УДК 514.763.347

КЛАССИФИКАЦИЯ $(f\xi\eta\rho)$-СТРУКТУР

Н. Д. Поляков

ВВЕДЕНИЕ

$(f\xi\eta\rho)$-структура была определена Н. М. Остиану [9] в 1968 году на многомерной поверхности в многообразии почти комплексной структуры, оснащенном полем дважды ковариантного кососимметрического тензора, присоединенного к первой дифференциальной группе. В работе [7] была введена метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемом многообразии. Позже Г. Ф. Лаптевым и Н. М. Остиану была найдена непосредственная связь между π-структурой и $(f\xi\eta\rho)$-структурой в многообразии почти комплексной структуры [7]. В 1980 году Н. М. Остиану и Н. Д. Поляковым доказаны теоремы («Основные теоремы») о том, что на подмногообразии в многообразии $(f\xi\eta\rho)$-структуры, f-структуры и почти контактной структуры естественно возникает индуцированная $(f\xi\eta\rho)$-структура [12].

Частные классы $(f\xi\eta\rho)$-структур и метрических $(f\xi\eta\rho)$-структур на дифференцируемом многообразии M_n, как, например, (f, U, V, u, λ)-структура, (f, g, u, v, λ)-структура, (f, q, e, u, x, λ)-структура были указаны в работах Окумуры [17], Ватанабэ [18], Ямагути [19], а также в работах [15], [20].

Мишра в работе [16] ввел на дифференцируемом многообразии M_n структуру, названную обобщенной структурой. Эта структура задается на M_n полем тензора f типа (1,1), q линейно независимыми векторными полями, q линейно независимыми 1-формами и полями скаляров. Аналогичная структура на дифференцируемом многообразии M_n была введена А. Л. Башкене [1], [2]. Выяснилось, что обобщенная структура на M_n также принадлежит классу $(f\xi\eta\rho)$-структур. Было показано, что (f, U, V, u, v, λ)-структура, (f, g, u, v, λ)-структура, (f, q, e, u, x, λ)-структура, а также обобщенная структура естественным образом индуцируются на поверхностях, вложенных в многообразие почти комплексной или почти контактной структуры и оснащенных полем нормалей.

В настоящей работе проведена классификация $(f\xi\eta\rho)$-структур на дифференцируемом многообразии M_n.

Основные положения настоящей статьи были изложены в докладе, прочитанном на заседании Всесоюзного геометрического семинара им. профессора Г. Ф. Лаптева при ВИНИТИ 22 марта 1982 г.

Установлено, что все типы $(f\xi\eta\rho)$-структур, указанных в таблицах № 1 и № 2, естественно возникают на подмногообразиях многообразия почти комплексной структуры и многообразия почти контактной структуры, оснащенных различными полями нормально оснащающих плоскостей.

Классификация индуцированных $(f\xi\eta\rho)$-структур на подмногообразии коразмерности 2 в многообразии почти контактной структуры проведена в работах [11], [13].

На протяжении всего изложения индексы будут пробегать следующие значения: $i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha, \beta \ldots = n+1, n+2, \ldots, n+p$; $a, b, \ldots = n+1, n+2, \ldots, n+l$.

Автор выражает глубокую благодарность Н. М. Остиану за помощь, оказанную при написании настоящей работы.

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ M_n $(f\xi\eta\rho)$-СТРУКТУРЫ

1. Пусть M_n — n-мерное дифференцируемое многообразие и x^i — локальные координаты точки $x \in U \subset M_n$, где U — некоторая область заданного многообразия. Над окрестностью U можно ввести вполне интегрируемую систему n линейных линейно независимых дифференциальных форм θ^i, первыми интегралами которой являются координаты x^i точки x. Это означает, что $\theta^i = x_j{}^i dx^j$, причем $\det\|x_j{}^i\| \neq 0$.

При помощи форм θ^i над окрестностью U можно построить [6] последовательность линейных, линейно независимых форм $\theta_j{}^i$, $\theta^i_{j_1j_2}, \ldots, \theta^i_{j_1j_2\ldots j_s}, \ldots$, обладающих расслоенной структурой [5] по отношению к формам θ^i.

В каждой фиксированной точке $x \in M_n$ (т. е. при $\theta^i = 0$) система форм $\overline{\theta}_j{}^i$, $\overline{\theta}^i_{j_1j_2}, \ldots, \overline{\theta}^i_{j_1j_2\ldots j_s}$, где

$$\overline{\theta}^i_{j_1j_2\ldots j_k} = \theta^i_{j_1j_2\ldots j_k}\Big|_{\theta^i=0},$$

при любом k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ вполне интегрируема. Эти формы являются инвариантными формами дифференциальной группы $D_n{}^s$ порядка s [6].

2. Следуя Г. Ф. Лаптеву и Н. М. Остиану [4], [7], мы говорим, что на дифференцируемом многообразии M_n задана дифференциально-геометрическая структура, если на M_n задано поле геометрического объекта W, присоединенного к некоторой группе Ли (в частности, к дифференциальной группе $D_n{}^s$ порядка s). В этом, последнем случае мы говорим о дифференциально-геометрической структуре порядка s.

Объект W называется структурным объектом данной структуры на M_n.

В настоящей работе мы будем рассматривать дифференцируемое многообразие M_n, оснащенное $(f\xi\eta\rho)$-структурой.

