффициент формы c, выбираем такие, для которых $(\mathfrak{A}_0\setminus\mathfrak{A}_1)(z)$ есть c. Полученное множество обозначаем через $\mathcal{L}'$.

Если $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}'$, остается проверить, имеется ли во множестве $\mathcal{L}'$ форма, большая $c+\mathfrak{A}_1(h(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0))$.

Если $\mathcal{Y}\neq\mathcal{Y}'$ и во множестве $\mathcal{L}'$ нет формы, большей $c+\mathfrak{A}_1(h(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0))$, то для каждого $f\in\mathcal{L}'$ через $(\mathfrak{A}_0\setminus\mathfrak{A}_1)^f$ обозначаем множество таких $a\in\mathfrak{A}_0\setminus\mathfrak{A}_1$, что

$$(f)_a<(c+\mathfrak{A}_1(h(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0)))_a.$$

Остается проверить, существует ли такое $f\in\mathcal{L}'$, что для каждого $a\in(\mathfrak{A}_0\setminus\mathfrak{A}_1)^f$ в $\mathcal{Y}\setminus\mathcal{Y}'$ имеется такая форма g, что $(g)_a\neq 0$.

Это заканчивает описание алгоритма для выполнения шага I.

Если существует такое $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_0$ и такая форма $c_1 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$, что для некоторой формы $e_1 \in L(\mathfrak{A}_1)$ форма $c+c_1+e_1$ $\mathfrak{B}$ -эквивалентна форме $c+h(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)+f(f \in L(\mathfrak{A}_0))$, ответ на вопрос Д отрицательный.

В противном случае переходим к выполнению шага 2.

Ш а г 2 . Для каждого $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_0$, каждых j_1 , j_2 ,таких, что $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, i(\mathfrak{A}_1)\}$ и $j_1 \neq j_2$, и каждых $c' \in \mathfrak{M}_{2,j_1}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$, $c'' \in \mathfrak{M}_{2,j_2}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$, проверяем, существуют ли такие $e', e'' \in L(\mathfrak{A}_1)$, что форма $c+c'+e'$ $\mathfrak{B}$ -эквивалентна форме $c+c''+e''$. Существование алгоритма для такой проверки утверждается в лемме I.

Если существуют такие $\mathfrak{A}_1$, j_1 , j_2 , c' и c'' , что

$$c' \in \mathfrak{M}_{2,j_1}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0), \quad c'' \in \mathfrak{M}_{2,j_2}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0), \quad j_1 \neq j_2$$

и при некоторых $e', e'' \in L(\mathfrak{A}_1)$ форма $c+c'+e'$ $\mathfrak{B}$ -эквивалентна форме $c+c''+e''$, ответ на вопрос Д отрицательный.

В противном случае переходим к шагу 3.

Ш а г 3 . Для каждых $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_0$; $j=1, \ldots, i(\mathfrak{A}_1)$; $c', c'' \in \mathfrak{M}_{2,j}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$; $e \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', \mathfrak{B}_0)$ проверяем,существуют ли такие $g \in L(\mathfrak{A}_3)$ и $f \in L(\mathfrak{A}_1)$, что форма $c+c'+e+g$ $\mathfrak{B}$ -эквивалентна форме $c+c''+f$.

Эта проверка может быть описана следующим образом. Построим конечные множества $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ из $L(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_3)$такие, что каждая форма $z \in L(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_3)$ тогда и только тогда $\mathfrak{A}_3(\mathfrak{B})$ -эквивалентна форме $c+c'+e$, когда z имеет один из видов (4), где $x \in \mathcal{L}$ и $y_1, \ldots, y_p \in \mathcal{J}$.

Пусть $\mathcal{J}'$ есть множество всех таких форм $y \in \mathcal{J}$, для которых $(\mathfrak{A}_1 \setminus \mathfrak{A}_3)(y)$ есть ненулевая форма. Пусть $\mathcal{L}'$ есть множество всех таких выражений z одного из видов (4), где $x \in \mathcal{L}$; $y_1, \ldots, y_p \in \mathcal{J}'$; $p \leq \lambda(t-p')$, λ- наибольший коэффициент формы $c+c''$; p'- число элементов в $\mathfrak{A}_1$. Проверяем, имеется ли такая форма $z \in \mathcal{L}'$, что $(\mathfrak{A}_1 \setminus \mathfrak{A}_3)(z)$ есть $c+c''$.

Это заканчивает описание алгоритма для выполнения шага 3.

Если существуют такие $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_1$, j , c' , c'' , e ,что $c', c'' \in \mathfrak{M}_{2,j}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$, $e \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', \mathfrak{B}_0)$ и при некоторых $g \in L(\mathfrak{A}_3)$ и $f \in L(\mathfrak{A}_1)$ форма $c+c'+e+g$ $\mathfrak{B}$ -эквивалентна форме $c+c''+f$, ответ на вопрос Д отрицательный.

В противном случае переходим к шагу 4.

Ш а г 4 . Для любых $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_0$, $c' \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$ находим ответ на следующий вопрос Ж.

В о п р о с Ж . Совпадает ли $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_1, c+c')$ -эквивалент-

ность на $L(\mathfrak{A}_1)$ с $\mathcal{L}_0(\mathfrak{A}_1, c')$ -эквивалентностью на $L(\mathfrak{A}_1)$?

По индуктивному предположению мы можем построить конечные множества $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}_1$ такие, что $\mathcal{L}'$ -эквивалентность на $L(\mathfrak{A}_1)$ совпадает с $\mathcal{L}$ $(\mathfrak{A}_1, c+c')$ -эквивалентностью на $L(\mathfrak{A}_1)$ и что $\mathcal{L}''$ -эквивалентность на $L(\mathfrak{A}_1)$ совпадает с $\mathcal{L}_0(\mathfrak{A}_1, c')$ -эквивалентностью на $L(\mathfrak{A}_1)$. Это означает, что для ответа на вопрос Ж достаточно проверить, совпадает ли $\mathcal{L}'$ -эквивалентность на $L(\mathfrak{A}_1)$ с $\mathcal{L}''$-эквивалентностью на $L(\mathfrak{A}_1)$.

Если существуют $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_0$ и $c' \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathcal{L}_0)$, для которых ответ на вопрос Ж отрицательный, ответ на вопрос Д тоже отрицательный.

Если для каждых $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_0$ и $c' \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathcal{L}_0)$ ответ на вопрос Ж положительный, переходим к шагу 5.

Шаг 5 . Находим некоторое разбиение $\{d_1, \dots, d_s\}$, $\{b_1, \dots, b_r\}$ образующих полугруппы $M(\mathfrak{A}_0, \mathcal{L}_0)$ на существенные и несущественные и числа α_j , $\gamma_{i,j}$, $\delta_{n,j}$ $(j=1,\dots,r;\ i=1,\dots,s;\ n=j+1,\dots,r)$, соответствующие этому разбиению (см. [5]). Проверяем, имеется ли $\mathcal{L}$-эквивалентность $c+h_1(\mathfrak{A}_0, \mathcal{L}_0)+e_1$ и $c+h_1(\mathfrak{A}_0, \mathcal{L}_0)+e_2$, где

$$e_i = \sum_{j=1}^{s} \varphi_j^{(i)} d_j + \sum_{k=1}^{r} \varphi_k^{(i)} b_k;\ \varphi_k^{(i)},\ \varphi_j^{(i)} \in N;\ \varphi_k^{(i)} < \alpha_k;\ e_1 \neq e_2 \text{ в } L(\mathfrak{A}_0) \quad (6)$$

$$(i=1,2;\ j=1,\dots,s;\ k=1,\dots,r).$$

Если существуют такие e' и e'' , удовлетворяющие условиям (6), что $c+h_1(\mathfrak{A}_0, \mathcal{L}_0)+e_1$ $\mathcal{L}$-эквивалентна $c+h_1(\mathfrak{A}_0, \mathcal{L}_0)+e_2$, ответ на вопрос Д отрицательный.

