А. В. Чернов, Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения, *Изв. вузов. Матем.*, 2011, номер 3, 95–107

https://www.mathnet.ru/ivm7249

Известия вузов. Математика
2011, №3, с. 95–107

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

А.В. ЧЕРНОВ

ОБ ОДНОМ МАЖОРАНТНОМ ПРИЗНАКЕ ТОТАЛЬНОГО СОХРАНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Для нелинейного управляемого функционально-операторного уравнения в банаховом идеальном пространстве доказана теорема единственности решения, а также теорема о достаточных условиях глобальной разрешимости для всех управлений из поточечно ограниченного множества. Вторая из этих двух теорем доказывается при условии глобальной разрешимости некоторого мажорантного уравнения для указанного семейства управлений. Приводятся примеры сведения управляемых начально-краевых задач к изучаемому уравнению.

Ключевые слова: тотальное сохранение глобальной разрешимости, функционально-операторное уравнение, мажорантное уравнение, теорема единственности.

УДК: 517.988, 517.977.56

Abstract. For a nonlinear controlled functional operator equation in the Banach ideal space we prove a uniqueness theorem and also a theorem concerning sufficient conditions of global solvability for all controls from a pointwise bounded set. The second of these two theorems is proved subject to global solvability of some majorant equation for the control family mentioned above. The procedure of reduction of controlled initial boundary value problems to the equation under study is illustrated by examples.

Keywords: total preservation of global solvability, functional operator equation, majorant equation, uniqueness theorem.

Введение

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbf{N}$ – заданные числа, $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество, $\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}$ – *банаховы идеальные пространства*[1] (БИП) измеримых на Π функций, $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ — выпуклое множество, $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ — заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). Далее для вектор-функции $x \in \mathcal{X}^\ell$, являющейся

Поступила 15.07.2009

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 07-01-00495, аналитической целевой ведомственной программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)” Минобрнауки РФ (регистрационный номер 2.1.1/3927) и федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2010 годы (проект НК-13П(9)).

[1]Напомним, что банахово пространство E измеримых функций называется банаховым идеальным пространством, если $\{y \in E,\ x$ — измеримая функция, $|x| \le |y|\} \Longrightarrow \{x \in E,\ \|x\|_E \le \|y\|_E\}$.

образом вектор-функции $z \in \mathcal{Z}^m$ при отображении, осуществляемом оператором A, будем в зависимости от ситуации использовать равносильные обозначения: $x = A[z]$; $x(t) = A[z](t)$, $t \in \Pi$; $x(\cdot) = A[z](\cdot)$; $x = A[z(\cdot)]$. Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение

$$x(t) = \theta(t) + A\big[f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))\big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{0.1}$$

где $u \in \mathcal{D}$ — управление, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$, $f : \Pi \times \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — заданная функция такая, что

$\mathbf{F}_1$) для всех $y \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$ суперпозиция $f\big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\big) \in \mathcal{Z}^m$.

К уравнению (0.1) с помощью *метода обращения главной части* дифференциального уравнения может быть сведен довольно широкий класс управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ). Для пояснения сказанного рассмотрим следующий пример, ставший уже классическим для теории оптимизации распределенных систем, а именно, управляемую задачу Гурса–Дарбу

$$\begin{cases} x''_{t_1 t_2}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), & t = (t_1, t_2) \in \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2]; \\ x(t_1, 0) = \omega_1(t_1), & t_1 \in [0, T_1]; \\ x(0, t_2) = \omega_2(t_2), & t_2 \in [0, T_2]; \\ \omega_1(0) = \omega_2(0). \end{cases} \tag{0.2}$$

Будем считать, что функции ω_1 и ω_2 абсолютно непрерывны, а функция f удовлетворяет условию $\mathbf{F}_1$) при $\ell = 1$, $m = 1$, $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $1 \le p < q \le +\infty$, $U = L_r(\Pi)$, $r \in [1, \infty]$. Решение задачи (0.2) будем понимать в смысле почти всюду (п. в.) и искать его среди функций из $L_q(\Pi)$, имеющих смешанную производную в классе $L_p(\Pi)$. Тогда можно понимать его как решение уравнения

$$x(t_1, t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0) + \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} f\big(\xi, x(\xi), u(\xi)\big)\, d\xi_2.$$

Это уравнение равносильно следующему:

$$x(t) = w(t) + A\big[f(\cdot, x, u)\big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in L_q(\Pi), \tag{0.3}$$

где $w(t_1, t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0)$, $w \in L_q(\Pi)$, $A : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$ — оператор, определяемый формулой

$$A[z](t_1, t_2) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} z(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2.$$

Уравнение (0.3) имеет вид (0.1) и удовлетворяет всем предположениям. Из этого примера видно, что для их проверки достаточно установить лишь некоторые свойства оператора A — разрешающего оператора НКЗ, обращающего главную часть дифференциального уравнения (или системы уравнений) и отражающие по сути дела характер зависимости решения соответствующего линейного дифференциального уравнения от правой части при нулевых начально-краевых условиях.

Отметим, что (в случае лебеговых пространств) уравнение (0.1) в указанном далее смысле родственно (точнее говоря, двойственно) функционально-операторному уравнению вида [1]–[5]

$$z(t) = f\big(t, A[z](t), u(t)\big), \quad t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \tag{0.4}$$

где $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$ — ЛОО, $f : \Pi \times \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — заданная функция, $u \in L_\kappa^s(\Pi)$ — управляющая функция. Уравнение (0.4) с помощью очевидной замены $y = A[z]$ сводится к уравнению (0.1). И наоборот, уравнение (0.1) в случае $\theta = 0$ (к этому случаю его можно привести заменой $y - \theta = \widetilde{y}$) с помощью замены $z = f(\cdot, y, u)$ сводится к уравнению (0.4). Таким образом, при условии единственности решения, задачи, которые записываются в виде уравнения (0.4), могут быть записаны и в виде (0.1), и наоборот. Это обстоятельство важно иметь в виду, поскольку в [1]–[5] приводятся многочисленные примеры сведения распределенных систем к уравнению (0.4). Далее оказывается более удобным использовать уравнение (0.1).

Сформулируем проблему тотального сохранения глобальной разрешимости уравнения (0.1). Данная проблема возникает в различных разделах теории оптимизации: в численных методах, в теории управляемости и теории дифференциальных игр, в частности, при исследовании множества достижимости, определении множества стратегий игроков и т. д.

