



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Ватульян, А. В. Наседкин, А. С. Скалиух, Колебания консольной пьезо-керамической пластины с гофрированной прокладкой, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1993, том 34, выпуск 4, 118–123

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.220.255.141

5 ноября 2024 г., 04:02:28



8. Heck O. S. Über der Stabilität orthotroper elliptischer Zylinderschalen bei reiner Biegung // Luftfahrtforschung.— 1937.— Bd 14, N 3.
9. Коновалов Ю. В. Изгиб бесконечной цилиндрической оболочки // ПММ.— 1940.— Т. 4, № 5, 6.
10. Wood J. D. The flexure of uniformly pressurized, circular, cylindrical shell // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.— 1958.— V. 25, N 4.
11. Reissner E. On finite bending of pressurized tubes // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.— 1959.— V. 26, N 3.
12. Костовецкий Д. Л. Изгиб кривых тонкостенных труб в области больших упругих перемещений // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение.— 1960.— № 3.
13. Аксельрад Э. Л. Изгиб тонкостенных стержней при больших упругих перемещениях // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение.— 1964.— № 3.
14. Boyle J. T. The finite bending of curved pipes // Intern. J. Solids Struct.— 1981.— V. 17, N 5.
15. Кузнецов В. В., Соиников Ю. В. Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 1.
16. Timoshenko S. Bending stresses in curved tubes of rectangular cross-section // Trans. ASME.— 1923.— V. 45, N 1893.

г. Новосибирск

Поступила 16/VI 1992 г.

УДК 539.3 : 541

А. О. Ватульян, А. В. Наседкин, А. С. Скалух

КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С ГОФРИРОВАННОЙ ПРОКЛАДКОЙ

Получены средние за период лагранжианы планарных и изгибных колебаний трехслойного консольного прямоугольного пьезорезонатора с гофрированной металлической прокладкой. Для вычисления собственных частот применен метод конечных элементов.

Существенное улучшение характеристик электромеханических преобразователей может быть достигнуто за счет использования элементов с различными свойствами. Так, можно попытаться повысить эффективность работающего на поперечном пьезоэффекте преобразователя, если включить в него пассивную в электрическом смысле гофрированную прокладку. Однако строгий теоретический расчет такого пьезорезонатора до настоящего времени не выполнен.

В данной работе предлагается приближенный метод определения собственных и вынужденных колебаний консольно закрепленного прямоугольного трехслойного пьезокерамического преобразователя с гофрированной металлической прокладкой.

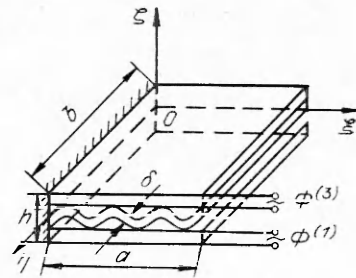
Рассмотрим прямоугольный трехслойный пакет, два крайних слоя которого выполнены из поляризованной по толщине пьезокерамики с электродриванными лицевыми поверхностями. Примем, что в середине пакета находится тонкая гофрированная вдоль одной из сторон в форме синусоиды металлическая пластинка, жестко сцепленная с пьезокерамическими слоями. Весь пакет крепится консольно так, как показано на рисунке.

Отнесем пьезопреобразователь к декартовой системе координат $O\xi\eta\zeta$, выбрав ось $O\xi$ и $O\eta$ в серединной плоскости преобразователя, а ось $O\zeta$ — в направлении поляризации пьезокерамических пластинок (см. рисунок). Пусть преобразователь имеет размеры $a \times b \times h$, причем толщины пьезокерамических слоев одни и те же и равны $2h_1$, а полная высота гофрированной прокладки равна $2h_0$. Таким образом, $h = 2(h_0 + 2h_1)$.