Докажем, что в противном случае ответ на вопрос Д положительный.

Предположим, что форма $c+g_1$ $\mathcal{L}$-эквивалентна форме $c+g_2$, где $g_1, g_2 \in L(\mathfrak{A}_0)$. Докажем, что форма g_1 $\mathcal{L}_0$ -эквивалентна форме g_2 . Наше доказательство состоит из разбора двух случаев.

Первый случай. Пусть g_1 $\mathcal{L}_0$-эквивалентна $h(\mathfrak{A}_0, \mathcal{L}_0)+e_1$, где $e_1 \in L(\mathfrak{A}_0)$. Тогда $\mathfrak{A}_1(g_2) \notin \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathcal{L}_0)$ ни для какого $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_0$ (см. шаг I). Поэтому g_2 $\mathcal{L}_0$ -эквивалентна $h(\mathfrak{A}_0, \mathcal{L}_0)+e_2$, где $e_2 \in L(\mathfrak{A}_0)$ (см. лемму 3). Тем более g_i $\mathcal{L}_0$ -эквивалентна

$$h_1(\mathfrak{A}_0, \mathcal{L}_0)+e_i', \text{ где } e_i' \in L(\mathfrak{A}_0) \quad (i=1,2).$$

Рассмотрим теперь класс $[e_i']$ в $M(\mathfrak{A}_0, \mathcal{L}_0)$ (см. [5]) и приведем $[e_i']$ к виду, указанному в лемме 2 из [5] $(i=1,2)$. Пусть

$$[e_i'] + \sum_{j \in Q_i} \varphi_j^{(i)} [d_j] = \sum_{j \in Q_i'} \varphi_j^{(i)} [d_j] + \sum_{k=1}^{r} \varphi_k^{(i)} [b_k] ,$$

где $\psi_k^{(i)}, \varphi_j^{(i)} \in N$; $\psi_k^{(i)} < \alpha_k$; $\varphi_j^{(i)} \neq 0$; $Q_i \cup Q_i' \subset \{1,\dots,s\}$; $Q_i \cap Q_i' = \phi$ $(i=1,2;\ k=1,\dots,r;\ j=Q_i \cup Q_i')$. Пусть $1^* = 2$ и $2^* = 1$.

Из леммы Цейтина следует, что форма

$$h_1(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) + e_i' + \sum_{j \in Q_i} \varphi_j^{(i)} d_j + \sum_{j \in Q_{i^*}} \varphi_j^{(i^*)} d_j$$

$\mathfrak{B}_0$-эквивалентна форме

$$h_1(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) + \sum_{j \in Q_i'} \varphi_j^{(i)} d_j + \sum_{k=1}^{r} \psi_k^{(i)} b_k + \sum_{j \in Q_{i^*}} \varphi_j^{i^*} d_j \quad (i=1,2).$$

Тем более эти две формы $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_0, c)$-эквивалентны. Пусть f_i есть

$$\sum_{j \in Q_i'} \varphi_j^{(i)} d_j + \sum_{j \in Q_{i^*}} \varphi_j^{(i^*)} d_j + \sum_{k=1}^{r} \psi_k^{(i)} b_k$$

для $i=1,2$. Тогда форма $c + h_1(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) + f_1$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна форме $c + h_1(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) + f_2$. Это может иметь место только в том случае, если $\psi_k^{(1)} = \psi_k^{(2)}$, $Q_1 = Q_2$, $Q_1' = Q_2'$, $\varphi_j^{(1)} = \varphi_j^{(2)}$ $(k=1,\dots,r;\ j \in Q_1 \cup Q_1')$ (см. шаг 5).

Теперь форма $h_1(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) + f_1$ совпадает с формой $h_1(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) + f_2$. Вместе с предыдущим это означает, что $[e_1'] = [e_2']$ в $M(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)$ и, в силу леммы Цейтина, что $h_1(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) + e_1'$ $\mathfrak{B}_0$-эквивалентна $h_1(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) + e_2'$.

Таким образом, g_1 $\mathfrak{B}_0$-эквивалентна g_2.

Второй случай. Пусть $g_i = c_i + f_i$, где $f_i \in L(\mathfrak{A}_1)$, $c_i \in L(\mathfrak{A}_0 \setminus \mathfrak{A}_1)$, $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_0$ $(i=1,2)$, и пусть $c_1 \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$.

Покажем сначала, что $c_2 \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$. Пусть $c' \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$ и $c' = c_1 + c_3$, где $c_3 \in L(\mathfrak{A}_0 \setminus \mathfrak{A}_1)$. Тогда $c + c_1 + c_3 + f_1$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна $c + c_2 + c_3 + f_2$. Это означает, что $c_2 + c_3 \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$ (см. шаг I). Если бы существовала такая ненулевая форма $c_4 \in L(\mathfrak{A}_0 \setminus \mathfrak{A}_1)$, что $c_2 + c_3 + c_4 \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$, то для некоторого $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{A}_0 \setminus \mathfrak{A}_1$ и некоторых $g' \in L(\mathfrak{A}_0 \setminus (\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_3))$, $e' \in L(\mathfrak{A}_3)$ имелось бы равенство $c_2 + c_3 + c_4 = g' + e'$, где $g' \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_0)$ (см. доказательство леммы 3 (3)). Пусть $c_1 + c_3 + c_4 = g'' + e''$, где $g'' \in L(\mathfrak{A}_0 \setminus (\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_3))$, $e'' \in L(\mathfrak{A}_3)$. Тогда $g'' \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_0)$ (см. шаг I). Тем более, $c_1 + c_3 + c_4 \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$. Последнее, однако, противоречит выбору c'. Таким образом, $c_2 + c_3 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$, значит, $c_2 \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$.

Формы c_1 и c_2 принадлежат к одному и тому же классу сводимости из $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0)$ (см. шаг 2). Существует такая форма f_2', что $f_2' \in L(\mathfrak{A}_1)$ и $c_1 + f_1$ $\mathfrak{B}_0$-эквивалентна $c_2 + f_2'$ (см. шаг 3 и лемму 4). Форма $c_2 + f_2$ $\mathfrak{B}_0$-эквивалентна форме $c_2 + f_2'$ (см. шаг 4.)

Таким образом, формы g_1 и g_2 $\mathfrak{B}_0$-эквивалентны.

Алгоритм, отвечающий на вопрос Д, вместе с алгоритмом, перечисляющим все такие пары (e, f), что $e, f \in L(\mathfrak{A}_0)$ и $c + e$ $\mathfrak{B}$-эквивалентна $c + f$, очевидным образом используется для построе -

ния такого конечного множества $\mathcal{B}_0$, которое удовлетворяет условию $\Gamma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0, \mathcal{B}, c)$.

Лемма 6 доказана.

§ 2. Описание совокупности аксиом $W(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$

I. Рассмотрми для некоторых конечных $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{B}$ коммутативную полугруппу $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Пусть для каждого $a \in \mathfrak{A}$ через G_a обозначается одноместный предикат на $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, определяемый следующим образом. Для $x \in L(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда $G_a(\bar{x})$ истинно в $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, когда существует такое $\alpha \in N$, что $\bar{x} = \overline{\alpha a}$ в $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Пусть для каждых $a, b \in \mathfrak{A}$, через $F_{a,b}$ обозначается двухместный предикат на $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, определяемый следующим образом. Для $x, y \in L(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда $F_{a,b}(\bar{x}, \bar{y})$ истинно в $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, когда существует такое $\alpha \in N$, что одновременно $\bar{x} = \overline{\alpha a}$ и $y = \overline{\alpha b}$ в $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Пусть $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_s; b_1, \ldots, b_r\}$, где $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$ имеют бесконечный тип в $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, а $b_1, \ldots, b_r$ имеют конечный тип в $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Пусть G_i есть G_{a_i} и $F_{1,j}$ есть F_{a_1, a_j} ($i = 1, \ldots, s$; $j = 2, \ldots, s$).

