



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

P. Z. Mkrtychyan, On the solvability of the first boundary value problem for quasilinear elliptic equations of a higher order degenerating with respect to the arguments, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1980, Volume 96, 187–204

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

February 19, 2025, 07:31:45



О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА,
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПО НЕЗАВИСИМЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Настоящая работа посвящена обобщению результатов работы [1] на случай уравнений высокого порядка и неоднородных граничных условий.

Именно, для некоторых классов квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка, допускающих вырождение, характер которого определяется некоторой "матрицей" A , определенной в § 1, доказана теорема существования обобщенного решения u задачи Дирихле, такого, что $(u - f) \in \dot{H}_p^m(A, \Omega)$, где $f(x)$ - продолжение граничных условий в область Ω , а $\dot{H}_p^m(A, \Omega)$ - пространство, определенное в § 1.

Приведены условия, при которых решение является единственным.

Доказательство проводится методами теории монотонных операторов, ведущей свое начало от работ Ф. Браудера и Г. Минти (см. например, [5][6]).

В невырожденном случае соответствующие результаты для некоторых классов квазилинейных эллиптических уравнений были получены О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральной [7].

Заметим, что в настоящей работе вырождение допускается лишь на множестве меры нуль. Краевая задача для квазилинейных уравнений 2-ого порядка с неотрицательной характеристической формой, допускающих вырождение на множестве произвольной меры изучена в работе А.В. Иванова [8].

В § 1 введены пространства $\dot{H}_p^m(A, \Omega)$ и доказаны некоторые их свойства, используемые в дальнейшем. В § 2 доказана теорема о разрешимости задачи Дирихле. В последующих параграфах приведены достаточные условия выполнимости требований, наложенных на операторы, соответствующие краевой задаче, именно, выписаны условия роста функций, входящих в дифференциальное уравнение, алгебраические критерии выполнимости условий коэрцитивности, дефинитности и полуограниченности вариации, а также приведен пример оператора с дефинитной вариацией.

§ 1. Пространство $\dot{H}_p^m(A, \Omega)$

Пусть Ω - ограниченная область в R^n , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ - целочисленные мультииндексы.

Для произвольного "вектора" $\bar{\xi} = \{\xi_\beta : \xi_\beta \in \mathbb{R}, |\beta| = m\}$ определим отображение $A\bar{\xi}$ равенствами

$$A\bar{\xi} = \{A_\alpha \bar{\xi} : |\alpha| = m\}, \quad A_\alpha \bar{\xi} = \sum_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \xi_\beta, \quad (I.1)$$

где $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x)$ - измеримые в Ω функции и

$$a_{\alpha\beta} \in L_{p_\alpha}(\Omega), |\beta| = m, p_\alpha > 1, |\alpha| = m. \quad (I.2)$$

Пусть, кроме того, отображение A обратимо для п.в. $x \in \Omega$, и для элементов $b_{\beta\alpha}(x), |\beta| = |\alpha| = m$ "матрицы" $B = A^{-1}$, определяемых из равенств

$$\xi_\beta = \sum_{|\alpha|=m} b_{\beta\alpha} A_\alpha \bar{\xi}, \quad |\beta| = m \quad (I.3)$$

выполнены условия

$$b_{\beta\alpha} \in L_{r_{\beta\alpha}}(\Omega), r_{\beta\alpha} \in (1, \infty], |\beta| = |\alpha| = m. \quad (I.4)$$

Обозначим

$$q_\beta = \min_{|\alpha|=m} \left\{ \frac{r_{\beta\alpha} p_\alpha}{r_{\beta\alpha} + p_\alpha} \right\}, \quad |\beta| = m. \quad (I.5)$$