Введем безразмерные координаты по формулам

$$\xi = ax, \quad \eta = ay, \quad \zeta = hz$$

и обозначим через $u_x^{(j)}(x, y, z)$, $u_y^{(j)}(x, y, z)$, $u_z^{(j)}(x, y, z)$ перемещения в j -м слое, а через $\Phi^{(k)}(x, y, z)$ ($k=1, 3$) — потенциал в крайних слоях (индекс $j=1$ относится к нижнему слою, $j=2$ — к среднему, $j=3$ — к верхнему).



Считая малой толщину h преобразователя по сравнению с характерными размерами a и b , а также более жесткими крайние пьезокерамические слои в сравнении со средней гофрированной прокладкой, примем следующие гипотезы:

1) нормальные напряжения $\sigma_{zz}^{(j)}$ много меньше напряжений $\sigma_{xx}^{(j)}$ и $\sigma_{yy}^{(j)}$, $j=1, 2, 3$;

2) предполагается цилиндрический изгиб, т. е. все функции не зависят от y и $u_y^{(j)}=0$, $j=1, 2, 3$;

3) перемещения $u_z^{(j)}$ являются одними и теми же для всего пакета и зависят лишь от координаты x , т. е. $u_z^{(j)}=\tilde{w}(x)$, $j=1, 2, 3$;

4) перемещения $u_x^{(j)}$ в каждом слое различны и подчиняются гипотезе ломаной нормали [1]:

$$u_x^{(j)} = u_{cx}^{(j)} + z_j \psi_j, \quad j=1, 2, 3.$$

Здесь $u_{cx}^{(j)} = u_{cx}^{(j)}(x)$ — смещения срединных плоскостей j -х слоев в направлении оси x ; z_j — координата z местной системы координат с началом в середине j -го слоя; $\psi_1 = \psi_3 = -\tilde{w}_x/a$ — угол поворота нормали в пьезокерамических слоях; ψ_2 — функция от x ;

5) составляющая электрической индукции $D_x^{(k)}$ вдоль оси x пренебрежимо мала, т. е. $D_x^{(k)}=0$, $k=1, 3$;

6) среднюю гофрированную прокладку, согласно [2], можно заменить эквивалентной ортотропной пластиной, эффективные характеристики которой находятся из условий равенства перемещений и углов поворота при приложении к соответствующим образом вырезанным элементам одинаковых усилий и моментов.

Сформулированные гипотезы по обычной для многослойных пьезокерамических пластин схеме [3, 4] позволяют определить компоненты напряжений и деформаций только через функции $u_{cx}^{(1)}$, $u_{cx}^{(3)}$ и \tilde{w} .

Отметим, что, поскольку эффективные характеристики заменяющей гофр ортотропной пластины для деформаций растяжения и изгиба различны, поля перемещений также следует разделить на части, описывающие растяжения и изгиб. Это удается сделать, введя функции

$$u = u_{cx}^{(1)} + u_{cx}^{(3)}, \quad v = u_{cx}^{(1)} - u_{cx}^{(3)}.$$

Тогда функция u будет описывать растяжение преобразователя, а функции v и \tilde{w} — его изгиб.

Предположим теперь, что колебания преобразователя вызываются разностями потенциалов $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(3)}$ между верхними и нижними электродами нижнего (1) и верхнего (3) слоя соответственно, причем $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(3)}$ изменяются по гармоническому закону $\exp(i\omega t)$. Таким образом, исследуется задача об установившихся колебаниях преобразователя. Как это часто делается для подобных задач, будем для амплитудных функций применять те же самые обозначения. Например, если $\Phi^{(1)} = \tilde{\Phi}^{(1)} \exp(i\omega t)$, то далее вместо $\tilde{\Phi}^{(1)}$ используем обозначение $\Phi^{(1)}$ и т. п.