Пусть $\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ есть $\{a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_r, \Theta; G_1, \ldots, G_s, F_{1,2}, \ldots, F_{1,s}; +\}$. Если для каждого $a \in \mathfrak{A}$ $\bar{a}$ имеет конечный тип в $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, предикаты $G_1, \ldots, G_s$, $F_{1,2}, \ldots, F_{1,s}$ отсутствуют в $\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. В этом случае $\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = \{b_1, \ldots, b_r, \Theta; +\}$. Если $s = 1$, предикаты $F_{1,2}, \ldots, F_{1,s}$ в $\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ отсутствуют. В этом случае

$$\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = \{a_1, b_1, \ldots, b_r, \Theta; G_1; +\}.$$

Рассматривая на $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ предикаты, входящие в $\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, и выбирая элементы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r$, $\bar{\Theta}$, где $\bar{\Theta}$ - класс $\mathcal{B}$-эквивалентности на $L(\mathfrak{A})$, содержащий нулевую линейную форму в качестве $a_1, \ldots, a_s$, $b_1, \ldots, b_r$, Θ соответственно, будем смотреть на $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ как на систему сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Совокупность всех таких замкнутых формул исчисления предикатов первой ступени, которые не содержат внелогических символов, не входящих в $\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, обозначим через $L_{\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B})}$. Совокупность всех формул из $L_{\sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{B})}$, истинных в системе $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, назовем теорией системы $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Через $Th(L(\mathfrak{A}, \mathcal{B}))$ обозначим теорию системы $L(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Основная цель этой заметки - доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА I. Существует алгоритм, ко-

торый по произвольному конечному множеству $\mathfrak{A}$, произвольному конечному множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ и произвольной формуле $\Phi \in L_{\sigma(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$ определяет, истинна формула Φ в системе $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ или нет.

Понятно, что из теоремы I вытекает существование алгоритма для решения проблемы А.

Доказательство теоремы I будет проведено следующим образом. Сначала будет описан алгоритм, который по произвольным конечным множеству $\mathfrak{A}$ и множеству $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$ строит рекурсивную систему аксиом $W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Затем будет доказано, что теория $[W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})]_{\sigma(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$ полна.*) Полноту теории $[W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})]_{\sigma(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$ мы доказываем методом модельной полноты, замечая, что теория $[W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})]_{\sigma(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$ модельно полна и что эта теория имеет минимальную систему (а именно, систему $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$). Из полноты и рекурсивной аксиоматизируемости теории $[W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})]_{\sigma(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$ следует, что $[W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})]_{\sigma(\mathfrak{A},\mathfrak{B})} = Th(L(\mathfrak{A},\mathfrak{B}))$ и что теория $Th(L(\mathfrak{A},\mathfrak{B}))$ разрешима. Более того, из эффективности построения $W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ по $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и из полноты

$$[W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})]_{\sigma(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$$

следует теорема I.

В качестве следствия из теоремы I получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Теория каждой конечноопределенной коммутативной полугруппы разрешима.

Оставшаяся часть этой заметки посвящена построению $W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ и доказательству полноты $[W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})]_{\sigma(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}$.

2. Множество $W(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ мы определяем как объединение двух множеств $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ и $W_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$.

Опишем множество $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$.

При записи следующих аксиом будем использовать несколько сокращений. Эти сокращения заимствованы из [5], где и разъяснён их смысл. Напомним только, что "$x \leq_i y$" есть сокращение для "$\exists z(x+z=y \,\&\, G_i(z))$" и что "$0 \cdot x$" есть сокращение для "$\Theta$". Пусть $(\varepsilon(b_i), \delta(b_i))$ – тип элемента $\bar{b}_i$ в $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ $(i=1,\dots,r)$.

*) Далее мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в обзоре [7].

$W_{1,1}(i)$. $\forall xyz((G_i(x)\&G_i(y)\&G_i(z))\to(G_i(x+y)\&(x\leq_i y\vee y\leq_i x)\&$

$\&((x\leq_i y\&y\leq_i x)\to x=y)\&(x=\theta\vee d_i\leq_i x)\&(x+z=y+z\to x=y)))\&$

$\&G_i(\theta)\&G_i(d_i)\&d_i\neq\theta$.

$W_{1,2}(i,n)$. $\forall x(G_i(x)\to\exists uv(x=nu+v+G_i(u)\&(\bigvee_{j=0}^{n-1}v=jd_i)))$.

$W_{1,3}(j)$. $\forall xyzt((F_{1,j}(x,y)\to(G_j(x)\&G_j(y)))\&((F_{1,j}(x,y)\&F_{1,j}(x,z))\to y=z)\&$

$\&((F_{1,j}(x,z)\&F_{1,j}(y,z))\to y=x)\&((F_{1,j}(x,y)\&F_{1,j}(y,t))\to F_{1,j}(x+y,z+t)))$.

$W_{1,4}(j)$. $\forall x((G_1(x)\to\exists yF_{1,j}(x,y))\&(G_j(x)\to\exists yF_{1,j}(y,x)))\&F_{1,j}(d_1,d_j)\&F_{1,j}(\theta,\theta)$.

$W_{1,5}$. $\forall xyz(x+y=y+x\&x+(y+z)=(x+y)+z\&x+\theta=x)$.

$W_{1,6}$. $\forall x\exists y_1\dots y_s z_1\dots z_r(\bigwedge_{i=1}^{s}G_i(y_i)\&\bigwedge_{i=1}^{r}(\bigvee_{j=1}^{\varepsilon(b_i)+\delta(b_i)-1}z_i=jb_i)\&x=\sum_{i=1}^{s}y_i+\sum_{i=1}^{r}z_i)$.

При $s>1$ совокупность аксиом $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ есть

$\{W_{1,1}(i),W_{1,2}(i,n),W_{1,3}(j),W_{1,4}(j),W_{1,5},W_{1,6}\mid i=1,\dots,s;j=2,\dots,s;n\in N\setminus\{0\}\}$.

Если $s=1$, $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ есть $\{W_{1,1}(1),W_{1,2}(1,n),W_{1,5},W_{1,6}\mid n\in N\setminus\{0\}\}$.

В этих случаях множество $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ бесконечно.

Если $s=0$ (т.е. если все элементы $\bar{a}$ имеют конечный тип в $L(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ для $a\in\mathfrak{A}$) множество $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ конечно. В этом случае $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ есть $\{W_{1,5},W_{1,6}\}$, где $W_{1,6}$ есть аксиома

$$\forall x\exists y_1\dots y_r((\bigvee_{j=0}^{\varepsilon(b_i)+\delta(b_i)-1}y_i=jb_i)\&x=\sum_{i=1}^{r}y_i).$$

Совокупность аксиом $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ утверждает, что для каждого $i\in\{1,\dots,s\}$ множество $\hat{G}_i=\{x/G_i(x)$ истинно $\}$ содержит элементы αd_i для $\alpha\in N$, замкнуто относительно операции $+$ и вместе с этой операцией $+$ является коммутативной полугруппой, элементарно эквивалентной аддитивной полугруппе натуральных чисел, что для каждого $j\in\{2,\dots,s\}$ $F_{1,j}$ индуцирует изоморфизм полугруппы $\hat{G}_1$ на полугруппу $\hat{G}_j$, переводящий θ в θ и d_1 в d_j, и что операция $+$ коммутативна, ассоциативна и имеет нуль θ. Кроме этого, $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ утверждает, что каждый элемент представляется в виде суммы $s+1$ элемента (по одному из каждого $\hat{G}_i$ для $i\in\{1,\dots,s\}$ и линейной формы

над $\{b_1,\dots,b_r\}$, коэффициенты которой ограничены).