Рассмотрим, например, следующую ситуацию, типичную для численной оптимизации сосредоточенных и распределенных управляемых систем. Здесь одним из основных подходов является использование градиентных методов спуска. При этом целевой функционал задачи оптимизации во многих случаях удается привести к виду

$$J[u] = F[x_u, u], \tag{0.5}$$

удобному для исследования, где $u \in \mathcal{D}$ — управление, а $x_u \in L_q^\ell(\Pi)$ — отвечающее ему решение уравнения (0.1), $F : \mathcal{X}^\ell \times \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ — дифференцируемый (в том или ином смысле) функционал. Удобство представления функционала задачи в виде (0.5) связано с тем, что в противном случае приходится рассматривать целевой функционал как функционал $F[x, u]$ на множестве пар (x, u), связанных соотношением (условием связи) (0.1). В результате в множество ограничений задачи оптимизации включается весьма нетривиальное (для учета и исследования) ограничение (0.1). Дифференцируемость функционала $J[u]$ в точке $u_0 \in \mathcal{D}$ предполагает, что он определен в некоторой окрестности этой точки. Таким образом, возникает проблема сохранения разрешимости уравнения (0.1) при варьировании управления u_0 (или по другой терминологии, проблема *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР); глобальность понимается по множеству Π изменения независимых переменных). О том, что эта проблема не является надуманной (сохранение глобальной разрешимости распределенных систем может не иметь места даже при малых вариациях управления), свидетельствуют, в частности, примеры из [1], [2]. Теория достаточных условий УСГР при малости отклонения управления u от u_0 в смысле некоторой полуметрики для уравнений (0.4) в лебеговых пространствах и операторных уравнений второго рода общего вида в пространстве $L_\infty^m(\Pi)$, $\Pi \subset \mathbf{R}^n$, была построена в [1]–[5]. В работе [6] схема [1]–[5] получения условий УСГР была распространена на случай операторных уравнений второго рода общего вида в банаховом пространстве. Конструктивность сформулированных в [6] общих теорем УСГР была проиллюстрирована на примере задачи Коши для гиперболического уравнения первого порядка при варьировании старшего коэффициента. Их доказательство можно найти в [7].

Однако в некоторых случаях, например, при использовании метода условного градиента или градиентного метода с дроблением шага, необходимо, чтобы соответствующее уравнение (0.1) (или “по двойственности” уравнение (0.4)) обладало свойством глобальной разрешимости *тотально*, т. е. на всем множестве $\mathcal{D}$ допустимых управлений. Таким образом, возникает проблема *тотального сохранения глобальной разрешимости* (ТСГР) указанного уравнения. Отметим, что представление целевого функционала в виде (0.5) возможно лишь в том случае, когда решение уравнения (0.1) не только существует, но и обладает свойством единственности. Поэтому в данной статье изучается также проблема единственности решения уравнения (0.1). Кроме того, при исследовании уравнения (0.1) полезной является возможность равномерной поточечной оценки семейства решений $\{x_u : u \in \mathcal{D}\}$ этого уравнения. В применении к численным методам оптимизации такая оценка востребована, например, при оценивании остаточного члена в формуле приращения функционала, и соответственно, при обосновании сходимости метода. Очевидно, что подобного сорта оценка будет полезной при исследовании множества достижимости, а следовательно, в теории управляемости и теории дифференциальных игр, и т. д.

В данной статье для уравнения (0.1) исследуются фактически три проблемы: 1) тотальное сохранение глобальной разрешимости; 2) равномерная поточечная оценка семейства решений; 3) единственность решения. Проблема 3) решается здесь достаточно универсально (в том плане, что не требуем для ее решения каких-то специальных свойств функции f типа монотонности, выпуклости и т. п. или самого уравнения). Проблемы 1) и 2) в общей постановке гораздо более нетривиальны и требуют более дифференцированного подхода. В данной статье исследование этих двух проблем мы проводим при дополнительном предположении существования глобального решения у некоторого мажорантного уравнения по отношению к семейству уравнений[2] $\big\{(0.1) : u \in \mathcal{D}\big\}$. При этом доказывается также и поточечная оценка решений $\big|x_u(t)\big| \le \widehat{x}(t)$, $t \in \Pi$, $u \in \mathcal{D}$, где $\widehat{x}(t)$ — решение мажорантного уравнения. Важной особенностью наших результатов является также то, что оценка решения строится на заранее заданном множестве $\Pi \subset \mathbf{R}^n$, одном и том же для всех $u \in \mathcal{D}$.

В следующих далее двух разделах приводятся точные формулировки основных результатов, вкратце обозначенных выше. Теорема о ТСГР и равномерной оценке формулируется в разделе 1 и доказывается в разделе 3. Теорема единственности формулируется в разделе 2 и доказывается в разделе 4. Применение доказанных абстрактных результатов иллюстрируется в разделе 5 на примере управляемой задачи Гурса-Дарбу, а также смешанной задачи для волнового уравнения. Аналогичным образом можно рассмотреть и более содержательные примеры (в частности, при соответствующих условиях примеры из статьи [2]).

1. Формулировка основного результата

Далее все векторные неравенства понимаются покомпонентно. Сформулируем мажорантный признак ТСГР.

Будем предполагать, что ЛОО A, множества $\mathcal{D}$ допустимых управлений и Θ допустимых начальных управлений таковы, что существует монотонный положительный оператор (не обязательно линейный) $G : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, обеспечивающий оценку

$$\big|\theta + A\big[f(\cdot, x, u)\big]\big| \le G\big[|x|\big] \ \ \forall x \in \mathcal{X}^\ell, \quad \varphi = \{\theta, u\} \in \Theta \times \mathcal{D}, \tag{1.1}$$

причем множество $\mathcal{D}$ поточечно ограничено, т. е.

$$\exists\, \overline{u}, \widehat{u} \in \mathcal{U}^s : \overline{u} \le u \le \widehat{u} \ \ \forall u \in \mathcal{D}.$$

Уравнение

$$x = G[x], \quad x \in \mathcal{X}_+, \tag{1.2}$$

естественно назвать *мажорантным* для семейства уравнений (0.1) при $\theta \in \Theta$, $u \in \mathcal{D}$. Помимо этого, будем считать выполненными следующие условия:

- $\mathbf{S}_1$) Существуют БИП Z_X и числа $K_X, \alpha_X > 0$ такие, что для всех $x \in \mathcal{X}$, $y \in Z_X$ имеем $yx \in \mathcal{Z}$, и справедливо неравенство $\|yx\|_{\mathcal{Z}} \le K_X \cdot \|y\|_{Z_X}^{\alpha_X} \cdot \|x\|_{\mathcal{X}}$.
- $\mathbf{F}_2$) Функция $f(t, y, u)$ дифференцируема по переменной $y \in \mathbf{R}^\ell$ и вместе с производной $f'_y(t, y, u)$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{y, u\} \in \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s$.
- $\mathbf{F}_3$) Для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^s$ суперпозиция $f'_y\big(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)\big) \in Z_X^{m\times\ell}$.