$(f\xi\eta\rho)$-структура была первоначально введена Н. М. Остиану на подмногообразиях [9]. Позже Н. М. Остиану ввела понятие $(f\xi\eta\rho)$-структуры на многообразиях [4], [10]. С этой целью ей пришлось ввести понятие расширенной дифференциально-геометрической структуры.

Расширенная дифференциально-геометрическая структура на M_n определяется заданием поля геометрического объекта, присоединенного к прямому произведению дифференциальной группы D_n^1 и некоторой полной линейной группы $GL(p,R)$.

Определение 1 (Н. М. Остиану [10]). $(f\xi\eta\rho)$-структурой на дифференцируемом многообразии M_n называется расширенная дифференциально-геометрическая структура, заданная полями линейных однородных объектов f, ξ, η, ρ, присоединенных к прямому произведению $D_n^1 \times GL(p,R)$ групп D_n^1 и $GL(p,R)$, компоненты которых связаны следующими конечными соотношениями:

$$
\begin{gathered}
f_j{}^l f_l{}^j = -\delta_l{}^l + \xi_\alpha^l \eta_l^\alpha, \\
f_j{}^l \xi_\alpha^l = -\rho_\alpha^\beta \xi_\beta^l, \quad f_j{}^l \eta_l^\alpha = -\rho_\beta^\alpha \eta_j^\beta, \\
\rho_\gamma^\alpha \rho_\beta^\gamma = -\delta_\beta^\alpha + \xi_\beta^l \eta_l^\alpha .
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Дифференциальные уравнения этих полей имеют следующий вид:

$$d f_j{}^l - f_k{}^l \theta_j{}^k + f_j{}^k \theta_k{}^l = f^l_{jk} \theta^k, \tag{1.2}$$

$$d\xi_\alpha^l - \xi_\beta^l \vartheta_\alpha^\beta + \xi_\alpha^k \theta_k{}^l = \xi_{\alpha k}^l \theta^k, \tag{1.3}$$

$$d\eta_j^\beta - \eta_k^\beta \theta_j{}^k + \eta_j^\alpha \vartheta_\alpha^\beta = \eta_{jk}^\beta \theta^k, \tag{1.4}$$

$$d\rho_\alpha^\beta - \rho_\gamma^\beta \vartheta_\alpha^\gamma + \rho_\alpha^\gamma \vartheta_\gamma^\beta = \rho_{\alpha k}^\beta \theta^k, \tag{1.5}$$

причем $\overline{\theta}_j{}^l = \theta_j{}^l |_{\theta^l = 0}$ и $\overline{\vartheta}_\beta^\alpha = \vartheta_\beta^\alpha |_{\theta^l = 0}$ — инвариантные формы групп D_n^1 и $GL(p, R)$, соответственно.

3. С каждым главным расслоенным многообразием, как известно [6], ассоциируются различные присоединенные расслоенные пространства, базой которых является исходное многообразие, а слоями — пространства представления соответствующей структурной группы главного расслоенного многообразия.

Задание $(f\xi\eta\rho)$-структуры на дифференцируемом многообразии M_n эквивалентно заданию сечения в соответствующем расслоенном многообразии, присоединенном к главному расслоению многообразию E с той же базой M_n, структурная группа которого представляет собой прямое произведение группы D_n^1 и некоторой полной линейной группы $GL(p, R)$, где p может принимать любые значения из ряда 0, 1, 2, ...

Когда $p=0$, то практически структурная группа главного расслоенного многообразия E сводится к группе D_n^1 и расслоенное многообразие E становится многообразием M_n^1 (по терминологии Г. Ф. Лаптева [6]). При этом расширенная дифференциально-геометрическая структура становится просто дифференциально-геометрической структурой первого порядка, являющейся подклассом исходной структуры.

С другой стороны, структурные объекты $(f\xi\eta\rho)$-структуры допускают интерпретацию, связанную с расслоенным многообразием $\mathfrak{M}_{n+p}$, присоединенным к тому же главному расслоенному многообразию E, текущими слоями которого является $(n+p)$-мерное векторное пространство представления структурной группы главного расслоенного многообразия: n-мерное касательное пространство $T_x(M_n)$ и p-мерное векторное пространство $\varepsilon_x(M_n)$ представления группы $GL\,(p,\ R)$.

Пусть в каждой точке $x\in M_n$ слой $T_x(M_n)$ касательного расслоения $T(M_n)$ натянут на n линейно независимых векторов $\{\vec{e}_i\}$, а пространство $\varepsilon_x(M_n)$ натянуто на p линейно независимых векторов $\{\vec{\varepsilon}_\alpha\}$. При этом в каждой фиксированной точке $x\in M_n$, (т. е. при $\theta^i=0$) имеем

$$\delta\vec{e}_i=\overline{\theta}_i^j\vec{e}_j \tag{1.6}$$

и

$$\delta\vec{\varepsilon}_\alpha=\overline{\vartheta}_\alpha^\beta\vec{\varepsilon}_\beta. \tag{1.7}$$

4. Из дифференциальных уравнений (1.2) следует, что поле структурного объекта $\{f_j^i\}$ является линейным однородным объектом (аффинором), присоединенным к дифференциальной группе первого порядка D_n^1. Поле структурного объекта $\{f_j^i\}$ определяет в касательном расслоении $T(M_n)$ многообразия M_n поле линейного оператора f, т. е. в каждой точке $x\in M_n$ есть некоторый линейный оператор f_x, действующий в слое $T_x(M_n)$.