3. Совокупность аксиом $W_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ конечна и строится индукцией по числу t элементов множества $\mathfrak{A}$. Предполагаем, что мы умеем строить совокупность $W_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ для всех $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в случае, когда $\mathfrak{A}$ содержит менее t элементов. Построим $W_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ для $\mathfrak{A}$, содержащего t элементов.

Построение $W_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ распадается на несколько шагов. На каждом шаге строится несколько аксиом. $W_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ получится как объединение всех построенных аксиом.

Первый шаг. Пусть $\mathfrak{B}$ есть $\{(c_i,e_i)(e_i,c_i)/i=1,\dots,q\}$; $h=h(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Строим $W_{2,1}$, $W_{2,2}$, $W_{2,3}(i)$ для $i=1,\dots,r$.

$$W_{2,1}.\quad \bigwedge_{i=1}^{q} c_i=e_i.$$

$$W_{2,2}.\quad \bigwedge_{i\in\{i\in\{1,\dots,s\}\mid \mathfrak{A}(d_i,\mathfrak{B})\neq\mathfrak{A}\}} \forall xy\,(G_i(x)\to x\neq y+h).$$

$$W_{2,3}(i).\quad \bigwedge_{j_1\neq j_2} j_1b_i\neq j_2b_i \;\&\; (\varepsilon(b_i)+\delta(b_i))b_i=\varepsilon(b_i)b_i.$$

$$j_1,j_2\in\{1,\dots,\varepsilon(b_i)+\delta(b_i)-1\}.$$

Второй шаг. Если $a\in\mathfrak{A}$ и $a\notin\{d_1,\dots,d_s\}$, то "$G_a(x)$" используем как сокращение для "$\bigvee_{j=0}^{\varepsilon(a)+\delta(a)-1} x=ja$". Пишем "$G_{d_i}(x)$" вместо "$G_i(x)$". Пусть $\mathfrak{A}_0=\{a_1^{(0)},\dots,a_p^{(0)}\}\subset\mathfrak{A}$. Формулу "$x\in L(\mathfrak{A}_0)$" используем как сокращение для

$$\text{"}\quad \exists y_1\dots y_p\,\Big(x=\sum_{i=1}^{p} y_i \;\&\; \bigwedge_{i=1}^{p} G_{a_i^{(0)}}(y_i)\Big).\quad\text{"}$$

Находим для каждого $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}$ и каждого $c\in\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ класс сводимости в $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$, содержащий c. Пусть $c\in\mathfrak{M}_{2,j(c)}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$. Пусть $\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1=\{a_1^{(1)},\dots,a_p^{(1)}\}$. Строим $W_{2,4}(\mathfrak{A}_1,c)$.

$$W_{2,4}(\mathfrak{A}_1,c).\quad \forall x u_1\dots u_p v_1 v_2\Big((x=c+v_1 \;\&\; x=\sum_{i=1}^{p} u_i+v_2 \;\&\; v_1\in L(\mathfrak{A}_1)\;\&$$

$$\&\; v_2\in L(\mathfrak{A}_1)\;\&\; \bigwedge_{i=1}^{p} G_{a_i^{(1)}}(u_i)\Big)\to\Big(\bigvee_{f\in\mathfrak{M}_{2,j(c)}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}\Big(\bigwedge_{i=1}^{p} u_i=(f)_{a_1^{(i)}}a_1^{(i)}\Big)\Big)\Big).$$

Аксиома $W_{2,4}(\mathfrak{A}_1,c)$ утверждает истинность леммы 3(2)*).

*) Пояснения, которыми в п. 3 §2 иногда сопровождаются записи аксиом, не претендуют на точность. При желании эти пояснения можно опустить.

Третий шаг. Определяем для каждого $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, каждого $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{A}_1$, каждого $j \in \{1, \dots, i(\mathfrak{A}_1)\}$ и каждых $c', c'' \in \mathfrak{M}_{2,j}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L})$ множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', \mathfrak{L})$. Для каждого $c \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', \mathfrak{L})$ строим $W_{2,5}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', c)$.

$$W_{2,5}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', c). \quad \forall xyzu((x = c' + y + z \,\&\, x = c'' + u \,\&\, u \in L(\mathfrak{A}_1) \,\&$$
$$\&\, z \in L(\mathfrak{A}_3) \,\&\, y \in L(\mathfrak{A}_1 \setminus \mathfrak{A}_3)) \to y \neq c).$$

Четвертый шаг. Для каждого $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1 \neq \phi$ и $c \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L})$ строим такое конечное множество $\mathfrak{B}^c$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}_1$, которое удовлетворяет условию $\Gamma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}, c)$. По индукционному предположению мы можем построить множество аксиом $W_2(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$. Каждую аксиому из $W_2(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$ переделываем следующим образом.

Пусть $\mathcal{J} = \{i \in \{1, \dots, s\} / d_i \in \mathfrak{A}_1 \,\&\, \overline{d_i}$ имеет бесконечный тип в $L(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)\}$. В силу наших определений, построение множества аксиом $W(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$ зависит от способа упорядочения множества $\{d_i \mid i \in \mathcal{J}\}$. Пусть $\{d_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ есть $\{d'_1, \dots, d'_{s'}\}$, где $d'_j = d_{i_j}$, а $i_j \in \{1, \dots, s\}$ $(j = 1, \dots, s')$.

Пусть $H \in W_2(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$. В H каждое вхождение символа G_j заменяем на вхождение символа G_{i_j} $(j = 1, \dots, s')$ и каждое вхождение символа $F_{1,j}$ заменяем на вхождение символа F_{i_1, i_j} $(j = 2, \dots, s')$.

После этих преобразований можно предполагать, что рассматриваемая аксиома H имеет вид:

$$(Q)\left(\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} H_{ij}\right)\right), \tag{7}$$

где (Q) - кванторная приставка, H_{ij} - выражение одного из видов

$$u = v, \quad G_{i'}(u), \quad F_{i_1, j'}(u, v) \tag{8}$$

или одного из следующих видов:

$$u \neq v, \quad \neg G_{i'}(u), \quad \neg F_{i_1, j'}(u, v), \tag{9}$$

где u, v - термы, составленные из символов операции $+$, символов переменных, символов θ и символов, входящих в $\mathfrak{A}_1$.

Полагаем, что $(u = v)^c$ есть $c + u = c + v$. Полагаем, что

$$(G_i(u))^c \quad \text{есть} \quad \exists z(z \in L(\mathfrak{A}_1) \,\&\, c + z = c + u \,\&\, G_i(z)) \tag{10}$$

и что $(F_{i_1,j}(u,v))^c$

есть $\exists z_1 z_2 (z_1 \in L(\mathfrak{A}_1) \& z_2 \in L(\mathfrak{A}_1) \& c+z_1 = c+u \& c+z_2 = c+v \& F_{i_1,j}(z_1,z_2))$. (II)

Полагаем, что $(\neg H_{ij})^c$ есть $\neg(H_{ij})^c$, если H_{ij} имеет вид (8).

Пусть $(\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m_i} H_{ij}))^c$ есть $\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m_i} H_{ij}^c)$. Пусть (Q) есть $(Q_1 x_1) \ldots (Q_\gamma x_\gamma)$, где Q_κ есть либо $\forall$, либо $\exists$ $(\kappa=1,\ldots,\gamma)$. Пусть для $\kappa=1,\ldots,\gamma$ через H_κ обозначается формула

$$(Q_\kappa x_\kappa)\ldots(Q_\gamma x_\gamma)(\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m_i} H_{ij})).$$

Пусть $\kappa > 1$ и уже определена формула H_κ^c. Полагаем $H_{\kappa-1}^c$ равным $\forall x_{\kappa-1}(x_{\kappa-1} \in L(\mathfrak{A}_1) \to H_\kappa^c)$, если Q_κ есть $\forall$, и равным $\exists x_{\kappa-1}(x_{\kappa-1} \in L(\mathfrak{A}_1) \& H_\kappa^c)$, если $Q_{\kappa-1}$ есть $\exists$. Таким образом определим $H^c = H_1^c$.