В соответствии с указанным выше общую задачу об установившихся колебаниях преобразователя следует разделить на задачу о планарных колебаниях (Π) и на задачу об изгибных колебаниях (Π). После ряда преобразований можно получить формулы для кинетических K_Π , K_Π и потенциальных W_Π , W_Π осредненных за период энергий преобразователя

ля при планарных и изгибных колебаниях:

$$K_{\Pi} = \kappa \Omega^2 \int_0^1 \gamma_{k1}^{\Pi} u^2 dx,$$

$$K_{\Pi} = \kappa \Omega^2 \int_0^1 (\gamma_{k1}^{\Pi} v^2 + 2\gamma_{k2}^{\Pi} v w_{,x} + \gamma_{k3}^{\Pi} w_{,x}^2 + \gamma_{k4}^{\Pi} w^2) dx,$$

$$W_{\Pi} = \kappa \int_0^1 (\gamma_{w1}^{\Pi} u_{,x}^2 + \Phi_{\Pi} u_{,x}) dx,$$

$$W_{\Pi} = \kappa \int_0^1 (\gamma_{w1}^{\Pi} v_{,x}^2 + \gamma_{w2}^{\Pi} v^2 + 2\gamma_{w3}^{\Pi} v_{,x} w_{,xx} + 2\gamma_{w4}^{\Pi} v w_{,x} + \gamma_{w5}^{\Pi} w_{,xx}^2 + \gamma_{w6}^{\Pi} w_{,x}^2 + \Phi_{\Pi} v_{,x}) dx,$$

где

$$\kappa = \frac{b h c_{11}}{4a}; \quad \Omega = \omega a \sqrt{\frac{\rho_k}{c_{11}}}; \quad w = \frac{\tilde{w}}{a};$$

$$\Phi_{\Pi} = \tilde{a} \frac{B_{32}}{c_{11}} (\Phi^{(1)} + \Phi^{(3)}); \quad \Phi_{\Pi} = \tilde{a} \frac{B_{32}}{c_{11}} (\Phi^{(1)} - \Phi^{(3)});$$

$$\gamma_{k1}^{\Pi} = 2\tilde{h}_1 + \tilde{h}_0 \tilde{\rho}_r;$$

$$\gamma_{k1}^{\Pi} = 2\tilde{h}_1 + \frac{1}{3} \tilde{h}_0 \tilde{\rho}_r; \quad \gamma_{k2}^{\Pi} = -\frac{2}{3} \tilde{h}_0 \tilde{h}_1 \tilde{\rho}_r;$$

$$\gamma_{k3}^{\Pi} = \frac{4}{3} \tilde{h}_1^2 \gamma_{k1}^{\Pi}; \quad \gamma_{k4}^{\Pi} = 4\tilde{a}^2 \gamma_{k1}^{\Pi};$$

$$\gamma_{w1}^{\Pi} = 2\tilde{h}_1 Q_{11} + \tilde{h}_0 H_{11}^{\Pi};$$

$$\gamma_{w1}^{\Pi} = 2\tilde{h}_1 Q_{11} + \frac{1}{3} \tilde{h}_0 H_{11}^{\Pi}; \quad \gamma_{w2}^{\Pi} = \frac{1}{2} \tilde{a} \frac{a}{\tilde{h}_0} a_{55}^{\Pi};$$

$$\gamma_{w3}^{\Pi} = -\frac{2}{3} \tilde{h}_0 \tilde{h}_1 H_{11}^{\Pi}; \quad \gamma_{w4}^{\Pi} = -\tilde{a}^2 \left(1 + \frac{h_1}{\tilde{h}_0}\right) a_{55}^{\Pi};$$

$$\gamma_{w5}^{\Pi} = \frac{4}{3} \tilde{h}_1^2 (2\tilde{h}_1 Q_{11} + \tilde{h}_0 H_{11}^{\Pi}); \quad \gamma_{w6}^{\Pi} = 2\tilde{h}_0 \left(1 + \frac{h_1}{\tilde{h}_0}\right)^2 \tilde{a}^2 a_{55}^{\Pi};$$

$$\tilde{a} = \frac{a}{h}; \quad \tilde{h}_0 = \frac{h_0}{h}; \quad \tilde{h}_1 = \frac{h_1}{h};$$