Из дифференциальных уравнений (1.5) следует, что поле структурного объекта $\{\rho_\alpha^\beta\}$ является линейным однородным объектом, присоединенным к полной линейной группе $GL\,(p,\ R)$. Поле структурного объекта $\{\rho_\alpha^\beta\}$ определяет в присоединенном расслоенном многообразии $\mathfrak{M}_{n+p}$ поле линейного оператора ρ. В каждой точке $x\in M_n$ есть некоторый линейный оператор ρ_x, действующий в слое $\varepsilon_x(M_n)$.

Из дифференциальных уравнений (1.4) следует, что поле структурного объекта $\{\eta_i^\alpha\}$ $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_n является линейным однородным объектом, присоединенным к группе $D_n^1\times GL(p,\ R)$.

Поле этого геометрического объекта, с точки зрения касательного расслоения, допускает следующую геометрическую интерпретацию: так как $\operatorname{rang}\|\eta_i^\alpha\|\leqslant\min(n,\ p)$, то поле геометрического объекта $\{\eta_i^\alpha\}$ определяет поле k-мерных плоскостей ($k=0, 1, \ldots, n$), т. е. распределение η k-мерных линейных элементов на M_n. В каждой точке $x \in M_n$ относительно локального репера $\{\vec{e}_i\}$ в касательной плоскости $T_x(M_n)$ плоскость η_x распределения η задается системой уравнений

$$\eta_i^\alpha x^i = 0. \tag{1.8}$$

Показано [12], что в каждой точке $x \in M_n$ плоскость η_x инвариантна относительно действия линейного оператора f_x. Поле аффинора f индуцирует на распределении η почти комплексную структуру. В связи с этим размерность элементов распределения η всегда четная (т. е. $k = \dim \eta_x$ — четное число).

Из дифференциальных уравнений (1.3) следует, что поле структурного объекта $\{\xi_\alpha^i\}$ $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_n является линейным однородным объектом, присоединенным к группе $D_n^1 \times GL(p, R)$. Поле геометрического объекта $\{\xi_\alpha^i\}$, с точки зрения касательного расслоения, определяет распределение l-мерных линейных элементов ξ, каждый элемент которого натянут на векторы:

$$\vec{\xi}_\alpha = \xi_\alpha^i \vec{e}_i. \tag{1.9}$$

Из соотношений (1.1) следует, что распределение ξ инвариантно относительно действия линейного оператора f в $T(M_n)$. Из (1.9) следует, что в каждой точке $x \in M_n$ размерность элементов ξ_x распределения ξ не превосходит размерности ε_p—пространства представления группы $GL(p, R)$, т. е. $l = \dim \xi_x \leqslant p$. Очевидно, что $l = p$, если векторы $\vec{\xi}_\alpha$ линейно независимы. Последнее возможно только при выполнении условия $n \geqslant p$.

Таким образом, поля структурных объектов $\{\eta_i^\alpha\}$ и $\{\xi_\alpha^i\}$ определяют два распределения линейных элементов в касательном расслоении $T(M_n)$ многообразия M_n, согласованные с действиями линейных операторов f и ρ (см. (1.1)). Такова геометрическая характеристика структурных объектов $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_n.

Особый интерес представляют те $(f\xi\eta\rho)$-структуры на дифференцируемом многообразии M_n, для которых распределения η и ξ определяют π-структуру в $T(M_n)$.

Очевидно, что распределения ξ и η определяют π-структуру [10] (обобщенную композицию А. П. Нордена [3], [8]) в касательном расслоении многообразия M_n $(f\xi\eta\rho)$-структуры, если в каждой точке $x \in M_n$ выполняются следующие условия:

$$l + k = n, \quad \xi_x \cap \eta_x = \{x\}. \tag{1.10}$$

Выведем теперь аналитические условия, при выполнении которых распределения ξ и η $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_n определяют π-структуру в касательном расслоении $T(M_n)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. 1. Если в каждой точке x многообразия M_n $(f\xi\eta\rho)$-структуры справедливо условие

$$\operatorname{rang} \| \rho_\alpha^\beta \rho_\beta^\gamma + \delta_\alpha^\gamma \| = \operatorname{rang} \| \eta_i^\alpha \| = \dim \xi_x = l, \qquad (1.11)$$

то поля структурных объектов $\{\xi_\alpha^i\}$ и $\{\eta_i^\alpha\}$ определяют в касательном расслоении $T(M_n)$ π-структуру.

Мы должны показать, что при выполнении условия (1.11) выполняются условия (1.10). Из равенств (1.1) и (1.11) следует, что

$$\operatorname{rang} \| \rho_\alpha^\beta \rho_\beta^\gamma + \delta_\alpha^\gamma \| = \operatorname{rang} \| \xi_\alpha^i \eta_i^\gamma \| = l.$$

Следовательно, у матрицы $\| \xi_\alpha^i \eta_i^\gamma \|$ существует отличный от нуля минор порядка l^2. При надлежащей нумерации элементов матрицы можно считать, что минор $\| \xi_a{}^i \eta_i{}^b \|$ отличен от нуля, т. е.

$$\det \| \xi_a{}^i \eta_i{}^b \| \neq 0. \qquad (1.12)$$

Из условия (1.12). непосредственно следует линейная независимость векторов $\xi_a{}^i$ и линейная независимость ковекторов $\eta_i{}^b$. Следовательно, $l+k=n$. Если допустить, что в каждой точке $x \in M_n$ плоскости ξ_x и η_x имеют общие направления, то определитель матрицы $\|\xi_a{}^i \eta_i{}^b\|$ тождественно обращается в нуль, в силу (1.8). Значит, в каждой точке $x \in M_n$ справедливо $\xi_x \cap \eta_x = \{x\}$. Итак, показано, что при выполнении условия (1.11) выполняются условия (1.10). Таким образом, справедливость теоремы 1 доказана.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2. Если поля структурных объектов $\{\xi_\alpha^i\}$ и $\{\eta_i^\alpha\}$ $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_n определяют π-структуру, то в каждой точке $x \in M_n$ справедливо равенство (1.11).