Рассматриваем теперь "$F_{1,j}(u,v)$" как сокращение для

$$„\exists z\,(F_{1,i}(z,u) \& F_{1,j}(z,v))"$$

(либо как сокращение для "$\forall z(F_{1,i}(z,u) \to F_{1,j}(z,v)) \& G_i(u) \& G_j(v)$"), где "$F_{1,1}(u,v)$" рассматривается как сокращение для "$G_1(u) \& u=v$".

Пусть $W_{2,6}(\mathfrak{A}_1, c)$ есть следующая аксиома.

$$W_{2,6}(\mathfrak{A}_1, c) . \bigwedge_{H \in W_2(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)} H^c.$$

Аксиома $W_{2,6}(\mathfrak{A}_1, c)$ утверждает истинность $W_2(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$ на системе, образованной классами эквивалентности, на которые разбивает множество $\{x \mid x \in L(\mathfrak{A}_1)\}$ отношение эквивалентности $E_c(x,y)$, где для $x,y \in L(\mathfrak{A}_1)$ тогда и только тогда $E_c(x,y)$ истинно, когда $c+x=c+y$. При этом предполагается, что предикаты из $G(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$ определяются на этой системе способом, указанным в (10),(II).

Для $a \in \{d_1,\ldots,d_s\} \cap \mathfrak{A}_1$ строим $W_{2,7}(\mathfrak{A}_1, c, a)$. Построение $W_{2,7}(\mathfrak{A}_1, c, a)$ зависит от того, является ли элемент $\bar{a}$ в $L(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$ элементом конечного или бесконечного типа.

Если $\bar{a}$ имеет бесконечный тип в $L(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$, $W_{2,7}(\mathfrak{A}_1, c, a)$ есть следующая аксиома.

$$\forall xy\,((G_a(x) \& G_a(y) \& x \neq y) \to c+x \neq c+y).$$

Если $\bar{a}$ имеет конечный тип в $L(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$, пусть $(\varepsilon_{\mathfrak{A}_1,c}(a), \delta_{\mathfrak{A}_1,c}(a))$ – тип $\bar{a}$ в $L(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}^c)$. Пусть в этом случае $W_{2,7}(\mathfrak{A}_1, c, a)$

есть

$$\forall xyzu((G_a(x)\&x=\varepsilon_{\mathfrak{A}_1,c}(a)a+y\&y=\delta_{\mathfrak{A}_1,c}(a)z+u\&G_a(z)\&\bigvee_{j=0}^{\delta_{\mathfrak{A}_1,c}(a)-1}u=ja))\to$$

$$\to c+x=c+\varepsilon_{\mathfrak{A}_1,c}(a)a+u).$$

Понятно, что аксиомы $W_{2,6}(\mathfrak{A}_1,c)$, $W_{2,7}(\mathfrak{A}_1,c,a)$ служат для описания $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}_1,c)$ -эквивалентности на $L(\mathfrak{A}_1)$.

П я т ы й ш а г . Рассматриваем систему аксиом, построенную в [5] для теории $M(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Берем аксиомы $W2$, $W8$, $W10$. Будем предполагать, что $[d_i]$ имеет бесконечный порядок в $M(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ для $i=1,\dots,s'$, где $s'\leq s$, и что $[d_i]$ имеет конечный порядок в $M(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ для $i\in\{1,\dots,s\}\setminus\{1,\dots,s'\}$. Можно предполагать, что аксиома $W\mathcal{J}$ имеет вид (7), где (Q) - кванторная приставка, H_{ij} - выражение одного из видов (8) или (9), где $i_1=1$; u, v - термы, составленные из символов операции $+$, символов переменных, символов θ и символов, входящих в $\mathfrak{A}(\mathcal{J}=2,8,10)$.

Полагаем, что $(u=v)^*$ есть $E(u,v)$, что $(G_i(u))^*$ есть

$$\exists z(G_i(z)\&E(u,z))$$

и что $(F_{1,j}(u,v))^*$ есть

$$\exists z_1z_2(F_{1,j}(z_1,z_2)\&E(u,z_1)\&E(v,z_2)).$$

Полагаем, что $(\neg H_{ij})^*$ есть $\neg H^*_{ij}$, если H_{ij} есть выражение одного из видов (8). Пусть $W\mathcal{J}^*$ есть

$$(Q)(\bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m_i}H^*_{ij})).$$

Пусть $W_{2,8}$ есть $W2^*\&W8^*\&W10^*$.

Строим теперь $W_{2,9}(a)$ для $a\in\{d_1,\dots,d_s\}$. Это построение зависит от того, имеет ли $[a]$ конечный или бесконечный порядок в $M(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$.

Если $[a]$ имеет бесконечный порядок в $M(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, $W_{2,9}(a)$ есть следующая аксиома:

$$\forall xy((G_a(x)\&G_a(y)\&x\neq y)\to\neg E(x,y)).$$

Если $[a]$ имеет конечный порядок в $M(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, пусть $\varepsilon^{(1)}(a)$ - порядок $[a]$ в $M(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Пусть $W_{2,9}(a)$ есть следующая аксиома.

$$\forall xuv((G_a(x)\&x=\varepsilon^{(1)}(a)u+v\&G_a(u)\&(\bigvee_{j=0}^{\varepsilon^{(1)}(a)-1}v=ja))\to E(x,v)).$$

Пусть $W_{2,10}$ есть следующая аксиома.

$$W_{2,10}.\quad\forall xyz(E(x,y)\longleftrightarrow E(x+y,y+z)).$$

Пусть $h_1 = h_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Рассматриваем теперь "$E(x,y)$" как сокращение для "$h_1 + x = h_1 + y$". Пусть для $x, y \in L(\mathfrak{A})$ отношение $E(\bar{x}, \bar{y})$ истинно в $L(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $[x] = [y]$ в $M(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Построенные на пятом шаге аксиомы служат для определения эквивалентности $E(x,y)$. Возможность отождествления отношения $E(x,y)$ с отношением $h_1 + x = h_1 + y$ следует из леммы Цейтина.

Совокупность аксиом $W_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ есть объединение совокупностей аксиом, построенных на шагах первом-пятом. Точнее,

$$W_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \{W_{2,1}, W_{2,2}, W_{2,3}(i) \mid i = 1, \ldots, r\} \cup \{W_{2,5}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', c) \mid \mathfrak{A}_3 \subsetneq \mathfrak{A}_1 \subsetneq \mathfrak{A} \,\&$$

$$\& \; j = 1, \ldots, i(\mathfrak{A}_1) \,\& \, c', c'' \in \mathfrak{M}_{2,j}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}) \,\& \, c \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, c', c'', \mathfrak{B})\} \cup \{W_{2,4}(\mathfrak{A}_1, c),$$

$$W_{2,6}(\mathfrak{A}_1, c) \mid \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A} \,\& \, c \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B})\} \cup \{W_{2,7}(\mathfrak{A}_1, c, a) \mid \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A} \,\& \, c \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}) \,\&$$

$$\& \, a \in \{d_1, \ldots, d_s\} \cap \mathfrak{A}_1\} \cup \{W_{2,8}, W_{2,10}\} \cup \{W_{2,9}(a) \mid a \in \{d_1, \ldots, d_s\}\}.$$

Напомним, что $W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ есть $W_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \cup W_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

§ 3. Доказательство полноты теории $W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

Зафиксируем на дальнейшее некоторое конечное множество $\mathfrak{A}$ и некоторое конечное множество $\mathfrak{B}$ определяющих соотношений для $\mathfrak{A}$. Пусть $h = h(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $h_1 = h_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $\sigma = \sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $W = W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Назовем систему A сигнатуры σ W-системой, если на A истинны все аксиомы из W. Сразу ясно, что система $L(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ сигнатуры σ является W-системой. Мы покажем, что система $L(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ является минимальной системой теории $[W]_\sigma$ и что теория $[W]_\sigma$ модельно полна. Оба эти факта непосредственно вытекают из следующей леммы, для удобства формулировки которой введем несколько определений.