Для всех мультииндексов $\beta, |\beta| \leq m$ определим числа q_β^* следующим образом:

$$q_\beta^* = q_\beta \quad \text{при } |\beta| = m. \quad (I.6)$$

При $|\beta| < m$ числа q_β^* определим из следующих условий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{q_\beta^*} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q_{\beta+\gamma}^*} - 1 \right), \quad \text{если } \sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q_{\beta+\gamma}^*} > 1 \\ q_\beta^* &= \infty, \quad \text{если } \sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q_{\beta+\gamma}^*} \leq 1 \end{aligned} \right\} (I.7)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА I.I. Пусть выполнены условия (I.2)-(I.7). Тогда для любой функции $u \in \dot{C}^m(\Omega)$ и любого мультииндекса $\beta, |\beta| \leq m-1$ справедливы неравенства:

$$\|D^\beta u\|_{q_\beta, \Omega} \leq C_{1\beta} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{q_\alpha, \Omega} \leq C_{2\beta} \sum_{|\alpha|=m} \|A^\alpha u\|_{p_\alpha, \Omega}, \quad (I.8)$$

где $q_\beta < q_\beta^*$ при $\sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q_{\beta+\gamma}^*} > 1$, $q_\beta < \infty$ при $\sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q_{\beta+\gamma}^*} = 1$
 $q_\beta = \infty$ при $\sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q_{\beta+\gamma}^*} < 1$, $C_{1\beta}, C_{2\beta}$ - положительные константы

$D^m u \equiv \{D^\alpha u : |\alpha| = m\}$ При $q_\beta = \infty$ под нормой $\|\cdot\|_{q_\beta, \Omega}$ подразумеваются норма $\|\cdot\|_{C(\Omega)}$.

Из равномерной ограниченности величин $\sum_{|\alpha|=m} \|A^\alpha D^m u_k\|_{p_\alpha, \Omega}$ для некоторого семейства функций $\{u_k\} \subset \overset{\circ}{C}^m(\Omega)$ следует компактность семейства $\{D^\beta u_k\}$ в пространстве $L_{q_\beta}(\Omega)$ для любого $\beta, |\beta| \leq m-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО правого неравенства (I.8) просто. Действительно, пусть $|\alpha| = m$. Тогда в силу (I.3)

$$D^\alpha u = \sum_{|\gamma|=m} b_{\alpha\gamma} A_\gamma D^m u, \quad (I.9)$$

$$\|D^\alpha u\|_{q_\alpha, \Omega} \leq C \sum_{|\gamma|=m} \left(\int_\Omega |b_{\alpha\gamma}|^{q_\alpha} |A_\gamma D^m u|^{q_\alpha} dx \right)^{\frac{1}{q_\alpha}}, \quad C > 0. \quad (I.10)$$

Применяя к интегралу в правой части (I.10) неравенство Гельдера с показателем p_γ/q_α при $p_\gamma > q_\alpha$ и оценивая функции $b_{\alpha\gamma}$ через максимум их модуля при $p_\gamma = q_\alpha$ (в этом случае $\zeta_{\alpha\gamma} = \infty$), докажем правое неравенство (I.8).

Левое неравенство и остальные утверждения теоремы являются простыми следствиями результатов работы [2] (см. леммы I.2, 3, теорему 3 работы [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Если все $q_\beta, |\beta| = m$ равны между собой, то показатели $q_\beta, |\beta| \leq m-1$ подсчитываются по теореме вложения С.Л.Соболева.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}^m_{\bar{p}}(A, \Omega)$ замыкание множества функций $\overset{\circ}{C}^m(\Omega)$ по норме

$$\|u\| \equiv \sum_{|\alpha|=m} \|A_\alpha D^m u\|_{p_\alpha, \Omega} \quad (I.11)$$

Выполнение аксиом нормы очевидно. В частности, то, что из следует $u = 0$, вытекает из неравенств (I.8).

Очевидно, что $\overset{\circ}{H}^m_{\bar{p}}(A, \Omega)$ - сепарабельное банахово пространство.

Из леммы I.I и определения пространства $\overset{\circ}{H}^m_{\bar{p}}(A, \Omega)$ вытекает

ЛЕММА I.2. Пусть выполнены условия леммы I. Тогда для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}^m_{\bar{p}}(A, \Omega)$ существуют обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $D^\beta u, |\beta| \leq m$, причем справедливы неравенства (I.8).