Следовательно, поля геометрических объектов $\{\eta_i^\alpha\}$ и $\{\xi_\alpha^i\}$ определяют π-структуру в $T(M_n)$ тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in M_n$ выполняется равенство (1.11).

В случае максимальности рангов матриц $|\eta_i^\alpha\|$ и $\|\xi_\alpha^i\|$, условие (1.11) эквивалентно условию

$$\det \| \rho_\alpha^\beta \rho_\beta^\gamma + \delta_\alpha^\gamma \| \neq 0. \qquad (1.13)$$

Условие (1.13) является необходимым и достаточным для того, чтобы поля геометрических объектов $\{\eta_i^\alpha\}$ и $\{\xi_\alpha^i\}$, в случае максимальности их рангов, определяли π-структуру в касательном расслоении $T(M_n)$ [10].

Такие типы $(f\xi\eta\rho)$-структур изучены в работах Г. Ф. Лаптева и Н. М. Остиану [7], [9], [10]. В дальнейшем $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_n с максимально возможными рангами матриц $\| f_j{}^i \|$, $\| \rho_\alpha^\beta \|$, $\| \xi_\alpha^i \|$, $\| \eta_j^\beta \|$ назовем классическими $(f\xi\eta\rho)$-структурами на дифференцируемом многообразии.

Из теорем 1 и 2 следует, что в касательном расслоении $T(M_n)$ многообразия M_n $(f\xi\eta\rho)$-структуры поля структурных объектов $\{\xi^i_\alpha\}$ и $\{\eta^\alpha_i\}$ не определяют π-структуру, если не выполняется условие (1.11).

5. Выполнение условий (1.1) для $(f\xi\eta\rho)$-структуры, заданной на дифференцируемом многообразии M_n, не является достаточным для того, чтобы поля структурных объектов $\{\xi_\alpha{}^i\}$ и $\{\eta_i{}^\alpha\}$ определяли в касательном расслоении $T(M_n)$ π-структуру (см. теоремы 1 и 2).

Поэтому можно ввести сейчас два подкласса $(f\xi\eta\rho)$-структуры:

A_1. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемом многообразии M_n, компоненты структурных объектов которой удовлетворяют соотношениям (1.1) и (1.11).

В этом случае, в силу теорем 1 и 2, поля геометрических объектов $\{\xi_\alpha{}^i\}$ и $\{\eta_i{}^\alpha\}$ определяют π-структуру в касательном расслоении $T(M_n)$ многообразия M_n.

A_2. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемом многообразии M_n, компоненты структурных объектов которой удовлетворяют соотношениям (1.1), и равенство (1.11) не выполняется.

В этом случае, в силу теорем 1 и 2, поля геометрических объектов $\{\xi_\alpha{}^i\}$ и $\{\eta_i{}^\alpha\}$ не определяют π-структуру в касательном расслоении $T(M_n)$ многообразия M_n.

Очевидно, что классические $(f\xi\eta\rho)$-структуры на дифференцируемом многообразии M_n образуют подкласс класса A_1.

Классами A_1 и A_2 исчерпываются все $(f\xi\eta\rho)$-структуры, которые могут быть заданы на любом дифференцируемом многообразии M_n.

В настоящей работе проведено исследование $(f\xi\eta\rho)$-структур на дифференцируемом многообразии M_n класса A_1. Пока оставлены в стороне исследования $(f\xi\eta\rho)$-структур на многообразии M_n класса A_2, хотя установлено, что $(f\xi\eta\rho)$-структуры класса A_2 естественно возникают на подмногообразии многообразия почти комплексной структуры и почти контактной структуры.

Итак, в дальнейшем будем изучать только $(f\xi\eta\rho)$-структуры класса A_1 на многообразии M_n, т. е. будем предполагать, что компоненты структурных объектов $(f\xi\eta\rho)$-структуры удовлетворяют соотношениям (1.1) и (1.11). Оказывается многие известные классические дифференциально-геометрические структуры первого порядка (см. [4]) на M_n являются частными классами $(f\xi\eta\rho)$-структур класса A_1 (например, почти контактная структура, почти комплексная структура, f-структура, $(fUVuv\lambda)$-структура, классическая $(f\xi\eta\rho)$-структура и т. д. (см. § 2)).

Укажем теперь на некоторые основные свойства $(f\xi\eta\rho)$-структур класса A_1 на дифференцируемом многообразии M_n.

В силу четности элементов распределения η в $T(M_n)$ и условий (1.11), следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Размерность элементов распределения ξ в $T(M_n)$ четная, если n — четное, и нечетная, если n — нечетное (т. е. l и n — натуральные числа одинаковой четности).

Теорема 3. Если некоторый ненулевой вектор $\vec{t}$ из $T_x(M_n)$ под действием линейного оператора f_x преобразуется в нулевой вектор, то вектор $\vec{t}$ принадлежит плоскости ξ_x распределения ξ.