---

[2]Формально говоря, здесь просматривается некоторая аналогия с известным признаком Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

A$_1$) ЛОО A обладает положительной мажорантой, т. е. положительным ЛОО $B : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ таким, что $\big|A[z]\big| \le B\big[|z|\big]$ для всех $z \in \mathcal{X}^\ell$, причем для всякого $y \in Z_X$, $y \ge 0$, и оператора $B_{(y)} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, определяемого формулой $B_{(y)}[x] = B[yx]$, спектральный радиус $\rho(B_{(y)}) < 1$.

Тогда справедлива

Теорема 1.1. *Пусть уравнение* (1.2) *имеет решение* $\widehat{x} \in \mathcal{X}$, $\widehat{x} \ge 0$. *Тогда каждому управляющему набору* $\varphi = (\theta, u) \in \Theta \times \mathcal{D}$ *отвечает единственное решение* $x_\varphi \in \mathcal{X}^\ell$ *уравнения* (0.1)*, удовлетворяющее оценке* $|x_\varphi| \le \widehat{x}$.

Доказательство см. в разделе 3.

Замечание 1.1. Пользуясь неравенством Гёльдера[3], нетрудно показать, что если, например, $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $q \ge p \ge 1$, то условие **S**$_1$) выполнено при $Z_X = L_\sigma(\Pi)$, $K_X = \alpha_X = 1$, где $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{p}$ (при $q = p$, $\sigma = \infty$).

Замечание 1.2. Что касается предположений **A**$_1$), то в разделе 2 (см. теорему 2.1) приводятся простые достаточные условия их выполнения.

2. Формулировка теоремы единственности

Определение. Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π, P_H — оператор умножения на характеристическую функцию[4] χ_H множества $H \in \Sigma$. Тогда систему $\mathcal{B}(A) = \big\{H \in \Sigma : \quad P_H A P_H = P_H A\big\}$ будем называть *системой вольтерровских множеств* ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$. При этом для числа $\delta > 0$ подсистему $\mathcal{T} = \big\{\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_k = \Pi\big\} \subset \mathcal{B}(A)$ будем называть

1) *вольтерровской δ-цепочкой* ЛОО A, если $\big\|P_h A P_h\big\| < \delta$ для всех $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$;
2) *вольтерровской δ-малой по мере цепочкой множеств* ЛОО A, если $\mathrm{mes}(h) < \delta$ для всех $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$.

В дополнение к уже перечисленным во введении будем предполагать, кроме того, что выполняется условие **S**$_1$), а также условия

S$_2$) БИП Z_X является пространством с порядково непрерывной нормой.

A$_2$) Оператор $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ обладает для всех $\delta > 0$ вольтерровской δ-малой по мере цепочкой множеств.

Следующее утверждение, хотя и является для нас вспомогательным, представляет, вообще говоря, и самостоятельный интерес.

---

[3]Мы ссылаемся на это замечание в приведенных ниже примерах. Однако выполнение условия **S**$_1$) не является свойством одних только лебеговых пространств. В частности, его выполнение можно установить и в более общей ситуации пространств Орлича (обобщающих, как известно, лебеговы пространства). А именно, пусть $\mathcal{X} = L_{M_X}$, $\mathcal{Z} = L_{M_Z}$ — пространства Орлича (см. [8], § IV.3), причем существует N-функция $M_{\widehat{X}}(\cdot)$ такая, что $M_Z\big(2M_{\widehat{X}}(\cdot)\big) = M_X(\cdot)$. Тогда функция $M_Y(\cdot) = M_Z\big(2M^*_{\widehat{X}}(\cdot)\big)$ будет, очевидно, N-функцией. Соответственно, определено пространство Орлича $\mathcal{Y} = L_{M_Y}$. При этом будет справедливо неравенство $\|xy\|_{L_{M_Z}} \le 2\|x\|_{L_{M_X}}\|y\|_{L_{M_Y}}$, и тем самым, условие **S**$_1$) выполняется. Однако доказательство этого факта намного сложнее, чем для случая лебеговых пространств.

[4]Будем обозначать его одинаково независимо от того, в каком пространстве он действует.

Теорема 2.1 (Признак квазинильпотентности)**.** *Для всякого* $y \in Z_X^{m\times\ell}$ *операторы* $A_{(y)} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$ *и* $A_{[y]} : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}^m$ *определяемые соответственно формулами*

$$A_{(y)}[x] = A[yx], \quad x \in \mathcal{X}^\ell; \quad A_{[y]}[z] = yA[z], \quad z \in \mathcal{Z}^m,$$

являются квазинильпотентными, и более того, для любого $\delta > 0$ *обладают вольтерровской* δ*-цепочкой.*

Замечание 2.1. Согласно результатам работы [9], из того, что ЛОО $A_{(y)}$ или $A_{[y]}$ обладает для всякого числа $\delta > 0$ вольтерровской δ-цепочкой, следует его квазинильпотентность. Таким образом, теорема 2.1 заключает в себе более сильное утверждение, нежели сам по себе признак квазинильпотентности.

Замечание 2.2. Важно отметить, что проверка наличия вольтерровской δ-малой по мере цепочки множеств у разрешающего оператора НКЗ, связанной с гиперболическим или параболическим уравнением, как правило, не вызывает проблем (см. приведенные ниже примеры), поскольку сводится к изучению чисто геометрических свойств области определенности (характеристического конуса). Непосредственная проверка наличия вольтерровской δ-цепочки гораздо более затруднительна, так как связана с необходимостью оценки нормы $\|P_h A P_h\|$. В этом и состоит ценность теоремы 2.1.

В дополнение к ранее сделанным предположениям потребуем, чтобы правая часть уравнения (0.1) удовлетворяла условиям $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{F}_3$).

Тогда справедлива

Теорема 2.2. *Каково бы ни было управление* $u \in \mathcal{U}^s$*, уравнение* (0.1) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство теорем см. в разделе 4.

3. Доказательство основного результата

Далее для векторов $a, b \in \mathbf{R}^\ell$, $a \le b$ (векторное неравенство понимаем покомпонентно), будем использовать обозначение $[a;b] \equiv [a_1;b_1] \times \dots \times [a_\ell;b_\ell]$.