Пусть $i \in \{1, \ldots, S\}$. Скажем, что подполугруппа B W-системы A является i-канонической в A, если для каждого $x \in B$ в A истинно $G_i(x)$, если B содержит подмножество $\{\alpha d_i \mid \alpha \in N\}$ из A и если для каждого $n \in N \setminus \{0\}$ и каждого $x \in B$ в B найдутся такие элементы u и v, что $x = nu + v$

и $v \in \{\theta, d_i, \ldots, (n-1)d_i\}$ *).

Скажем, что подполугруппа B W-системы A является канонической в A, если существует такая I-каноническая в A подполугруппа B_1, что B как подполугруппа порождается в A множеством $B_1 \cup \ldots \cup B_s \cup \{b_1, \ldots, b_r\}$, где для $j=2,\ldots,s$ $B_j = \{x \in A \mid \exists y (y \in B_1 \,\&\, F_{1,j}(y,x))$ истинно в $A\}$. В этом случае пишем:

$$B = \langle\langle B_1, \ldots, B_s \rangle\rangle .$$

Если B - подсистема сигнатуры σ, W-системы A и подполугруппа B является канонической в A, то подсистему B сигнатуры σ W-системы A назовем канонической.

Пусть B_i - каноническая подсистема W-системы A_i $(i=1,2)$.

ЛЕММА 7.(I) В канонической подсистеме $B_i = \langle\langle B_1^{(i)}, \ldots, B_s^{(i)} \rangle\rangle$ условию $G_j(x)$ удовлетворяют элементы $x \in B_j^{(i)}$ и только эти элементы $(i=1,2;\ j=1,\ldots,s)$.

(2) Подсистема B_i является W-системой $(i=1,2)$.

(3) Если существует изоморфизм π полугруппы $B_1^{(1)}$ на полугруппу $B_1^{(2)}$, тождественный на $\{\alpha d_1 \mid \alpha \in N\}$, то B_1 и B_2 изоморфны как системы сигнатуры σ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по числу t элементов множества $\mathfrak{A}$. Пусть лемма 7 доказана во всех случаях, если $\mathfrak{A}$ имеет менее t элементов. Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{A}$ имеет t элементов.

(I) Пусть $x \in B_i$ и $G_j(x)$ истинно в B_i. Тогда либо x есть один из элементов $\theta, d_j, \ldots, \gamma_{d_j} d_j$, либо в A_i $x = \gamma_{d_j} d_j + y$, где $y \in A_i$ и $G_i(y)$ истинно в A_i (см. $W_{1,1}(j)$).

Будем предполагать, что $x \notin \{\theta, d_j, 2d_j, \ldots, \gamma_{d_j} d_j\}$.

Рассмотрим отдельно два случая.

Случай I. Существует такой $z \in B_i$, что в B_i $x = h + z$.

---

*) Договоримся, что $0 \cdot x$ есть θ. Рассматривая подмножество B W-системы A вместе с определенными на нем константами из σ', где $\sigma' \leq \sigma$, получим подсистему B сигнатуры σ' системы A. В частности, если $\sigma' = \langle + \rangle$ и подсистема B сигнатуры σ' является полугруппой, мы говорим о подполугруппе B W-системы A. Мы обозначаем одним и тем же символом как некоторую алгебраическую систему, так и её основное множество. При необходимости мы говорим о системе A сигнатуры σ_1, о системе A сигнатуры σ_2 и т.д. В наших рассмотрениях не встретятся две различные системы одинаковой сигнатуры с одним и тем же основным множеством.

Из $W_{2,2}$ следует, что в этом случае $\mathfrak{A}(d_j, \mathfrak{L}) = \mathfrak{A}$. Из выбора γd_j, h и h_1 и из аксиомы $W_{2,1}$ следует, что в B_i $x = h_1 + z' + z''$, где $z' \in B_i$, $z'' \in B_i$, $h_1 + z' = \gamma d_j d_j$ в B_i. Из $W_{1,1}(j)$ следует, что существует такой $z''' \in A_i$, что $G_j(z''')$ истинно в A_i и $h_1 + z' + z''' = x$. Из $W_{2,10}$ и определения E следует, что $E(z'', z''')$ истинно в A_i.

Разобьем множество A_i на классы эквивалентности, относя к одному классу элементы x и y из A_i тогда и только тогда, когда $E(x,y)$ истинно в A_i. Пусть для $x \in A_i$ через $[x]$ обозначается класс эквивалентности, содержащий x. Пусть

$$[A_i] = \{[x] / x \in A_i\}.$$

На множестве $[A_i]$ определим операцию $+$ и предикаты G_j, $F_{1,j}$ правилами:

$$[x] + [y] = [x+y],$$

$G_j([x])$ в $[A_i]$ эквивалентно $\exists y(E(x,y) \& G_j(y))$ в A_i;
$F_{1,j}([x],[y])$ в $[A_i]$ эквивалентно $\exists x_1 y_1 (E(x,x_1) \& E(y,y_1) \& F_{1,j}(x_1,y_1))$ в A_i.

Из $W_{2,8}$, $W_{2,9}(a)$, $W_{2,10}$ и $W_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{L})$ следует, что в полученной системе $[A_i]$ истинны все аксиомы из построенной в [5] совокупности аксиом для теории системы $M(\mathfrak{A}, \mathfrak{L})$. Из доказательства леммы 6 работы [5] следует, что существует $z^{(IV)} \in B_j^{(i)}$ такой, что $E(z'', z^{(IV)})$ истинно в B_i. Теперь из определения E следует, что $h_1 + z' + z^{(IV)} = x$ в B_i. Но $h_1 + z' \in B_j^{(i)}$ и $z^{(IV)} \in B_j^{(i)}$. Отсюда $x \in B_j^{(i)}$.

Случай 2. Не существует такого $z \in B_i$, что в B_i $x = h + z$. Из $W_{2,4}(\mathfrak{A}_1, c)$, $W_{2,1}$ и леммы 3 (3) следует, что не существует такого $z \in A_i$, что в A_i $x = h + z$. Из предположения, что $x \notin \{\theta, d_j, \ldots, \gamma d_j d_j\}$, аксиомы $W_{1,1}(j)$ и определения γd_j следует, что в этом случае $\mathfrak{A}(d_j, \mathfrak{L}) \neq \mathfrak{A}$. Это означает, что нулевая линейная форма из $L(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}(d_j, \mathfrak{L}))$ принадлежит $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}(d_j, \mathfrak{L}) \mathfrak{L})$. Теперь из доказательства леммы 3 (3) следует, что существует такое множество $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, что $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}(d_j, \mathfrak{L})$ и нулевая линейная форма из $L(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}')$ принадлежит $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}', \mathfrak{L})$.

Пусть C – нулевая линейная форма из $L(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}')$. Из аксиом, построенных на четвертом шаге, следует, что подсистема

$$\{y \in A_i / y \in L(\mathfrak{A}') \text{ в } A_i\}$$

сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A}', \mathfrak{L}^c)$ системы A_i является $W(\mathfrak{A}', \mathfrak{L}^c)$-системой. Система $\{y \in B_i / y \in L(\mathfrak{A}') \text{ в } B_i\}$ является её канонической подсистемой. Из $W_{2,4}(\mathfrak{A}', c)$ следует, что $x = \sum_{a \in \mathfrak{A}'} x_a$, где $x_a \in B_k^{(i)}$,

если $a=d_k$ и $k=\{1,\dots,s\}$, и $x_a\in\{\theta,b_k,\dots,(\varepsilon(b_k)+\delta(b_k)-1)b_k\}$, если $a=b_k$ и $k=\{1,\dots,r\}$. Это означает, что $x\in\{y\in B_i/y\in L(\mathfrak{A})$ в $B_i\}$ ж). Из индукционного предположения следует, что $x\in B_j^{(i)}$. Лемма 7 (I) доказана.