Пусть в каждой точке $x \in M_n$ ненулевой вектор $\vec{t}=t^i\vec{e}_i$ из векторного пространства $T_x(M_n)$ преобразуется под действием линейного оператора f_x в нулевой вектор, т. е.

$$f_j{}^i t^j = 0. \tag{1.14}$$

Вектор $\vec{t}$ не может принадлежать элементам распределения η, так как линейный оператор f индуцирует на η почти комплексную структуру. В связи с этим из (1.6) следует, что величины

$$d^\alpha = t^i \eta_i^\alpha \tag{1.15}$$

не равны нулю одновременно. Свернув (1.14) с f_x, получим с учетом (1.1), (1.15))

$$\vec{t} = d^\alpha \vec{\xi}_\alpha.$$

Из последнего равенства следует справедливость теоремы.

Другими словами, если линейный оператор f имеет ядро, то это ядро в каждой точке $x \in M_n$ является подпространством векторного пространства ξ_x, т. е. $\operatorname{Ker} f_x \subset \xi_x$.

Из равенства

$$\operatorname{rang} \| f \| = n - \dim \operatorname{Ker} f$$

следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. Необходимым и достаточным условием понижения ранга матрицы f на s единиц является существование распределения L s-мерных линейных элементов $L_x \subset \xi_x$ такого, что $L_x = \operatorname{Ker} f_x$.

Из теорем 3 и 4 следует, что $s \leqslant l$, а значит, справедливо следующее следствие.

Следствие 1. Ранг матрицы f не может быть понижен на число единиц, превосходящее размерность элементов распределения ξ.

Рангом и корангом $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_n называются ранги матриц $\|f\|$ и $\|\rho\|$, соответственно [12].

Теорема 5. Ранг и коранг $(f\xi\eta\rho)$-структуры на дифференцируемом многообразии M_n понижаются одновременно и на одно и то же число.

Действительно, если $\operatorname{rang}\|f\|=n-s$, то, в силу теоремы 4, в элементах распределения ξ выделяется подпространство $L_x=\operatorname{Ker} f_x$. Будем считать, что в каждой точке $x \in M_n$ подпространство L_x натянуто на s линейно независимых векторов $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_s\}$, причем

$$f_j{}^i t_u^j=0, \tag{1.16}$$

где $u=1, 2, \ldots, s$.

Свернув (1.16) с $\{\eta_i^\alpha\}$ и использовав соотношения (1.1), получим

$$\rho_\beta^\alpha \eta_j^\beta t_u^j=0.$$

Так как ранг матрицы $\|\eta_j^\beta t_u^j\|$ равен s, то ранг матрицы $\|\rho\|$ равен $p-s$.

Из теоремы 5 и следствия 1 следует:

Следствие 2. Ранг на коранг $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_n не могут быть понижены на число единиц, превосходящее размерность элементов распределения ξ.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ $(f\xi\eta\rho)$-СТРУКТУРЫ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ M_n

Для проведения классификации $(f\xi\eta\rho)$-структур на дифференцируемом многообразии M_n дадим понятие рода $(f\xi\eta\rho)$-структур.

Определение 2 [11]. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемом многообразии M_n называется $(f\xi\eta\rho)$-структурой рода (t, l, k, r), если $\operatorname{rang}\|f\|=t$, $\operatorname{rang}\|\rho\|=r$, размерность элементов распределения ξ равна l $(\dim \xi_x=l)$ и размерность элементов распределения η равна k $(\dim \eta_x=k)$.

$(f\xi\eta\rho)$-структура рода (t, l, k, r) на M_n является $(f\xi\eta\rho)$-структурой ранга t и коранга r.

Из определения 2 следует, что $(f\xi\eta\rho)$-структура, заданная на M_n, характеризуется четырьмя числовыми инвариантами: $t=\operatorname{rang}\|f\|$, $l=\dim \xi_x$, $k=\dim \eta_x$, $r=\operatorname{rang}\|\rho\|$. Два из этих четырех числовых инварианта являются несущественными.

Действительно, так как мы предполагаем выполненным условие (1.11), то на исследуемом многообразии M_n (n — фиксированное число) один из числовых инвариантов либо l, либо k оказывается несущественным, ибо $l=n-k$.

Из теоремы 5 следует, что если $t=n-s$, то $r=p-s$ $(s \leqslant l)$. Значит, число r, в силу того, что p произвольно фиксированное число, также является несущественной числовой характеристикой для $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_n.

При дальнейшем исследовании $(f\xi\eta\rho)$-структур на M_n будем считать, что основными числовыми инвариантами являются $t=\operatorname{rang}\|f\|$ и $l=\dim \xi_x$.

№	rang $\|f\|$ / dim ξ_x	n	$n-1$	$n-2$	...	...	$n-l+1$
1	0	$(n, 0, n, p)$					
2	2	$(n, 2, n-2, p)$	$(n-1, 2, n-2, p-1)$	$(n-2, 2, n-2, p-2)$			
...	...	...	...	...	...	...	
$\frac{l}{2}+1$	l	$(n, l, n-l, p)$	$(n-1, l, n-l, p-1)$	$(n-2, l, n-l, p-2)$	...	...	$(n-l+1, l, n-l, p-l+1)$
...	...	...	...	...	...	...	...
q	$n-2$	$(n, n-2, 2, p)$	$(n-1, n-2, 2, p-1)$	$(n-2, n-2, 2, p-2)$	...	...	$n-l+1, n-2, 2, p-l+1)$
$q+1$	n	$(n, n, 0, p)$	$(n-1, n, 0, p-1)$	$(n-2, n, 0, p-2)$	...	...	$(n-l+1, n, 0, p-l+1)$

Проведем теперь классификацию $(f\xi\eta\rho)$-структур на дифференцируемом многообразии M_n раздельно при n четном и при n нечетном.