$$Q_{11} = (R_{11} + B_{32}^2/B_{31})/c_{11};$$

$$a_{55}^{\Pi} = A_{55}^{\Pi}/c_{11}; \quad \tilde{\rho}_r = \rho_{0r}/\rho_k;$$

$$R_{11} = c_{11} - c_{13}^2/c_{33};$$

$$B_{31} = e_{33} + e_{33}^2/c_{33}; \quad B_{32} = e_{31} - e_{33}c_{13}/c_{33};$$

$$H_{11}^{\Pi} = D_{11}^c/c_{11}; \quad H_{11}^{\Pi} = D_{11}^{\Pi}/c_{11};$$

$$D_{11}^{\Pi} = A_{11}^{\Pi} - (A_{13}^{\Pi})^2/A_{33}^{\Pi}; \quad \bar{D}_{11}^{\Pi} = A_{11}^{\Pi} - (A_{13}^{\Pi})^2/A_{33}^{\Pi}.$$

В приведенных формулах c_{1m} , e_{1m} и e_{1m} — стандартные [5] обозначения для упругих модулей, диэлектрических проницаемостей и пьезоэлектрических постоянных соответственно; ρ_k — плотность пьезокерамики; A_{1m} — упругие модули ортотропного материала [6]; D_{1m} — жесткости ортотропного материала для плоского напряженного состояния. Верхние индексы Π и γ A_{1m} и D_{1m} означают характеристики растяжения и изгиба. Для этих задач модули различны и имеют вид

$$D_{11}^{\Pi} = \frac{E}{k_2 \bar{D}}, \quad D_{13}^{\Pi} = \nu D_{11}^{\Pi}, \quad D_{33}^{\Pi} = \frac{k_1 E}{D},$$

$$D_{11}^{\Pi} = \frac{E}{k_3 \bar{D}}, \quad \bar{D}_{13}^{\Pi} = \nu \bar{D}_{11}^{\Pi}, \quad D_{33}^{\Pi} = \frac{k_1 E}{D}, \quad D_{55}^{\Pi} = A_{55}^{\Pi} = E/k_0.$$

Здесь

$$D = 1 - \frac{\nu^2}{k_1 k_2}; \quad k_0 = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \sqrt{1 - k^2} \left[K(k) + \frac{4}{\varepsilon^2 \gamma^2} (K(k) - (1 - 4\gamma^2) E(k)) \right];$$

$$k_1 = \frac{2\varepsilon}{\pi} \sqrt{1 - k^2} K(k);$$

$$k_2 = \frac{2}{\pi\varepsilon} \left[\sqrt{1 - k^2} K(k) + \frac{1}{\varepsilon^2 k^2 \sqrt{1 - k^2}} ((1 - k^2) K(k) + (2k^2 - 1) E(k)) \right];$$

$$k_3 = \frac{2}{\pi\varepsilon^2} \sqrt{1 - k^2} K(k); \quad k_4 = \varepsilon^4 k_2; \quad \varepsilon = \frac{\delta}{2h_0}; \quad k^2 = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}; \quad \gamma = \frac{2\pi h_0}{l};$$

$K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; l — длина одного периода синусоидального гофра; δ — его толщина; E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала гофра.

Наконец,

$$\rho_{0r} = \frac{\delta E(k)}{\pi h_0 \sqrt{1 - k^2}} \rho_r$$

(ρ_r — плотность материала гофра).

Отметим, что при изменении направления гофрировки средней прокладки на направление вдоль оси y коэффициенты $D_{11}^{n,u}$ и $D_{13}^{n,u}$ следует поменять местами, а A_{55}^n положить равным $E/(2(1 + \nu))$. Все же остальные соотношения при этом остаются справедливыми.

Для получения уравнений движения теперь удобно воспользоваться принципом возможных перемещений для установившихся колебаний:

$$\delta L_{n,u} = 0,$$

где $L_{n,u} = K_{n,u} - W_{n,u}$ и вариации δu , δv и δw должны быть подчинены главным граничным условиям

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad w_{,x} = 0, \quad x = 0.$$

В результате как для планарных, так и для изгибных колебаний будем иметь линейные одномерные краевые задачи, которые можно разрешить в замкнутом виде. Для нахождения собственных частот в них достаточно положить Φ_n и $\Phi_{,n}$ равными нулю и решать задачи на собственные значения.