Прежде всего, сформулируем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть* $S(\Pi)$ — *пространство измеримых п. в. конечных функций на* Π, $l \in \mathbf{N}$, $a(\cdot), b(\cdot) \in S^l(\Pi)$ — *измеримые на* Π l*-вектор-функции,* $a(t) \le b(t)$ *для почти всех* $t \in \Pi$*, а функция* $\Phi(t,y) : \Pi \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ *измерима по* $t \in \Pi$ *и непрерывна по* $y \in \mathbf{R}^l$*. Тогда функция*

$$\varphi(t) \equiv \max_{y \in [a(t);b(t)]} \Phi(t,y)$$

измерима на Π *и* $\exists \theta(\cdot) \in M[a;b] \equiv \big\{ y \in S^l(\Pi) : y(t) \in [a(t);b(t)] \big\}$ *такая, что*

$$\Phi(t,\theta(t)) = \varphi(t) \qquad \text{для почти всех} \;\; t \in \Pi.$$

Доказательство леммы 3.1 следует, например, непосредственно из ([10], предложение Д1.2, с. 326; теорема Д1.4, с. 327).

Доказательство теоремы 1.1. 1. Определим множество $M = \big\{ x \in S^\ell(\Pi) : \quad |x| \le \widehat{x} \big\}$. Покажем, что оператор $F_\varphi : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$, определяемый формулой

$$F_\varphi[x] = \theta + A\big[f\big(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)\big) \big],$$

не выводит из множества M. Выберем произвольно $x \in M$ и, пользуясь условием (1.1), оценим

$$\bigl|F_\varphi[x]\bigr| \le G\bigl[|x|\bigr] \le G[\widehat{x}] = \widehat{x}.$$

Таким образом, $F_\varphi : M \to M$.

2. Покажем, что существует $m \in \mathbf{N}$ такое, что степень F_φ^m является сжимающим оператором на множестве M. Обозначим

$$z_* = \max\Bigl\{\bigl|f'_y\bigl(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)\bigr)\bigr|,\ x \in M,\ u \in \mathcal{D}\Bigr\}.$$

Согласно лемме 3.1 найдутся $x_0 \in S^\ell(\Pi)$, $u_0 \in S^s(\Pi)$ такие, что $|x_0| \le \widehat{x}$, т.е. $x \in M$, $\overline{u} \le u_0 \le \widehat{u}$,

$$z_* = \bigl|f'_y\bigl(\cdot, x_0(\cdot), u_0(\cdot)\bigr)\bigr|.$$

Тогда в силу условия $\mathbf{F}_3$) $z_* \in Z_X$. В таком случае, согласно условию $\mathbf{A}_1$), для оператора $B_* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, определяемого формулой $B_*[x] = B[z_* x]$, имеем $\rho(B_*) < 1$, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|B_*^k\|} < 1$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|B_*^k\|$ сходится. Поэтому $\|B_*^k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Стало быть, существует $m \in \mathbf{N}$ такое, что $\|B_*^m\| = \alpha < 1$. Выберем произвольно $x, y \in M$ и оценим модуль

$$\bigl|F_\varphi^m[x] - F_\varphi^m[y]\bigr| = \bigl|A\bigl[f\bigl(\cdot, F_\varphi^{m-1}[x], u\bigr) - f\bigl(\cdot, F_\varphi^{m-1}[y], u\bigr)\bigr]\bigr| \le \\ \le B\bigl[\bigl|f\bigl(\cdot, F_\varphi^{m-1}[x], u\bigr) - f\bigl(\cdot, F_\varphi^{m-1}[y], u\bigr)\bigr|\bigr].$$

Пользуясь условиями $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{F}_3$) и леммой Адамара, получаем

$$\bigl|\Delta^m F_\varphi[x,y]\bigr| \equiv \bigl|F_\varphi^m[x] - F_\varphi^m[y]\bigr| \le \\ \le B\left[\left|\int_0^1 f'_y\bigl(\cdot, F_\varphi^{m-1}[y] + \theta\Delta^{m-1}F_\varphi[x,y], u\bigr)\Delta^{m-1}F_\varphi[x,y]d\theta\right|\right] \le \\ \le B\left[\int_0^1 \bigl|f'_y\bigl(\cdot, F_\varphi^{m-1}[y] + \theta\Delta^{m-1}F_\varphi[x,y], u\bigr)\bigr|d\theta\bigl|\Delta^{m-1}F_\varphi[x,y]\bigr|\right] \le \\ \le B_*\bigl[\bigl|\Delta^{m-1}F_\varphi[x,y]\bigr|\bigr] \equiv B_*\bigl[\bigl|F_\varphi^{m-1}[x] - F_\varphi^{m-1}[y]\bigr|\bigr].$$

Повторяя эту оценку необходимое количество раз, имеем

$$\bigl|F_\varphi^m[x] - F_\varphi^m[y]\bigr| \le B_*^m\bigl[|x - y|\bigr].$$

Таким образом,

$$\bigl\|F_\varphi^m[x] - F_\varphi^m[y]\bigr\| \le \|B_*^m\| \cdot \|x - y\| = \alpha \cdot \|x - y\|, \quad \alpha < 1.$$

В таком случае, согласно принципу сжимающих отображений (см., например, [11], теорема 7.2.2, с. 432), существует единственная неподвижная точка оператора F_φ на множестве M. □

4. Доказательство теоремы единственности

Лемма 4.1. *Пусть $X = X(\Pi)$ — БИП с порядково непрерывной нормой, и кроме того, $\{x_k\} \subset X$, $\varphi \in X$, и для почти всех $t \in \Pi$ $x_k(t) \to 0$ при $k \to \infty$, $\bigl|x_k(t)\bigr| \le \varphi(t)$. Тогда $\bigl\|x_k\bigr\| \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Выберем произвольно последовательность $\gamma_r \searrow 0$ при $r \to \infty$. Согласно теореме Д.Ф. Егорова найдется последовательность измеримых множеств $Q_r \subset \Pi$: $\mathrm{mes}(\Pi \setminus Q_r) < \gamma_r$ и сходимость $x_k \to 0$ на каждом Q_r равномерна. Определим множества $\Pi_r = \bigcup\limits_{j=1}^{r} Q_j$. Тогда $\mathrm{mes}(\Pi \setminus \Pi_r) < \gamma_r$ и сходимость $x_k \to 0$ на каждом Π_r равномерна. При этом $\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \cdots \subset \Pi_k \subset \cdots \subset \Pi$. Тогда последовательность характеристических функций $\chi_{\Pi\setminus\Pi_r}(t) \searrow 0$ при $r \to \infty$, а следовательно, и $\chi_{\Pi\setminus\Pi_r}(t)\varphi(t) \searrow 0$ при $r \to \infty$ для почти всех $t \in \Pi$. Поэтому в силу порядковой непрерывности нормы пространства X последовательность $\psi_r \equiv \|\chi_{\Pi\setminus\Pi_r}\varphi\| \to 0$ при $r \to \infty$. Тогда, фиксируя произвольно $\varepsilon > 0$, получаем, что существует $r_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такое, что

$$0 \le \psi_r < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех} \quad r \ge r_\varepsilon.$$