Случай 1. Пусть многообразие M_n — четномерное, т. е. $n=2q$. В этом случае из утверждения 1 следует, что размерность l элементов распределения ξ также четная и может принимать $q+1$ различных числовых значений: $0, 2, 4, \ldots, n-2, n$.

Ранг матрицы $\|f\|$ может принимать $(n+1)$ различных значений: $n, n-1, n-2, \ldots, n-l, \ldots, 2, 1, 0$.

Предположим теперь, что в каждой точке $x \in M_n$ $\dim \xi_x = l$ (l — четное число и может принимать любое значение из ряда $0, 2, \ldots, n-2, n$). В этом случае $k = \dim \eta_x = n-l$ и $l < p$. В силу

Таблица № 1

на $M_n (n=2q)$

$n-l$	$\vdots$	$\vdots$	3	2	1	0
$(n-l,\ l,\ n-l,\ p-l)$						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$(n-l,\ n-2,\ 2,\ p-l)$	$\vdots$	$\vdots$	$(3,\ n-2,\ 2,\ p-n+3)$	$(2,\ n-2,\ 2,\ p-n+2)$		
$(n-l,\ n,\ 0,\ p-l)$	$\vdots$	$\vdots$	$(3,\ n,\ 0,\ p-n+3)$	$(2,\ n,\ 0,\ p-n+2)$	$(1,\ n,\ 0,\ p-n+1)$	$(0,\ n,\ 0,\ p-n)$

следствия 1, ранг $\|f\|$ не может понижаться более чем на l единиц, а следовательно, t может принимать следующие $(l+1)$ числовых значений: $n,\ n-1, \ldots, n-l+1,\ n-l$ (см. строку $\frac{l}{2}+1$ таблицы № 1).

Таким образом, при $\dim \xi_x = l$ на дифференцируемом многообразии M_n определяются $(f\xi\eta\rho)$-структуры $(l+1)$ различных родов:

$$(n,\ l,\ n-l,\ p),\ (n-1,\ l,\ n-l,\ p-1), \ldots$$
$$\ldots,\ (n-l+1,\ l,\ n-l,\ p-l+1),\ (n-l,\ l,\ n-l,\ p-l). \quad (S)$$

Укажем основные свойства $(f\xi\eta\rho)$-структур из ряда (S),

Классификация ($f\xi\eta\rho$)-структур

№	rang $\|f\|$ / dim ξ_x	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	...
1	1	$(n, 1, n-1, p)$	$(n-1, 1, n-1, p-1)$				
2	3	$(n, 3, n-3, p)$	$(n-1, 3, n-3, p-1)$	$(n-2, 3, n-3, p-2)$	$(n-3, 3, n-3, p-3)$		
...	...	...	...	...	...	...	...
$\frac{l+1}{2}$	l	$(n, l, n-l, p)$	$(n-l, l, n-l, p-1)$	$(n-2, l, n-l, p-2)$	$(n-3, l, n-l, p-3)$	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
q	$n-2$	$(n, n-2, 2, p)$	$(n-1, n-2, 2, p-1)$	$(n-2, n-2, 2, p-2)$	$(n-3, n-2, 2, p-3)$	...	...
$q+1$	n	$(n, n, 0, p)$	$(n-1, n, 0, p-1)$	$(n-2, n, 0, p-2)$	$(n-3, n, 0, p-3)$	...	...

определенных на четномерном дифференцируемом многообразии M_n.

1°. Ряд содержит всего $(l+1)$ ($f\xi\eta\rho$)-структур различных родов.

2°. Каждая последующая ($f\xi\eta\rho$)-структура ряда (S) отличается от предыдущей ($f\xi\eta\rho$)-структуры рангом и корангом. Ранг и коранг последующей ($f\xi\eta\rho$)-структуры ряда (S) на единицу меньше ранга и коранга предыдущей ($f\xi\eta\rho$)-структуры.

3°. Каждая последующая ($f\xi\eta\rho$)-структура отличается от предыдущей размерностью подпространства $L_x \subset \xi_x$ (см. § 1). Размерность подпространства L_x с каждым шагом увеличивается на одну единицу от нуля до l.

Таблица № 2

на M_n $(n=2q+1)$

$n-l+1$	$n-l$	$\cdots$	$\cdots$	3	2	1	0
$(n-l+1,\ l,\ n-l,\ p-l+1)$	$(n-l,\ l,\ n-l,\ p-l)$						
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$				
$(n-l+1,\ n-2,\ 2,\ p-l+1)$	$(n-l,\ n-2,\ 2,\ p-l)$	$\cdots$	$\cdots$	$(3,\ n-2,\ 2,\ p-n+3)$	$(2,\ n-2,\ 2,\ p-n+2)$		
$(n-l+1,\ n,\ 0,\ p-l+1)$	$(n-l,\ n,\ 0,\ p-l)$	$\cdots$	$\cdots$	$(3,\ n,\ 0,\ p-n+3)$	$(2,\ n,\ 0,\ p-n+2)$	$(1,\ n,\ 0,\ p-n+1)$	$(0,\ n,\ 0,\ p-n)$

4°. $(f\xi\eta\rho)$-структура на M_n рода $(n, l, n-l, p)$ (первая в ряду (S)) является $(f\xi\eta\rho)$-структурой максимального ранга и максимального коранга [7] (классическая $(f\xi\eta\rho)$-структура). В этом случае в элементах ξ_x не существует ненулевого вектора $\vec{X}$ такого, что его образ под действием линейного оператора f_x преобразуется в нулевой вектор, т. е. $\dim L_x=0$.