Из равномерной ограниченности величин $\|u_k\|$ для любого

семейства $\{u_k\} \subset \overset{\circ}{H}_p^m(A, \Omega)$ следует компактность семейства $\{D^\beta u_k\}$ в пространстве $L_{q, p}(\Omega)$ для любого $\beta, |\beta| \leq m-1$.

ЛЕММА 1.3. Пространство $\overset{\circ}{H}_p^m(A, \Omega)$ рефлексивно. Всякий линейный функционал \mathcal{F} в пространстве $\overset{\circ}{H}_p^m(A, \Omega)$ можно представить в виде

$$\langle \mathcal{F}, \eta \rangle = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} f_{\alpha} D^{\alpha} \eta \, dx, \quad \eta \in \overset{\circ}{H}_p^m(A, \Omega),$$

где "вектор"-функция $\bar{f} = \{f_{\alpha} : |\alpha|=m\}$ такова, что

$$B^* \bar{f} \in \prod_{|\alpha|=m} L_{p'_{\alpha}}(\Omega), \quad \text{то есть } B_{\alpha}^* \bar{f} = \sum_{|\beta|=m} b_{\beta\alpha} f_{\beta} \in L_{p'_{\alpha}}(\Omega),$$

где $\frac{1}{p_{\alpha}} + \frac{1}{p'_{\alpha}} = 1$ (*), матрица $B = A^{-1}$ определена соотношениями (1.3), B^* - "матрица", сопряженная к B .

Для нормы $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{F}}$ функционала \mathcal{F} справедливо неравенство

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{F}} \leq \sum_{|\alpha|=m} \|B_{\alpha}^* \bar{f}\|_{p'_{\alpha}, \Omega}. \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\pi(u) = AD^m u$ является линейной изометрией пространства $\overset{\circ}{H}_p^m(A, \Omega)$ на замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства $\prod_{|\alpha|=m} L_{p_{\alpha}}(\Omega)$. Но любое замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства рефлексивно.

Пусть \mathcal{F} - линейный функционал в пространстве $\overset{\circ}{H}_p^m(A, \Omega)$. Тогда $\mathcal{F} \circ \pi^{-1}$ есть линейный функционал в пространстве $\pi(\overset{\circ}{H}_p^m(A, \Omega)) \subset \prod_{|\alpha|=m} L_{p_{\alpha}}(\Omega)$. По теореме Хана-Банаха такой функционал можно продолжить с сохранением нормы на все пространство $\prod_{|\alpha|=m} L_{p_{\alpha}}(\Omega)$. Общий же вид линейного функционала в последнем пространстве определяется формулой:

$$\varphi(\bar{v}) = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} h_{\alpha} v_{\alpha} \, dx, \quad \bar{v} = \{v_{\alpha} : v_{\alpha} \in L_{p_{\alpha}}(\Omega), |\alpha|=m\} \in \prod_{|\alpha|=m} L_{p_{\alpha}}(\Omega)$$

где $\bar{h} = \{h_{\alpha} : h_{\alpha} \in L_{p'_{\alpha}}(\Omega), |\alpha|=m\} \in \prod_{|\alpha|=m} L_{p'_{\alpha}}(\Omega)$.

Пусть $\varphi = \mathcal{F} \circ \pi^{-1}$. Тогда для любого $\eta \in \overset{\circ}{H}_p^m(A, \Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}, \eta \rangle &= (\mathcal{F} \circ \pi^{-1})(\pi(\eta)) = \varphi(AD^m \eta) = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} h_{\alpha} A_{\alpha} D^m \eta \, dx = \\ &= \int_{\Omega} (\bar{h}, AD^m \eta) \, dx = \int_{\Omega} (A^* \bar{h}, D^m \eta) \, dx, \end{aligned}$$

* Здесь и далее для любого числа $p \geq 1$ через p' будем обозначать сопряженное число, определяемое равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Если $p = \infty$, то $p' = 1$ и наоборот.

где A^* - "матрица", сопряженная к матрице A , (\cdot, \cdot) - скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве. Обозначив $A^*h = \bar{f}$, то есть $f_p = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha p} h_\alpha$, учитывая, что $B^* = A^{*-1}$, получим требуемое представление функционала \mathcal{F} .