При этом сходимость $x_k \to 0$ на множестве $\Pi[\varepsilon] \equiv \Pi_{r_\varepsilon}$ равномерна, т. е. найдется номер $k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такой, что

$$\big|\chi_{\Pi[\varepsilon]} x_k(t)\big| < \frac{\varepsilon}{2\|1\|} \quad \text{для всех} \quad k \ge k_\varepsilon.$$

Таким образом, с учетом идеальности пространства X для всех $k \ge k_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\big\|x_k\big\| = \big\|(\chi_{\Pi[\varepsilon]} + \chi_{\Pi\setminus\Pi[\varepsilon]})x_k\big\| \le \big\|\chi_{\Pi[\varepsilon]}x_k\big\| + \big\|\chi_{\Pi\setminus\Pi[\varepsilon]}x_k\big\| < \\ < \frac{\varepsilon}{2\|1\|}\cdot\|1\| + \psi_{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Лемма 4.2. *Пусть ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ для любого числа $\gamma > 0$ обладает γ-малой по мере вольтерровской цепочкой множеств. Тогда для каждого $y \in Z_X^{m\times\ell}$ оператор $A_{(y)} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$, определяемый формулой $A_{(y)}[x] = A[yx]$, для любого $\delta > 0$ обладает вольтерровской δ-цепочкой.*

Доказательство. 1. Выберем произвольно числовую последовательность $\{\gamma_r\} \to +0$. По условию для каждого $r \in \mathbf{N}$ существует γ_r-малая по мере вольтерровская цепочка множеств оператора A

$$\mathcal{T}^{(r)} = \big\{H_0^{(r)}, \ldots, H_{k_r}^{(r)}\big\} \subset \mathcal{B}(A), \quad \mathrm{mes}(h_i^{(r)}) < \gamma_r,$$

$h_i^{(r)} = H_i^{(r)} \setminus H_{i-1}^{(r)}$, $i = \overline{1, k_r}$. Для произвольного $h \in \Sigma(\Pi)$ оценим норму

$$\big\|P_h A_{(y)} P_h\big\| = \sup_{x\in\mathcal{X}^\ell:\|x\|=1} \big\|\chi_h A[\chi_h yx]\big\| \le \|A\| \sup_{x\in\mathcal{X}^\ell:\|x\|=1} \|\chi_h yx\|_{\mathcal{Z}^m},$$

откуда по условию $\mathbf{S}_1$)

$$\big\|P_h A_{(y)} P_h\big\| \le m\cdot\ell\cdot\|A\|\cdot K_X\cdot\big\|\chi_h|y|\big\|_{Z_X}^{\alpha_X}. \tag{4.1}$$

2. В соответствии с оценкой (4.1) рассмотрим числовую последовательность

$$\beta_r = \max_{i=\overline{1,k_r}} \big\|\chi_{h_i^{(r)}}|y|\big\|_{Z_X}$$

и докажем, что она имеет подпоследовательность $\beta_{r_j} \to +0$ при $j \to \infty$. Обозначим через $i[r]$ индекс, на котором достигается максимум, и соответственно, $h[r] = h_{i[r]}^{(r)}$. По построению $\mathrm{mes}\, h[r] < \gamma_r \to +0$. Отсюда понятно, что последовательность функций $y_r = \chi_{h[r]}|y| \xrightarrow{\mu} 0$

(по мере) на множестве П. Тогда согласно теореме Ф. Рисса она имеет подпоследовательность $y_{r_j} \to +0$ п. в. на П. При этом по построению $0 \le y_{r_j} \le |y|$. Тогда по лемме 4.1 и условию $\mathbf{S}_2$) норма $\|y_{r_j}\|_{Z_X} \to +0$ при $j \to \infty$. Но это означает, что

$$\beta_{r_j} = \|y_{r_j}\|_{Z_X} \to +0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{4.2}$$

3. В силу (4.2) получаем, что для любого $\delta > 0$ найдется номер $j_\delta \in \mathbf{N}$ такой, что

$$m \cdot \ell \cdot \|A\| \cdot K_X \cdot \beta_{r_j}^{\alpha_X} < \delta \quad \text{для всех} \quad j \ge j_\delta.$$

Тогда в силу (4.1) $\|P_h A_{(y)} P_h\| < \delta$ для всех $h = H_i^{(r_j)} \setminus H_{i-1}^{(r_j)}$, $i = \overline{1, r_j}$, при $j = j_\delta$, т. е. система $\mathcal{T}^{r_{j_\delta}}$ является вольтерровской δ-цепочкой оператора $A_{(y)}$. □

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 4.3. *Пусть ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ для любого числа $\gamma > 0$ обладает γ-малой по мере вольтерровской цепочкой множеств. Тогда для каждого $y \in Z_X^{m\times\ell}$ оператор $A_{[y]} : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{Z}^m$, определяемый формулой $A_{[y]}[z] = yA[z]$, для любого $\delta > 0$ обладает вольтерровской δ-цепочкой.*

Непосредственно из лемм 4.2, 4.3 и замечания 2.1 получаем утверждение теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.2. Предположим от противного, что нашлось два решения $x_1, x_2 \in \mathcal{X}^\ell$ уравнения (0.1), отвечающих данному управлению $u \in \mathcal{U}^s$. Для сокращения записи примем обозначение

$$F[x] = \theta + A\big[f\big(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)\big)\big], \quad x \in \mathcal{X}^\ell.$$

Пользуясь леммой Адамара, рассмотрим приращение

$$\Delta x \equiv x_1 - x_2 = F[x_1] - F[x_2] = A\big[f\big(\cdot, x_1(\cdot), u(\cdot)\big) - f\big(\cdot, x_2(\cdot), u(\cdot)\big)\big] =$$
$$= A\left[\int_0^1 f'_y\big(\cdot, x_2 + \theta\Delta x, u\big)\, d\theta \cdot \Delta x\right] = A_{(z)}[\Delta x],$$