Так, собственные частоты ω_m^n ($m = 1, 2, \dots$) планарных колебаний будут определяться формулой

$$\omega_m^n = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{c_{11} \gamma_{w1}^{11}}{\rho_k \gamma_{h1}^{11}}} \left(m - \frac{1}{2} \right), \quad m = 1, 2, \dots$$

Однако получаемые в замкнутой форме точные решения задачи об изгибных колебаниях являются достаточно громоздкими и не совсем удовлетворительными с вычислительной точки зрения. Это связано с тем, что, как и обычно в динамических задачах электроупругости [5], здесь требуется определять комплексные корни бикубического уравнения и, кроме того, надлежащим образом нормировать комплекснозначные гиперболические функции и находить нули комплексного определителя шестого порядка. По этим причинам созданная на основе точного решения программа для ЭВМ получилась недостаточно эффективной. Гораздо более экономичным и точным оказался метод конечных элементов (МКЭ) для решения вариационной задачи $\delta L_n = 0$. Поскольку в данной задаче экстремум функционала L_n ищется в классе функций v и w , удовлетворяющих условиям

$$v \in W_2^1[0, 1], \quad v(0) = 0, \quad w \in W_2^2[0, 1], \quad w(0) = w_{,x}(0) = 0,$$

Таблица 1

m	Точное решение	МКЭ	МКЭ
		(M=4)	(M=10)
$\omega_m^{\text{II}} \cdot 10^{-6}$, рад/с			
1	0,01794	0,01797	0,01795
2	0,07601	0,07646	0,07604
3	0,1641	0,1659	0,1643
4	0,2602	0,2647	0,2604

Таблица 2

m	N			
	5	10	15	20
$\omega_m^{\text{II}} \cdot 10^{-6}$, рад/с				
1	0,01498	0,01644	0,01740	0,01797
2	0,05611	0,06395	0,07093	0,07646
3	0,1167	0,1364	0,1524	0,1659
4	0,1986	0,2210	0,2440	0,2647

то удобной конечно-элементной аппроксимацией являются квадратичные лагранжевы элементы для v и кубические эрмитовые элементы для w [7]. Разработанная на основе таких конечно-элементных аппроксимаций программа оказалась исключительно эффективной как по быстродействию, так и по точности и мобильности. Заметим, что нахождение собственных частот Ω^{II} изгибных колебаний по МКЭ сводится к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[A]\{v\} = (\Omega^{\text{II}})^2 [B]\{v\}.$$

Здесь $\{v\}$ — вектор-столбец «узловых перемещений» v , w и w_x ; матрицы масс $[B]$ и жесткости $[A]$ положительно определены и симметричны. Данная задача решалась численным методом, основанным на преобразованиях Хаусхолдера в сочетании с QL -алгоритмом [8].

В табл. 1 приведены первые четыре собственные частоты ω_m^{II} ($m = 1, 2, 3, 4$) изгибных колебаний преобразователя, рассчитанные по программам, основанным на точном решении и на конечно-элементной аппроксимации (M — число конечных элементов). Входные данные для табл. 1 следующие: материал пьезослоев — керамика ЦТС-19, материал гофрированной прокладки — алюминий, $a = 0,02$ м, $h = 0,002$ м, $2h_1 = 0,0005$ м, толщина синусоиды гофра $\delta = 0,0001$ м, гофрировка вдоль длины a , число гофринок $N = a/l = 20$.

Из табл. 1 видно, что МКЭ дает очень хорошую точность определения собственных частот даже при малом числе элементов. Кроме того, расчеты по МКЭ требуют меньше машинного времени и устойчивы к изменениям входных данных.