5°. $(f\xi\eta\rho)$-структура на M_n рода $(n-l, l, n-l, p-l)$ (последняя в ряду (S)) является $(f\xi\eta\rho)$-структурой минимально возможного ранга и минимально возможного коранга, в случае, когда $\dim\xi_x=l$. При этом в каждой точке $x \in M_n$ подпространство L_x совпадает с ξ_x, т. е. аффинор f_x действует как аннулятор на элемент ξ_x распределения $\xi(\mathrm{Ker} f_x = L_x = \xi_x)$. Из соотношений (1.1) следует, что если $\dim \xi_x = l$ и $\mathrm{rang} \| f \| = n - l$, компоненты геометрического объекта удовлетворяют соотношениям

$$f^3 + f = 0.$$

Следовательно, $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-l, l, n-l, p-l)$ на M_n является f-структурой ранга $(n-l)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. Если $\dim \xi_x = l$ (l — четное), то на четномерном дифференцируемом многообразии M_n можно определить $(f\xi\eta\rho)$-структуры $(l+1)$ различных родов (см. ряд (S)).

Так как l может принимать любое значение из ряда чисел $0, 2, \ldots, (n-2), n$, то всего на M_n (n — четное) определяются $(q+1)^2$ различных родов $(f\xi\eta\rho)$-структур (см. таблицу № 1). Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 7. На четномерном дифференцируемом многообразии M_n $(n=2q)$ можно определить $(f\xi\eta\rho)$-структуры $(q+1)^2$ различных родов.

Рассмотрим теперь некоторые частные классы $(f\xi\eta\rho)$-структур на многообразии M_n, которые являются известными дифференциально-геометрическими структурами.

Пусть $l=0$. В этом случае, в силу теоремы 4, на M_n определяется единственная $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n, 0, n, p)$ (см. строку 1 таблицы № 1). Так как $\dim \xi_x = 0$, то π-структура в $T(M_n)$ вырождается в распределение η, в котором определена почти комплексная структура. Следовательно, почти комплексная структура на M_n $(n=2q)$ является частным классом $(f\xi\eta\rho)$-структуры рода $(n, 0, n, p)$.

Пусть $l=2$. В силу теоремы 4, при этом на M_n определяются $(f\xi\eta\rho)$-структуры трех родов: $(n, 2, n-2, p)$, $(n-1, 2, n-2, p-1)$, $(n-2, 2, n-2, p-2)$ (см. строку 2 таблицы № 1). Как известно, первая структура является классической $(f\xi\eta\rho)$-структурой. В случае $p=2$ и при кососимметричности матрицы $\|\rho_\alpha{}^\beta\|$ $(\alpha, \beta = m+1, m+2)$ $(f\xi\eta\rho)$-структура на M_n является известной $(fUVuv\lambda)$-структурой на M_n [4].

Пусть $l=n$. В этом случае $\dim \eta_x = 0$, т. е. система (1.8) не имеет решения, отличного от нулевого. Следовательно, π-структура в $T(M_n)$ вырождается в распределение ξ. Из теоремы 4 следует, что при $l=n$ на M_n могут быть определены $(f\xi\eta\rho)$-структуры $(n+1)$ различных родов:
$(n, n, 0, p), (n-1, n, 0, p-1), \ldots, (1, n, 0, p-n+1), (0, n, 0, p-n)$ (см. строку $q+1$ таблицы № 1). Последняя структура этого ряда является f-структурой нулевого ранга.

Из таблицы № 1 видно, что при n четном на многообразии M_n определяются f-структуры $(q+1)$ различных рангов, включая и почти комплексную структуру (см. последнюю заполненную клетку каждой строки таблицы № 1), а также $(q+1)$ различных родов $(f\xi\eta\rho)$-структур максимального ранга и максимального коранга, включая и почти комплексную структуру — классические $(f\xi\eta\rho)$-структуры (см. первую клетку каждой строки таблицы № 1).

Случай 2. Пусть многообразие M_n — нечетномерное, т. е. $n=2q+1$. В этом случае из утверждения 1 следует, что размерность l элементов распределения ξ также нечетная и может принимать $q+1$ различных числовых значений: $1, 3, 5, \ldots$ $\ldots, n-2, n$. Как и в случае 1 (см. стр. 66), ранг матрицы $\|f\|$ может принимать $(n+1)$ различных значений; $n, n-1, n-2, \ldots$ $\ldots, n-l, \ldots, 2, 1, 0$.

Предположим теперь, что в каждой точке $x \in M_n$ $\dim \xi_x = l$ (l — нечетное число и может принимать любое значенине из ряда $1, 3, \ldots, (n-2), n$). При этом $k=\dim \eta_x = n-l$. Показано, что при $\dim \xi_x = l$ на M_n определяются $(f\xi\eta\rho)$-структуры $(l+1)$ различных родов, которые можно записать рядом (S) (см. строку $\frac{l+1}{2}$ таблицы № 2). Этот ряд, как и в случае четности n, обладает теми же свойствами (см. свойства 1—5).