(2). Из (I) следует, что аксиомы из $W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ истинны в B_i. Аксиомы, построенные на первом, втором и третьем шагах, являются универсальными (т.е. их можно привести к такой предваренной форме, в которой не встречаются кванторы существования). Это говорит об истинности этих аксиом в B_i.

Остается исследовать аксиомы, построенные на четвертом и пятом шагах.

Проверим, что для каждого $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}$, каждого $c\in\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ и каждой аксиомы $H\in W_2(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}^c)$ аксиома H^c истинна в B_i.

Пусть $L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)=\{x\in A_i/x\in L(\mathfrak{A}_1)$ истинно в $A_i\}$, $L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)=\{x\in B_i/x\in L(\mathfrak{A}_1)$ истинно в $B_i\}$.

Разобьем множество $L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$ на классы эквивалентности, считая, что элемент y_1 из $L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$ эквивалентен элементу y_2 из $L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$ тогда и только тогда, когда $c+y_1=c+y_2$. Множество классов эквивалентности, на которые это отношение разобьет множество $L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$, обозначим через $L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$, для $y\in L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$ через $\bar{y}$ обозначим класс эквивалентности, содержащий y. На множестве $L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$ определим операцию $+$, полагая

$$\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}, \tag{I2}$$

и предикаты из $\mathcal{O}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}^c)$, полагая, что $G_k(\bar{u})$ эквивалентно

$$\exists z(z\in L(\mathfrak{A}_1)\,\&\,c+z=c+u\,\&\,G_i(z)) \quad \text{в } A_i, \tag{I3}$$

$F_{i_1,k}^{*}(\bar{u},\bar{v})$ эквивалентно

$$\exists z_1z_2(z_1\in L(\mathfrak{A}_1)\,\&\,z_2\in L(\mathfrak{A}_1)\,\&\,c+u=c+z_1\,\&\,c+v=c+z_2\,\&\,F_{i_1,k}(z_1,z_2)) \text{ в } A_i; \tag{I4}$$

где $u,v\in L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$.

Из $W_{2,6}(\mathfrak{A}_1,c)$, $W_{2,7}(\mathfrak{A}_1,c,a)$ для $a\in\{d_1,\dots,d_s\}\cap\mathfrak{A}_1$ и

ж) Поясним это подробнее. Пусть A – W-система, $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})\neq\emptyset$, $z\in L(\mathfrak{A}_1)$ в A и $z=\sum_{a\in\mathfrak{A}}z_a$, где $G_a(z_a)$ истинно в A для $a\in\mathfrak{A}$. Если для некоторого $a\in\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1$ $z_a\neq\theta$, то для $c\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ в A имеем равенство

$$c+z=c+\sum_{a\in\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1}z_a+\sum_{a\in\mathfrak{A}_1}z_a$$

и для каждого $f\in\mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$ в A имеем неравенство

$$(c)_a+z_a\neq(f)_a\,a$$

при некотором $a\in\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1$. Последнее противоречит аксиоме $W_{2,4}(\mathfrak{A}_1,c)$. Это означает, что $z_a=\theta$ для всех $a\in\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_1$.

$W_1(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ следует, что в полученной системе $\overline{L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)}$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}^c)$ истинны все аксиомы из совокупности $W(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}^c)$.

Пусть $\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}$ есть $\{\overline{x}/x\in L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)\}$.

Разобьем теперь множество $L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)$ на классы эквивалентности, считая для $y_1,y_2\in L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)$ y_1 эквивалентным y_2 тогда и только тогда, когда $c+y_1=c+y_2$. Множество классов эквивалентности, на которые это отношение разобьет множество $L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)$, обозначим через $\overline{\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}}$, через $\overline{\overline{y}}$ для $y\in L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)$ обозначим класс эквивалентности из $L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)$, содержащий y. На множестве $\overline{\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}}$ определим операцию $+$ и предикаты из $\sigma(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}^c)$ по правилам (I2)-(I4) (заменив в них везде одну черту на две черты и A_i на B_i).

Заметим, что отображение $\overline{y}\to\overline{\overline{y}}$ для $y\in L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)$ есть изоморфизм системы $\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}^c)$ на систему $\overline{\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}}$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}^c)$.

Для доказательства достаточно установить, что для $y\in L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)$ тогда и только тогда $G_K(\overline{y})$ истинно в $\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}$, когда $G_K(\overline{\overline{y}})$ истинно в $\overline{\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}}$.

Пусть $y\in L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)$, $z\in L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$ и $c+z=c+y$ в A_i. Пусть еще $G_K(z)$ истинно в A_i. Так как в системе $\overline{L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)}$ подсистема $\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}$ является канонической и так как $G_K(\overline{y})$ истинно в $L_{A_i}(\mathfrak{A})$, из леммы 7 (I) следует, что

$$\overline{y}\in\overline{B_K^{(i)}}=\{\overline{x}/x\in B_K^{(i)}\}.$$

Это означает, что существует $z'\in B_K^{(i)}$ такой, что $c+z'=c+y$. Последнее означает, что $G_K(\overline{\overline{y}})$ истинно в $\overline{\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}}$.

Из изоморфизма систем сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}^c)$ $\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}$ и $\overline{\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}}$, из того, что $L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)$ есть каноническая подсистема системы $L_{A_i}(\mathfrak{A}_1)$, и из индукционного предположения (по которому лемма 7 истинна в случае, когда число элементов множества образующих меньше t) следует, что $\overline{\overline{L_{B_i}(\mathfrak{A}_1)}}$ есть $W(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}^c)$ -система. Последнее означает, что аксиомы $W_{2,6}(\mathfrak{A}_1,c)$ истинны в B_i. Остальные аксиомы, построенные на четвертом шаге, являются универсальными, поэтому они истинны в B_i.

Рассмотрим аксиомы, построенные на пятом шаге. Сразу понятно, что все эти аксиомы, кроме, быть может, только $W_{2,8}$, являются универсальными. Проверим, что аксиома $W_{2,8}$ тоже является универсальной. Из обозрения аксиом $W2$, $W8$, $W10$ из [5] следует, что $W10$ не содержит кванторов и символов G_K, $F_{1,K}$ и что из аксиом $W2$ и $W8$ каждая есть конъюнкция аксиом вида $(Q)(H_1\to H_2)$, где (Q) - кванторная приставка, содержащая только кванторы всеобщности, и где H_2 не содержит символов G_K

и $F_{1,k}$, а также и кванторов, а H_1 есть конъюнкция предваренных формул, каждая из которых не содержит кванторов всеобщности. Кроме того, H_1 не содержит логических символов, отличных от символов равенства, конъюнкции и дизъюнкции. Понятно, что каждую из аксиом $W2^*$ и $W8^*$ можно представить как конъюнкцию аксиом вида $(Q)(H_1^* \to H_2^*)$, где (Q) - кванторная приставка, содержащая только кванторы всеобщности, и где H_2^* не содержит кванторов, а H_1^* есть конъюнкция предваренных формул, каждая из которых не содержит кванторов всеобщности. Это и показывает, что $W_{2,8}$ есть универсальная аксиома.

Лемма 7 (2) доказана.