Для доказательства оценки (I.12) заметим, что

$$\langle \mathcal{F}, \eta \rangle = \int_{\Omega} (B^* \bar{f}, A D^m \eta) dx.$$

Применяя неравенство Гельдера, докажем (I.12). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2. Пусть функции $f_p \in L_{q_p}(\Omega)$, $|\beta| \leq m$, где числа q_p удовлетворяют условиям леммы I.1. Тогда интеграл

$$\int_{\Omega} f_p D^\beta \eta dx, \quad \eta \in \dot{H}_p^m(A, \Omega)$$

определяет некоторый линейный функционал \mathcal{F} в $\dot{H}_p^m(A, \Omega)$, причем для нормы $\|\mathcal{F}\|_*$ функционала \mathcal{F} справедливо неравенство

$$\|\mathcal{F}\|_* \leq C_{2p} \|f\|_{q_p, \Omega},$$

где C_{2p} - положительная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя неравенство Гельдера и учитывая неравенства (I.8), справедливые для любой функции $\eta \in \dot{H}_p^m(A, \Omega)$, докажем утверждение.

§ 2. Теорема о разрешимости задачи Дирихле

Рассмотрим в области Ω краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{L}_\alpha(x, D^\gamma u) &= 0 \\ D^\omega u|_{\partial\Omega} &= f_\omega(x'), \quad x' \in \partial\Omega, \quad |\omega| \leq m-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь α, ω, γ - целочисленные мультииндексы, причем γ пробегает всевозможные значения $|\gamma| \leq m$, m - целое число, $m \geq 1$.

Относительно функций $f_\omega(x')$, заданных на границе $\partial\Omega$ области Ω , будем предполагать выполненным следующее

УСЛОВИЕ I. Существует функция $f(x)$, определенная в области Ω , имеющая обобщенные производные $D^\gamma f$, $|\gamma| \leq m$, причем

$$\left. \begin{aligned} \sum_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\beta f &\in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad |\alpha|=m \\ D^\omega f &\in L_{q_\omega}(\Omega), \quad |\omega| \leq m-1 \\ D^\omega f|_{\partial\Omega} &= f_\omega, \quad |\omega| \leq m-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где функции $a_{\alpha\beta}$ и числа ρ_α, q_ω удовлетворяют условиям леммы I.I.

Относительно функций $\mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\gamma)$, $|\alpha| \leq m$ будем предполагать выполненным следующее

УСЛОВИЕ II. Функции $\mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\gamma)$, $|\alpha| \leq m$, определенные для $x \in \Omega$, $\xi_\gamma \in R$, $|\gamma| \leq m$, удовлетворяют условию Каратеодори (то есть эти функции измеримы по $x \in \Omega$ при любых $\xi_\gamma \in R$, $|\gamma| \leq m$ и непрерывны по $\xi_\gamma \in R$, $|\gamma| \leq m$ при п.в. $x \in \Omega$). Кроме того, при любых $\xi_\gamma(x)$, $|\gamma| \leq m$ таких, что $\xi_\gamma \in L_{q_\gamma}(\Omega)$ при $|\gamma| \leq m-1$ и $\sum_{|\gamma|=m} a_{\alpha\gamma} \xi_\gamma \in L_{\rho_\alpha}(\Omega)$ при $|\alpha|=m$, где числа q_γ, ρ_α удовлетворяют условиям леммы I.I, выполняются условия

$$\left. \begin{aligned} \sum b_{\beta\alpha} \mathcal{L}_\beta(x, \xi_\gamma(x)) &\in L_{\rho'_\alpha}(\Omega), \quad |\alpha|=m \\ \mathcal{L}_\beta(x, \xi_\gamma(x)) &\in L_{q'_\beta}(\Omega), \quad |\beta| \leq m-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