Таким образом, при n нечетном справедливы следующие теоремы.

Теорема 8. При $\dim \xi_x = l$ (l — нечетное) на нечетномерном дифференцируемом многообразии M_n определяются $(f\xi\eta\rho)$-структуры $(l+1)$ различных родов (см. ряд (S)).

Теорема 9. На нечетномерном дифференцируемом многообразии M_n $(n=2q+1)$ определяются $(f\xi\eta\rho)$-структуры $(q+1)(q+2)$ различных родов.

Рассмотрим теперь частные классы $(f\xi\eta\rho)$-структур на нечетномерном дифференцируемом многообразии M_n.

Пусть $l=1$ (см. строку 1 таблицы № 2). В этом случае $\dim \eta_x = n-1$ и на M_n определяются $(f\xi\eta\rho)$-структуры двух родов: $(n, 1, n-1, p)$, $(n-1, 1, n-1, p-1)$, причем $2 < p$. Первая структура является $(f\xi\eta\rho)$-структурой максимального ранга и максимального коранга, а вторая структура — f-структурой ранга $(n-1)$. Как известно, f-структура ранга $(n-1)$ на многообразии M_n (n — нечетное) является почти контактной структурой (см. [14]). Следовательно, почти контактная структура, является частным классом $(f\xi\eta\rho)$-структуры на нечетномерном дифференцируемом многообразии.

Из таблицы № 2 видно, что при n нечетном на многообразии M_n определяются f-структуры $(q+1)$ различных рангов, включая и почти контактную структуру (см. последнюю заполненную клетку каждой строки таблицы № 2), а также $(f\xi\eta\rho)$-структуры максимального ранга и максимального коранга $(q+1)$ различных родов (см. первую клетку каждой строки таблицы № 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башкене А. Л.*, О структурах, индуцируемых на подмногообразиях почти комплексного многообразия. Liet mat. rinkinys. Лит. мат. сб., 1976, № 1, 23—34 (РЖМат, 1976, 11А806)

2. —, Тензорные структуры на поверхностях почти комплексного многообразия. VI Всес. конф. по совр. пробл. геометрии. Тезисы докл. Вильнюс. гос. пед. ин-т. Вильнюс, 1975, 24—25 (РЖМат, 1975, 12А583К)
3. *Домбровский Р. Ф.*, Поля геометрических объектов на многомерных касательно оснащенных поверхностях в P_n. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 7 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 153—171 (РЖМат, 1976, 9А610)
4. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 9 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1979, 246 с. (РЖМат, 1980, 1А800К)
5. *Лаптев Г. Ф.*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, *2*, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
6. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 1 (Ин-т науч. информ. АН СССР)». М., 1966, 139—190 (РЖМат, 1967, 6А382)
7. —, *Н. М. Остиану*, ($f\xi\eta\rho$)-структура на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 7 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 5—22 (РЖМат, 1976, 9А622)
8. *Норден А. П.*, Пространства декартовой композиции. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1963, № 4, 117—128 (РЖМат, 1964, 3А367)
9. *Остиану Н. М.*, О подмногообразиях в пространствах с (φ, a)-структурой. Третья Прибалтийская геометр. конф. Тезисы докл. Паланга, 1968, 119—121 (РЖМат, 1969, 5А494К)
10. —, Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 89—111 (РЖМат, 1978, 1А632)
11. —, *Домбровский, Р. Ф., Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 13 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1982, 27—76 (РЖМат, 1982, 9А590)
12. —, *Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. I. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1980, 3—63 (РЖМат, 1980, 11А728)
13. *Поляков Н. Д.*, Классификация индуцированных ($f\xi\eta\rho$)-структур на подмногообразии коразмерности 2 в почти контактном многообразии. МГУ. М., 1982. 29 с., библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 июня 1982 г. № 2868—82 г. Деп.) (РЖМат, 1982, 9А592Деп.)
14. —, Дифференциально-геометрические структуры на почти контактном многообразии. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 113—137 (РЖМат, 1978, 1А639)
15. *Blair D. E., Ladden G. D., Yano K.*, Induced structures on submanifolds. Kodai Math., Semin Repts., 1970, *22*, № 2, 188—198 (РЖМат, 1971, 2А612)
16. *Mishra R. S.*, A generalised theory of differential structures. Tensor, 1977, *31*, № 2, 155—164 (РЖМат, 1978, 6А677)
17. *Okumura Masafami*, Certain hypersurfaces of an od dimensional sphere. Tôhoku Math. J., 1967, *19*, № 4, 381—395 (РЖМат, 1968, 12А550)
18. *Watanabe Yoshiko*, Totally umbilical surfaces in normal contact Riemannian manifolds. Kodai Math. Semin. Repts, 1967, *19*, № 4, 474—487 (РЖМат, 1968, 9А503)
19. *Yamaguchi Seuchi*, On hypersurfaces in Sasakian manifolds. Kodai. Math. Semin. Repts, 1969, *21*, № 1, 64—72 (РЖМат, 1969, 9А463)
20. *Yano K., Ki U-Hang*, On quasi-normal (f, g, u, v, λ)-structure. Kodai math. Semin. Repts, 1972, *24*, 106—170 (РЖМат, 1972, 9А540)