(3) Каждый элемент $x \in B_i$ представим в виде $x = \sum_{a \in \mathfrak{A}} x_a$, где для $a \in \mathfrak{A}$ $x_a \in B_a^{(i)}$, $B_{d_j}^{(i)} = B_j^{(i)}$ $(j=1,\dots,s)$, $B_{b_j}^{(i)} = \{0, b_j, 2b_j, \dots, (\varepsilon(b_j)+\delta(b_j)-1)b_j\}$ $(j=1,\dots,r)$. Пусть $x \in B_1$, $x = \sum_{a \in \mathfrak{A}} x_a$, $x_a \in B_a^{(1)}$ для $a \in \mathfrak{A}$. Пусть $\pi(x) = \sum_{a \in \mathfrak{A}} \pi(x_a)$, где $\pi(x_a) = x_a$, если $a \in \{b_1, \dots, b_r\}$, и существует $z \in B_1^{(i)}$ такой, что $B_{1,j}(z, x_{d_j})$ истинно в B_1 и $F_{1,j}(\pi(z), \pi(x_{d_j}))$ истинно в B_2 для $j = 2, \dots, s$.

Определенное таким образом отображение π B_1 на B_2 является изоморфизмом полугруппы B_1 на полугруппу B_2, если оно одно-однозначно.

Покажем, что отображение π является одно-однозначным.

Пусть $x_i = \sum_{a \in \mathfrak{A}} x_a^{(i)}$, $x_a^{(i)} \in B_a^{(1)}$ для $a \in \mathfrak{A}$ $(i=1,2)$. Пусть $x_1 = x_2$ в B_1.

Возможны два случая.

Случай I. Не существует такого $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ и $f \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L})$, что $x_a^{(1)} = (f)_a$ для всех $a \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1$. Из $W_{2,4}(\mathfrak{A}_1, f)$ следует, что в этом случае не существует такого $f \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L})$, что $x_a^{(2)} = (f)_a$ для всех $a \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1$.

Из леммы 3 (3) и аксиомы $W_{2,1}$ следует, что в B_1 имеем равенства $x_i = h + \sum_{a \in \mathfrak{A}} y_a^{(i)}$, где $y_a^{(i)} \in B_a^{(1)}$ для $a \in \mathfrak{A}$, и что в B_2 имеем равенства

$$\pi(x_i) = h + \sum_{a \in \mathfrak{A}} \pi(y_a^{(i)}) \quad (i=1,2).$$

Пусть $y_i = \sum_{a \in \mathfrak{A}} y_a^{(i)}$, $\pi(y_i) = \sum_{a \in \mathfrak{A}} \pi(y_a^{(i)})$ $(i=1,2)$. Из аксиомы $W_{2,10}$ и определения E следует, что $E(y_1, y_2)$ истинно в B_1. По тем же соображениям тогда и только тогда $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ в B_2, когда $E(\pi(y_1), \pi(y_2))$ истинно в B_2.

Из результатов заметки [5], аксиом из $W_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{L})$ и аксиом, построенных на пятом шаге, следует, что $E(y_1, y_2)$ истинно в B_1 тогда и только тогда, когда $E(\pi(y_1), \pi(y_2))$ истинно в B_2. Это означает, что $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ в B_2.

Случай 2. Существует такое $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ и $f \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L})$, что $x_a^{(1)} = (f)_a$ для всех $a \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1$. Из $W_{2,4}(\mathfrak{A}_1, f)$ следует, что в этом случае существует такое $c \in \mathfrak{M}_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L})$, что $x_a^{(2)} = (c)_a$ для всех $a \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1$.

В этом случае не существует такого $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{A}_1$ и $g \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, f, c, \mathfrak{L})$, что $x_a^{(1)} = (g)_a$ для всех $a \in \mathfrak{A}_1 \setminus \mathfrak{A}_3$.

Из леммы 4 и аксиомы $W_{2,1}$ следует, что в $\mathcal{B}_1$

$$x_i = c + \sum_{a \in \mathfrak{A}_1} y_a^{(i)}$$

и что в $\mathcal{B}_2$ $\pi(x_i) = c + \sum_{a \in \mathfrak{A}_1} \pi(y_a^{(i)})$, где $y_a \in \mathcal{B}_a^{(1)}$ для $a \in \mathfrak{A}_1$ $(i=1,2)$.

Рассматривая теперь на $L_{\mathcal{B}_i}(\mathfrak{A}_1) = \{x \in \mathcal{B}_i / x \in L(\mathfrak{A}_1)$ истинно в $\mathcal{B}_i\}$ такое отношение эквивалентности, при котором для $z_1, z_2 \in L_{\mathcal{B}_i}(\mathfrak{A}_1)$ тогда и только тогда z_1 эквивалентен z_2, когда $c + z_1 = c + z_2$, обозначая для $z \in L_{\mathcal{B}_i}(\mathfrak{A}_1)$ через $\bar{z}$ класс эквивалентности, содержащий z, обозначая через $\overline{L_{\mathcal{B}_i}(\mathfrak{A}_1)}$ множество всех полученных классов эквивалентности, определяя на $\overline{L_{\mathcal{B}_i}(\mathfrak{A}_1)}$ операцию $+$ и предикаты из $\sigma(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L}^c)$ по правилам (I2)-(I4) и воспользовавшись индукционным предположением, найдем, что

$$\overline{\sum_{a \in \mathfrak{A}_1} \pi(y_a^{(1)})} = \overline{\sum_{a \in \mathfrak{A}_1} \pi(y_a^{(2)})},$$

то есть что

$$c + \sum_{a \in \mathfrak{A}_1} \pi(y_a^{(1)}) = c + \sum_{a \in \mathfrak{A}_1} \pi(y_a^{(2)}),$$

то есть что $\pi(x_1) = \pi(x_2)$.

Предыдущее показывает, что отображение π является однозначным. Из лемм 7 (I) и 7 (2) и из определения π теперь следует, что π является изоморфизмом системы $\mathcal{B}_1$ сигнатуры σ на систему $\mathcal{B}_2$ сигнатуры σ.

Лемма 7 (3) доказана.

СЛЕДСТВИЕ. W - система $L(\mathfrak{A}, \mathfrak{L})$ является минимальной системой теории $[W]_\sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует в качестве A_1 взять $L(\mathfrak{A}, \mathfrak{L})$, в качестве A_2 взять произвольную W -систему и положить

$$B_j^{(i)} = \{\alpha d_j \mid \alpha \in N\} \quad (i=1,2;\ j=1,\dots,s).$$

Далее достаточно сослаться на лемму 7 (3).

ЛЕММА 8. Теория $[W]_\sigma$ модельно полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует повторить рассуждения, приведенные в [5] при доказательстве леммы 7 (конечно, подходящим образом изменив некоторые ссылки).

Поступила в редакцию
8.IУ.1966 г.

Литература

1. А.П.Бирюков. Решение некоторых алгоритмических задач для конечноопределенных коммутативных полугрупп.- Сибирск. матем. ж. (В печати).
2. А.П.Бирюков. О некоторых алгоритмических задачах для конечноопределенных коммутативных полугрупп.- Сибирск. матем. ж. (В печати).
3. А.П.Бирюков. Решение некоторых алгоритмических задач для конечноопределенных коммутативных полугрупп.- 7 Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре (резюме сообщений и докладов). Кишинев. 1965.
4. В.А.Емеличев. Об алгоритмической разрешимости некоторых массовых проблем в теории коммутативных полугрупп.- Сибирск. матем. ж., 1963, 4, № 4, стр.788-798.
5. М.А.Тайцлин. Об элементарных теориях коммутативных полугрупп с сокращением. - Алгебра и логика. Семинар. 1966, т. 5, вып. 1, стр. 51-69.
6. L.Rédei. Theorie der endlich erzengbaren kommutativen Halbgruppen. Leipzig. 1963.
7. Ю.Л.Ершов, И.А.Лавров, А.Д.Тайманов, М.А.Тайцлин. Элементарные теории. - УМН, 1965, т. 20, вып. 4, стр. 37-108.
8. Е.С.Ляпин. Полугруппы. М., 1960 г.