При условии II в силу леммы I.3 и замечания I.2 при фиксированном $v \in H_{\bar{p}}^m(A, \Omega)$ интеграл

$$\langle \mathcal{L}v, \eta \rangle \equiv \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{L}_\alpha(x, D^\alpha(\psi + v)) D^\alpha \eta \, dx, \quad (2.4)$$

где ψ удовлетворяет условию I, порождает линейный непрерывный функционал $\mathcal{L}v$ относительно $\eta \in H_{\bar{p}}^m(A, \Omega)$. Таким образом, формула (2.4) определяет нелинейный оператор \mathcal{L} , отображающий пространство $H_{\bar{p}}^m(A, \Omega)$ в сопряженное пространство $(H_{\bar{p}}^m(A, \Omega))^*$. Через $\langle \mathcal{L}v, \eta \rangle$ обозначено значение функционала $\mathcal{L}v$ на элементе η .

Обобщенным решением задачи (2.1) назовем функцию $u = \psi + v$ где функция ψ удовлетворяет условию I, а функция $v \in H_{\bar{p}}^m(A, \Omega)$ и является решением уравнения

$$\mathcal{L}v = 0 \quad (2.5)$$

Очевидно, что функция u будет удовлетворять интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{L}_\alpha(x, D^\alpha u) D^\alpha \eta \, dx = 0 \quad (2.6)$$

при любой функции $\eta \in H_{\bar{p}}^m(A, \Omega)$

Докажем, что оператор \mathcal{L} непрерывен. Для этого рассмотрим операторы

$$M_\alpha : \prod_{|\beta| \leq m} L_{q_\beta}(\Omega) \longrightarrow L_{\rho'_\alpha}(\Omega), \quad |\alpha|=m,$$

$$M_\alpha: \prod_{|\beta| \leq m} L_{q_\beta}(\Omega) \longrightarrow L_{q'_\alpha}(\Omega), \quad |\alpha| \leq m-1,$$

определенные соотношениями

$$(M_\alpha \vec{\xi})(x) \equiv \sum_{|\beta|=m} b_{\beta\alpha} \mathcal{L}_\beta(x, \xi_\beta(x)) \quad \text{при } |\alpha|=m$$

$$(M_\alpha \vec{\xi})(x) \equiv \mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\alpha(x)) \quad \text{при } |\alpha| \leq m-1,$$

где $\vec{\xi} = \{\xi_\gamma: \xi_\gamma \in L_{q_\gamma}(\Omega), |\gamma| \leq m\}$, то есть $\vec{\xi} \in \prod_{|\beta| \leq m} L_{q_\beta}(\Omega)$.

Из условия II следует, что функции

$$(x, \vec{\xi}) \longrightarrow \sum_{|\beta|=m} b_{\beta\alpha}(x) \mathcal{L}_\beta(x, \xi_\beta), \quad |\alpha|=m$$

$$(x, \vec{\xi}) \longrightarrow \mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\alpha) \quad |\alpha| \leq m-1$$

удовлетворяют условию Каратеодори. Тогда, перерабатывая соответствующим образом рассуждения, приведенные в [4] (стр. 29-41) в связи с изучением оператора Немыцкого, можно доказать непрерывность и ограниченность операторов $M_\alpha, |\alpha| \leq m$.

Пусть последовательность $v_k \rightarrow v$ при $k \rightarrow \infty$ в $H_P^m(A, \Omega)$, $u_k = \xi + v_k, u = \xi + v$. По лемме I.2 $\|D^\gamma u_k - D^\gamma u\|_{q_\gamma, \Omega} = \|D^\gamma v_k - D^\gamma v\|_{q_\gamma, \Omega} \rightarrow 0$ для всех $|\gamma| \leq m$. Учитывая лемму I.3 и замечание I.2, можно получить

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}v_k - \mathcal{L}v\|_x &\leq \sum_{|\alpha|=m} \left\| \sum_{|\beta|=m} b_{\beta\alpha} (\mathcal{L}_\beta(x, D^\gamma u_k) - \mathcal{L}_\beta(x, D^\gamma u)) \right\|_{q'_\alpha, \Omega} \\ &+ \sum_{|\alpha| \leq m-1} C_{2\alpha} \|\mathcal{L}_\alpha(x, D^\gamma u_k) - \mathcal{L}_\alpha(x, D^\gamma u)\|_{q'_\alpha, \Omega}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.7) и непрерывности и ограниченности операторов $M_\alpha, |\alpha| \leq m$ следует непрерывность и ограниченность оператора \mathcal{L} .

