Л. В. Канторович, И. Г. Глобенко, Динамическая модель экономики,
Докл. АН СССР, 1967, том 176, номер 5, 997–998

Доклады Академии наук СССР
1967. Том 176, № 5

УДК 330.115 МАТЕМАТИКА

Академик Л. В. КАНТОРОВИЧ, И. Г. ГЛОБЕНКО

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ

1. В работе ([1]) была рассмотрена однопродуктовая модель экономики и использована для исчисления нормы эффективности. Уточнение анализа может идти по пути ведения ряда отраслей и продуктов. В данной работе, сохраняя макроэкономический характер модели, мы вводим два продукта и два подразделения, следуя в этом схеме К. Маркса. Принимается, что продукция первого подразделения служит источником фондов для обоих подразделений, продукция второго подразделения расходуется на потребление. Условия производства, выражаемые производственной функцией, не предполагаются одинаковыми для обоих подразделений. Обозначим K_1, K_2 — фонды первого и второго подразделений; P_1, P_2 — чистую продукцию первого и второго подразделений. Предполагаем данными производственные функции U_1 и U_2. Тогда

$$P_1 = U_1[K_1, T_1], \quad P_2 = U_2[K_2, T_2],$$

где T_1, T_2 — объемы ресурсов труда, используемых соответственно в первом и втором подразделениях. При этом: $T_1 + T_2 = T$ — объемы ресурсов труда, определяемые, например, демографической функцией; функции $U_i(x,y)$ $(i = 1, 2)$ — положительно однородные первого порядка дважды дифференцируемые, причем

$$U_i'(x, 1) > 0, \quad U_i''(x, 1) < 0 \quad (i = 1, 2), \quad 0 < x < +\infty,$$
$$U_i(0, 1) = U_i(1, 0) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Потребление $V(t)$ задано априори или представляет известную функцию параметров системы, а накопление (продукт первого подразделения P_1) делится между первым и вторым подразделениями.

Делается следующая гипотеза: фонды в каждом подразделении допускают мгновенную превращаемость, но в другое подразделение не переносятся, поэтому объем фондов в данном подразделении уменьшаться не может. Трудовые ресурсы допустимо перемещать.

Таким образом, имеем соотношения:

$$T_1 + T_2 = T; \tag{1}$$
$$U_2(K_2, T_2) = V(t); \tag{2}$$
$$K_1' + K_2' = U_1(K_1, T_1). \tag{3}$$

Далее, неперемещаемость фондов дает требование $K_1(t)$, $K_2(t)$ — неубывающие функции.

Наконец, дифференциальная оптимизация требует выполнения условия равноэффективного распределения труда и фондов

$$\frac{\partial U_1}{\partial K_1}\frac{\partial U_2}{\partial T_2} = \frac{\partial U_1}{\partial T_1}\frac{\partial U_2}{\partial K_2}, \quad \text{если } K_1' > 0, \quad K_2' > 0. \tag{4}$$

Величина нормы эффективности определяет прирост продукции на единицу добавочных капиталовложений в единицу времени и равна

$$n_э = \partial P_1 / \partial K_1.$$

Имеют место следующие случаи интегрируемости:

1) $U_1(K_1, T_1) = K_1^{\alpha} T_1^{1-\alpha}$, $U_2 = K_2^{\beta} T_2^{1-\beta}$ — случай Cobb — Douglas'a.

2) $U_1(K_1, T_1) = a_1K_1 + b_1T_1$, $U_2(K_2, T_2) = a_2K_2 + b_2T_2$.

Отметим, что если $T_2(t)$ задано, то определено и $K_2(t)$, и мы оказываемся в ситуации однопродуктовой модели (1). Также к однопродуктовой модели сводится и случай, когда функции U_1, U_2 тождественны.

2. По теореме Эйлера имеем

$$\frac{\partial U_1}{\partial K_1}K_1 + \frac{\partial U_1}{\partial T_1}T_1 = U_1, \quad \frac{\partial U_2}{\partial K_2}K_2 + \frac{\partial U_2}{\partial T_2}T_2 = U_2.$$

На основании соотношений (2), (3) находим

$$\frac{\partial U_1}{\partial K_1}K_1' + \frac{\partial U_1}{\partial T_1}T_1' = U_{1t}', \quad \frac{\partial U_2}{\partial K_2}K_2' + \frac{\partial U_2}{\partial T_2}T_2' = V'(t), \quad K_1' + K_2' = U_1.$$

Отсюда, пользуясь еще (4), получаем формулу

$$n_э = \frac{V(U_1T_1' - U_{1t}'T_1) + U_1(VT_2' - V'T_2)}{V(k_1T' - U_1T_1) + V'(K_2T_1 - K_1T_2)},$$

которая в случае Cobb — Donglas'а принимает вид

$$n_э = \alpha U_1 / K_1.$$

В случае учета технического прогресса выражение для $n_э$ принимает вид

$$n_э = \frac{P_2(P_1T_1' - P_{1t}'T_1 + \rho_1P_1T_1) + P_1(P_2T_2' - P_{2t}'T_2 + \rho_2P_2T_2)}{P_2(K_1T' - P_1T_1) + (P_{2t}' - \rho_2P_2)(K_2T_1 - K_1T_2)},$$

где $P_1 = e^{\rho_1 t}U_1(K_1, T_1)$, $P_2 = e^{\rho_2 t}U_2(K_2, T_2)$, $\rho_1, \rho_2 \geqslant 0$.

3. Предположим, что существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} T_1/T = a \neq 0; \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty} T'/T = \lambda; \tag{6}$$

$$\lim_{t\to\infty} V(t)/T(t) = b. \tag{7}$$

Если выполнены (5) — (7), то можно показать, что $b < +\infty$. Далее, возможны следующие случаи:

1) Прямая $y = \lambda x$ и кривая $y = U_1(x - c_2, a)$ пересекаются в двух точках $c_0 < c_1$ (c_2 — корень уравнения $b = U_2(x, 1 - a)$, $c_2 \leqslant x < +\infty$).

Имеют место формулы

$$\lim_{t\to\infty} K_2/T = c_2; \tag{8}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K_1}{T} = \begin{cases} \text{a)}\ c_0 - c_2, \\ \text{b)}\ c_1 - c_2. \end{cases} \tag{9}$$

При этом, если существует константа $c > c_0$ такая, что найдутся сколь угодно далекие значения t, для которых $s(t) \geqslant c$, то имеет место a), в противном случае b).

2) Прямая $y = \lambda x$ и кривая $y = U_1(x - c_2, a)$ имеют одну общую точку. В этом случае имеют место формулы (8) и (9), при этом случаи a) и b) совпадают.

3) Прямая $y = \lambda x$ и кривая $y = U_1(x - c_2, a)$ не имеют общих точек. В этом случае, начиная с некоторого момента времени, K_1 и K_2 становятся отрицательными, и модель теряет экономический смысл.

Если выполнены (5) — (7), то имеют место асимптотические формулы

$$\lim_{t\to\infty} n_э = U_1'\left(\frac{c_0 - c_2}{a}, 1\right) \quad \text{если имеет место a);}$$

$$\lim_{t\to\infty} n_э = U_1'\left(\frac{c_1 - c_2}{a}, 1\right), \quad \text{если имеет место b).}$$

Функция U_1' означает $U_{1x}'(x, 1)$.

Поступило
18 VII 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, И. Г. Глобенко, ДАН, 174, № 3 (1967).