где $z = \int_0^1 f'_y(\cdot, x_2 + \theta\Delta x, u)\, d\theta$. Обозначим $x_* = \max\big\{|x_1|, |x_2|\big\}$. Нетрудно понять, что $x_* \in \mathcal{X}$. При этом очевидно $|z| \le z_*$, где

$$z_*(t) \equiv \max\big\{|f'_y(t, y, u)| : \quad y \in \mathbf{R}^\ell, |y| \le x_*(t)\big\}, \quad t \in \Pi.$$

По лемме 3.1 функция z_* измерима и более того, существует измеримая функция $x \in S^\ell(\Pi)$ такая, что $|x(t)| \le x_*(t)$ на П, $z_*(t) = \big|f'_y\big(t, x(t), u(t)\big)\big|$. Тогда по условию $\mathbf{F}_3$) имеем $z_* \in Z_X$, и в силу идеальности пространства Z_X, $|z| \in Z_X$, а следовательно, $z \in Z_X^{m\times\ell}$. Поэтому в силу теоремы 2.1 оператор $A_{(z)}$ обладает вольтерровской δ-цепочкой для любого $\delta > 0$. Далее будем считать, что $\delta = 2^{-1}$. Соответствующую цепочку обозначим как $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$.

Оставшуюся часть доказательства проведем в три этапа.

1. Докажем, что $P_{H_1}\Delta x = 0$. Для этого оценим норму

$$\|P_{H_1}\Delta x\| = \big\|P_{H_1}A_{(z)}[\Delta x]\big\| = \big\|P_{H_1}A_{(z)}P_{H_1}[\Delta x]\big\| \le$$
$$\le \big\|P_{H_1}A_{(z)}P_{H_1}\big\| \cdot \big\|P_{H_1}\Delta x\big\| \le \delta\big\|P_{H_1}\Delta x\big\| = \frac{1}{2}\big\|P_{H_1}\Delta x\big\|,$$

откуда $\big\|P_{H_1}\Delta x\big\| \le 0$.

2. Действуя по индукции, предположим, что для $i = \overline{1,j}$ уже доказано, что $P_{H_i}\Delta x = 0$. Докажем, что такое же утверждение справедливо и для $i = j+1$. Для краткости обозначим $H = H_j$, $h = H_{j+1} \setminus H_j$. Оценим норму

$$\big\|P_h\Delta x\big\| = \big\|P_h A_{(z)}[\Delta x]\big\| = \big\|P_h P_{H_{j+1}} A_{(z)}[\Delta x]\big\| = \\ = \big\|P_h P_{H_{j+1}} A_{(z)} P_{H_{j+1}}[\Delta x]\big\| = \big\|P_h A_{(z)}[P_H\Delta x + P_h\Delta x]\big\| = \\ = \big\|P_h A_{(z)}[P_h\Delta x]\big\| \le \big\|P_h A_{(z)} P_h\big\| \cdot \big\|P_h\Delta x\big\| \le \frac{1}{2}\big\|P_h\Delta x\big\|,$$

откуда $\big\|P_h\Delta x\big\| \le 0$, т.е. $P_h\Delta x = 0$. Но в таком случае согласно предположению индукции получаем $P_{H_{j+1}}\Delta x = P_H\Delta x + P_h\Delta x = 0$.

3. Таким образом, по индукции $\Delta x = P_{H_k}\Delta x = 0$. $\square$

5. Примеры

А) *Управляемая задача Гурса–Дарбу.* Вернемся к задаче (0.2), частично рассмотренной во введении. Как уже было показано, она может быть переформулирована в виде функционально-операторного уравнения (0.3). Далее будем считать, что $r < q$. Тогда в силу замечания 1.1 условия $\mathbf{S}_1)$–$\mathbf{S}_2)$ выполняются. Условия $\mathbf{F}_1)$–$\mathbf{F}_3)$ выполняются в качестве исходных предположений относительно задачи (0.2). За множества $\mathcal{D}$ и Θ возьмем конусные отрезки вида $\mathcal{D} = [\overline{u}, \widehat{u}]$, $\Theta = [\overline{\theta}, \widehat{\theta}]$.

Проверим выполнение условия $\mathbf{A}_2)$. Отметим, прежде всего, что для всякого $\tau \in [0,T]$, где $T = T_1 + T_2$, множества вида $H_\tau = \big\{t \in \Pi : t_1 + t_2 \le \tau\big\}$ являются вольтерровскими множествами оператора A. Действительно, для почти всех $t \in H_\tau$ значения оператора $A[z](t)$ зависят лишь от значений функции $z(\xi)$ при $\xi \in [0,t_1] \times [0,t_2] \subset H_\tau$. Таким образом, $P_{H_\tau} A P_{H_\tau} = P_{H_\tau} A$, т.е. $H_\tau \in \mathcal{B}(A)$ для всех $\tau \in [0,T]$.

Выберем произвольно $\tau', \tau'' \in [0,T]$, $\tau' < \tau''$, и положив $h = H_{\tau''} \backslash H_{\tau'}$ и $\sigma = \tau'' - \tau'$, оценим меру $\mathrm{mes}(h) < \sigma^2$. Таким образом, выбирая число $\sigma > 0$ из условия $\sigma^2 < \delta$, получаем, что $\mathcal{T} = \{H_{\tau_0}, \ldots, H_{\tau_k}\}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = T$, $\tau_i - \tau_{i-1} \le \sigma$, является вольтерровской δ-малой по мере цепочкой множеств оператора A при заданном (произвольно выбранном) $\delta > 0$, т.е. условие $\mathbf{A}_2)$ выполняется. Поскольку оператор A положительный, то он сам для себя является мажорантой: $B = A$, следовательно, условие $\mathbf{A}_1)$ выполняется по теореме 2.1. Предположим дополнительно, что функция f допускает поточечную оценку вида

$$\big|f(\cdot, y, v)\big| \le g\big(\cdot, |y|, |v|\big) \quad \forall y \in \mathbf{R}^\ell, \quad v \in \mathbf{R}^s,$$

где $g(t,y,v)$ — функция, неубывающая по $\{y, v\}$ и такая, что $g\big(\cdot, |x|, |u|\big) \in \mathcal{Z}$ при всех $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{D}$. Тогда условие (1.1) будет выполнено, если в качестве оператора G взять оператор

$$G[x] = \theta_* + A\big[g\big(\cdot, x(\cdot), u_*(\cdot)\big)\big], \quad \text{где} \quad \theta_* = \max\big\{|\overline{\theta}|, |\widehat{\theta}|\big\}, \quad u_* = \max\big\{|\overline{u}|, |\widehat{u}|\big\}.$$

Таким образом, применимы теоремы 1.1 и 2.2.