Отметим, что первые собственные частоты планарных колебаний ω_m^{II} на порядок выше соответствующих собственных частот изгибных колебаний ω_m^{II} . Так, при тех же входных данных, что и для табл. 1, $\omega_1^{\text{II}} = 0,2405 \cdot 10^6$ рад/с, $\omega_2^{\text{II}} = 0,7216 \cdot 10^6$ рад/с. Заметим, что наибольшее практическое значение имеют лишь первые две собственные частоты преобразователя, и по этой причине роль планарных колебаний мало-существенна.

Табл. 2 иллюстрирует зависимость рассчитанных по МКЭ при $M = 4$ собственных частот ω_m^{II} изгибных колебаний от числа N гофринок, направленных вдоль длины консоли. Видно, что с увеличением N собственные частоты возрастают. Эту тенденцию можно объяснить увеличением жесткости системы.

Итак, описанная методика и разработанные программы позволяют эффективным образом определять собственные частоты и другие параметры колебательных процессов в консольно закрепленном прямоугольном пьезопреобразователе с гофрированной прокладкой. Меняя входные данные, можно оптимизировать параметры преобразователя с целью получения его наилучших характеристик.

Изложенный здесь метод может быть обобщен и на иные пластинчатые одномерные или осесимметричные пьезопреобразователи с мягкими пассивными прокладками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных пластин.— М.: Машиностроение, 1973.
2. Андреева Л. У. Упругие элементы приборов.— М.: Машиностроение, 1981.
3. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость/ Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.— Киев: Наук. думка, 1989.
4. Ватульян А. О., Лалицкая Н. Б., Наседкин А. В. и др. Об управлении формой секционированной пьезокерамической полупассивной пластины.— Ростов-на-Дону, 1991.— Деп. в ВИНТИ 23.05.91, № 2121—В91.
5. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.— М.: Наука, 1988.
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977.
7. Молчанов И. Н., Николенко Л. Д. Основы метода конечных элементов.— Киев: Наук. думка, 1989.
8. Варлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы.— М.: Мир, 1983.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 17/VI 1992 г.

УДК 539.376

В. С. Наместников

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Качество той или иной теории ползучести оценивается степенью соответствия предсказываемого ею поведения материала, наблюдаемого в экспериментах. Наиболее рельефно разница в теориях ползучести и их качестве проявляется при использовании путей нагружения, которые можно было бы назвать «контрастными», таких как ступенчатое нагружение, реверсирование нагрузки, резкая смена вида напряженного состояния и т. п. Существующие теории ползучести не в состоянии предсказать многие эффекты, обнаруживаемые в поведении материала при контрастных нагружениях. Примером может служить поведение материала при ступенчатом нагружении с возрастающим напряжением. Результаты практически всех известных экспериментов при таком нагружении показывают, что вслед за ступенчатым увеличением напряжения скорость ползучести резко возрастает и порядок ее величины фактически тот же, что и в начальный момент ползучести.

Попытки описать поведение материала при ступенчатом изменении напряжения предпринимались неоднократно [1—4]. Однако к результату, адекватному экспериментальным фактам, это не приводило.

При ступенчатом увеличении напряжения (рис. 1) в момент времени t_+ от σ_1 до σ_2 , согласно теории упрочнения, нужно участок $A''B$ кривой ползучести, соответствующей напряжению σ_2 , сдвинуть вдоль оси абсцисс до совпадения точек A'' и A' . Экспериментальные точки при этом располагаются выше кривой $A'B'$, если напряжения не превышают предел упругости [5], т. е. гипотеза упрочнения дает заниженный по сравнению с экспериментом результат.

Это обстоятельство привело к мысли передвигать в точку A' не отрезок $A''B$, а отрезок AB (до совпадения точки A с точкой A'), что послужило введению в качестве меры упрочнения вместо деформации ползучести p параметра $q = \int \sigma dp$ [1]. К аналогичному перестроению кривых ползучести при ступенчатом изменении напряжения приводит вариант определяющих уравнений в [3], и поэтому степень соответствия экспериментальным данным остается практически той же, что и в [1]. Оба варианта не годятся при напряжениях, превышающих предел упру-