Б) *Смешанная задача для волнового уравнения*[5].

$$\mathcal{L}[x](t) = x''_{t_1t_1}(t) - c^2 x''_{t_2t_2}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in \Pi = (0,T_1] \times (0,T_2); \tag{5.1}$$

[5]Данный пример так же, как и предыдущий, носит иллюстративный характер. Однако применяемый способ рассуждений таков, что может быть распространен в основной своей части и на уравнения более общего вида. Уравнение указанного частного вида используем для простоты изложения, поскольку конкретный вид сужения разрешающего оператора A на пространство $\mathbf{C}^\infty$ позволяет здесь достаточно легко установить его положительность. Установление положительности разрешающего оператора или наличия у него положительной мажоранты в более общих случаях оказывается, соответственно, и более трудоемким.

$$\begin{cases} x(0,t_2)=\omega_1(t_2), \quad x'_{t_1}(0,t_2)=\omega_2(t_2), \quad t_2\in(0,T_2);\\ x(t_1,0)=x(t_1,T_2)=0, \qquad\qquad\qquad\quad t_1\in(0,T_1]. \end{cases} \tag{5.2}$$

Будем предполагать, что $\omega_1(\cdot)\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,T_2)$ и $\omega_2(\cdot)\in L_2(0,T_2)$, а функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$)–$\mathbf{F}_3$) при $\ell=m=1$, $\mathcal{X}=L_q(\Pi)$, $q\in(2,6)$, $\mathcal{Z}=L_2(\Pi)$, $\mathcal{U}=L_r(\Pi)$, $r\in[1,6)$. Что касается выбора пространств Z_X, Z_U, см. замечание 1.1.

Решение задачи (5.1), (5.2) будем понимать в указанном далее обобщенном смысле. Чтобы дать строгое определение и обосновать его корректность, для $z\in L_2(\Pi)$ рассмотрим, прежде всего, вспомогательное уравнение

$$\mathcal{L}[x](t)=z(t), \quad t\in\Pi, \tag{5.3}$$

в совокупности с начально-краевыми условиями (5.2). Для $x\in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Pi)$, $z\in L_2(\Pi)$, $\omega\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,T_2)\times L_2(0,T_2)$, $\varphi\in \overset{\circ}{D}_2(\Pi)$ положим

$$I_1[x,z,\omega,\varphi]=\int_0^{T_2}\omega_2(t_2)\varphi(0,t_2)dt_2+\int_\Pi\big\{x'_{t_1}\varphi'_{t_1}-c^2x'_{t_2}\varphi'_{t_2}+z\varphi\big\}dt,$$

$$I_2[x,\omega]=\lim_{\Delta\tau\to+0}\big\|x(\Delta\tau,\cdot)-\omega_1(\cdot)\big\|_{L_2(0,T_2)}, \quad I[x,z,\omega,\varphi]=\big\{I_1[x,z,\omega,\varphi],I_2[x,\omega]\big\}.$$

Следуя ([12], с. 126), *обобщенным решением задачи* (5.3), (5.2) для заданных $z\in L_2(\Pi)$, $\omega\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,T_2)\times L_2(0,T_2)$ назовем функцию $x\in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Pi)$, удовлетворяющую условию

$$I[x,z,\omega,\varphi]=0 \quad \text{для всех} \quad \varphi\in \overset{\circ}{D}_2(\Pi).$$

Соответственно, *обобщенным решением задачи* (5.1), (5.2) для заданных $u\in L_r(\Pi)$, $\omega\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,T_2)\times L_2(0,T_2)$ будем называть функцию $x\in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Pi)$, удовлетворяющую условию

$$I\big[x,f(\cdot,x,u),\omega,\varphi\big]=0 \quad \text{для всех} \quad \varphi\in \overset{\circ}{D}_2(\Pi).$$

Справедлива (см. [12], теорема 3.2.5, с. 150)

Лемма 5.1. *Для любых функций $z\in L_2(\Pi)$, $\omega\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,T_2)\times L_2(0,T_2)$ существует единственное обобщенное решение $x\in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Pi)$ задачи* (5.3), (5.2). *Для этого решения справедливо энергетическое неравенство*

$$\|x\|_{W^1_2(\Pi)}\le K\cdot\big\{\|\omega\|_{W^1_2(0,T_2)\times L_2(0,T_2)}+\|z\|_{L_2(\Pi)}\big\}.$$

Поскольку $\operatorname{Ker} I[\cdot,\varphi]$ — линейное множество для любого $\varphi\in \overset{\circ}{D}_2(\Pi)$, то из леммы 5.1 следует, что всякое решение задачи (5.3), (5.2) представляется в виде $x=\Theta[\omega]+A[z]$, где $\Theta:\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,T_2)\times L_2(0,T_2)\to \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Pi)$, $A:L_2(\Pi)\to \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Pi)$ — ЛОО. А именно, $\Theta[\omega]$ — это решение задачи (5.3), (5.2) при $z=0$, $A[z]$ — решение задачи (5.3), (5.2) при $\omega=0$. Соответственно, исходная задача становится эквивалентной операторному уравнению

$$x=\theta+A\big[f(\cdot,x,u)\big], \quad x\in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Pi), \tag{5.4}$$

где $\theta=\Theta[\omega]$ (начальные данные ω считаем фиксированными). Кроме того, принятое понятие обобщенного решения задачи (5.1), (5.2) оказывается корректным, поскольку накладываемые нами условия на правую часть уравнения согласованы со свойствами операторов A и Θ, вытекающими из леммы 5.1. Заметим, что $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(\Pi)\subset W^1_2(\Pi)$. В силу теоремы вложения С.Л. Соболева пространство $W^1_2(\Pi)$ ограниченно вложено в $L_\varkappa(\Pi)$ при любом

$1 \le \varkappa < q_n = \frac{2(n+1)}{n-1}$ $(n \ge 1)$. В нашем случае $n = 2$, следовательно, $q_n = 6$. Таким образом, в силу выбора q имеем ограниченное вложение $W_2^1(\Pi) \subset L_q(\Pi)$, и уравнение (5.4) эквивалентно уравнению

$$x = \theta + A\big[f(\cdot, x, u)\big], \quad x \in L_q(\Pi), \tag{5.5}$$

причем норма $\|A[z]\|_{L_q(\Pi)} \le M \cdot \|A[z]\|_{W_2^1(\Pi)}$, и согласно лемме 5.1 норма $\|A[z]\|_{W_2^1(\Pi)} \le K \cdot \|z\|_{L_2(\Pi)}$ для всех $z \in L_2(\Pi)$. Поэтому можно рассматривать оператор A как ЛОО $L_2(\Pi) \to L_q(\Pi)$. Уравнение (5.5) является уравнением вида (0.1) при указанном выборе пространств. Совершенно аналогично п. А) показывается, что все предположения относительно этого уравнения выполняются. Некоторое отличие составляет лишь проверка условия $\mathbf{A}_2$) и положительности оператора A. Поэтому остановимся на этом подробнее.

Для всех $\tau \in [0, T_1]$ положим $\Pi_\tau = \big\{t \in \Pi : t_1 \in [0, \tau]\big\}$. Так как везде выше можно было взять $\Pi = \Pi_\tau$ для любого $\tau \in [0, T_1]$, а всякое глобальное решение в сужении на Π_τ является также и Π_τ-локальным решением, то из леммы 5.1 очевидным образом вытекает

Лемма 5.2. *Если сужение* $z\big|_{\Pi_\tau} = 0$, *а* x *— решение задачи* (5.3), (5.2) *при* $\omega = 0$, *то* $x\big|_{\Pi_\tau} = 0$.

Непосредственно из леммы 5.2 получаем, что для $H = \Pi_\tau$ и оператора P_H умножения на характеристическую функцию χ_H множества H справедливо равенство $P_H A P_{\Pi\setminus H} = 0$. А в таком случае

$$P_H A = P_H A(P_H + P_{\Pi\setminus H}) = P_H A P_H + P_H A P_{\Pi\setminus H} = P_H A P_H,$$

т. е. $H = \Pi_\tau \in \mathcal{B}(A)$ для всех $\tau \in [0, T_1]$. Стало быть, система множеств $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\}$, где $H_i = \Pi_{\tau_i}$, $\tau_0 = 0$, $\tau_k = T_1$, $0 < \tau_i - \tau_{i-1} < \gamma$, $i = \overline{1,k}$, будет вольтерровской δ-малой по мере цепочкой множеств оператора $A : L_2(\Pi) \to L_q(\Pi)$ при условии, что $\gamma T_2 < \delta$. Таким образом, условие $\mathbf{A}_2$) выполняется.

Докажем положительность оператора A. Отметим, прежде всего, что поскольку A — ЛОО, а множество неотрицательных функций $L_2^+(\Pi)$ замкнуто в $L_2(\Pi)$, нам достаточно доказать, что $A[z] \ge 0$ для всех неотрицательных z из какого-либо всюду плотного подмножества в пространстве $L_2(\Pi)$, в частности, из множества $\mathbf{C}_0^\infty(\Pi)$ всех бесконечно гладких финитных на Π функций (см., например, [13], § 4.7). С другой стороны, для гладких функций $z \in \mathbf{C}_0^\infty(\Pi)$ $A[z]$ — это классическое решение задачи (5.3), (5.2) при $\omega = 0$, а оно, как известно, определяется формулой Даламбера[6]

$$A[z](t) = \frac{1}{2c}\int_{\Delta(t)} \widehat{z}(\xi)d\xi, \quad t \in \Pi,$$

где $\Delta(t) = \big\{\xi \in \mathbf{R}^2 : \xi_1 \in [0, t_1],\ t_2 - c(t_1 - \xi_1) \le \xi_2 \le t_2 + c(t_1 - \xi_1)\big\}$ — попадающая в полосу $[0, t_1] \times \mathbf{R}$ часть характеристического конуса волнового уравнения (5.3) с вершиной t, а $\widehat{z}(\xi)$ — четное с периодом $2T_2$ по переменной ξ_2 периодическое продолжение на всю полосу $[0, T_1] \times \mathbf{R}$ функции $z(\xi)$, заданной на множестве Π. Отсюда понятно, что если $z \ge 0$, то и $\widehat{z} \ge 0$, а стало быть, и $A[z] \ge 0$. Таким образом, для всех $z \in \mathbf{C}_0^\infty(\Pi)$, $z \ge 0$ имеем $A[z] \ge 0$. Как видно из доказательства теоремы ([13], § 4.7), всякая неотрицательная функция $z \in L_2(\Pi)$

[6]На самом деле можно показать, что эта формула останется справедливой и в случае $z \in L_2(\Pi)$, и тогда положительность оператора A очевидна. Используем здесь более универсальный способ рассуждений, применимый и для уравнений более общего вида.

может быть представлена в виде предела последовательности неотрицательных функций $\{z_k\} \subset \mathbf{C}_0^\infty(\Pi)$. Но в таком случае
$$\big\|A[z] - A[z_k]\big\|_{L_2} \leq \|A\| \cdot \|z - z_k\|_{L_2} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$
причем $A[z_k] \geq 0$. Поскольку из сходимости по норме в L_2 следует сходимость по мере, а из сходимости по мере — существование подпоследовательности, сходящейся п. в., то отсюда $A[z] \geq 0$ для всех $z \in L_2^+(\Pi)$. Дальнейшие выводы аналогичны выводам п. A).

Литература

[1] Сумин В.И. *Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами*, ДАН СССР **305** (5), 1056–1059 (1989).

[2] Сумин В.И. *Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **30** (1), 3–21 (1990).

[3] Сумин В.И. *Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами.* Ч. I (ННГУ, Н. Новгород, 1992).

[4] Сумин В.И. *О функциональных вольтерровых уравнениях*, Изв. вузов. Математика, № 9, 67–77 (1995).

[5] Сумин В.И. *Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах*, Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. матем. модел. и оптим. управ. (Изд-во ННГУ, Н. Новгород, 1998), Вып. 2, 138–151.

[6] Сумин В.И., Чернов А.В. *О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений*, Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. матем. модел. и оптим. управ. (Изд-во ННГУ, Н. Новгород, 2003), Вып. 1, 39–49.

[7] Сумин В.И., Чернов А.В. *Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений*, ВИНИТИ, № 1198-В00 (Нижегородск. гос. ун-т, 2000).

[8] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1984).

[9] Сумин В.И., Чернов А.В. *Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность*, Дифференц. уравнения **34** (10), 1402–1411 (1998).

[10] Мордухович Б.Ш. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления* (Наука, М., 1988).

[11] Пугачев В.С. *Лекции по функциональному анализу* (МАИ, М., 1996).

[12] Ладыженская О.А. *Смешанная задача для гиперболического уравнения* (ГИТТЛ, М., 1953).

[13] Федоров В.М. *Курс функционального анализа* (Лань, СПб., 2005).

А.В. Чернов

доцент, кафедра математической физики,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950,

`e-mail:` chavnn@mail.ru

A.V. Chernov

Associate Professor, Chair of Mathematical Physics,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod, 603950 Russia,

`e-mail:` chavnn@mail.ru