Тогда из теоремы Ф. Браудера вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия I и II и, кроме того, УСЛОВИЕ III (коэрцитивность). Существует такое число $\rho_0 > 0$, что для любого $v \in H_P^m(A, \Omega)$, для которого $\|v\| = \rho_0$, справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq 0 \quad (2.8)$$

УСЛОВИЕ IV. (полуограниченность вариации) При любом $\rho > 0$ для любых $v, \eta \in H_P^m(A, \Omega)$ таких, что $\|v\| \leq \rho, \|\eta\| \leq \rho$, справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{L}v - \mathcal{L}\eta, v - \eta \rangle \geq -\mu(\rho, \|v - \eta\|), \quad (2.9)$$

где функция $\mu(\rho, \sigma)$ неотрицательна, непрерывна и такова, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{\mu(\rho, \sigma \tau)}{\sigma} = 0 \quad (2.10)$$

при любых $\rho \geq 0, \tau \geq 0$, а $\|\cdot\|'$ - норма, компактная по сравнению с $\|\cdot\|$.

Тогда уравнение (2.5) имеет хотя бы одно решение U , и, следовательно, функция $u = f + U$ является решением задачи (2.1).

Несколько необычная форма условия коэрцитивности связана с тем, что в данной работе рассматриваются уравнения, приведенные к виду $\mathcal{L}u = 0$. В удобном для нас виде теорема Ф. Браудера приведена с доказательством в работе [1] (теорема I.1).

§ 3. Достаточные условия выполнимости условия II

ЛЕММА 3.1. Пусть функции $\mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\gamma)$, $|\alpha| \leq m$ удовлетворяют условию Каратеодори и для п.в. $x \in \Omega$ и произвольных $\xi_\gamma \in R$, $|\gamma| \leq m$ выполнены неравенства

$$\left. \begin{aligned} |B_\alpha^* \bar{\mathcal{L}}(x, \xi_\gamma)| &\leq \mu(\xi) \left(\sum_{|\beta|=m} |A_\beta \bar{\xi}| \frac{p_\beta}{R_\alpha} + \sum_{\substack{|\gamma| \leq m-1 \\ q_\gamma < \infty}} |\xi_\gamma| \frac{q_\gamma}{R_\alpha} + \Psi_\alpha(x) \right), |\alpha|=m \\ \mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\gamma) &\leq \mu(\xi) \left(\sum_{|\beta|=m} |A_\beta \bar{\xi}| \frac{p_\beta}{q_\alpha} + \sum_{\substack{|\gamma| \leq m-1 \\ q_\gamma < \infty}} |\xi_\gamma| \frac{q_\gamma}{q_\alpha} + \Psi_\alpha(x) \right), |\alpha| \leq m-1 \end{aligned} \right\} (3.1)$$

где $\mu(\xi)$ - непрерывная неотрицательная функция, зависящая от тех $\xi_\gamma, |\gamma| \leq m-1$, для которых $q_\gamma = \infty$; $\Psi_\alpha \in L_{p'_\alpha}(\Omega)$ при $|\alpha|=m$, $\Psi_\alpha \in L_{q'_\alpha}(\Omega)$ при $|\alpha| \leq m-1$, $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\alpha : |\alpha|=m\}$, $\bar{\xi} = \{\xi_\gamma : |\gamma|=m\}$.

Тогда будет выполнено условие II.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. утверждения очевидно.

Легко показать, что первые из неравенств (3.1) эквивалентны неравенству

$$\|(\bar{\mathcal{L}}(x, \xi_\gamma), \bar{\eta})\| \leq \mu(\xi) \sum_{|\alpha|=m} \left(\sum_{|\beta|=m} |A_\beta \bar{\xi}| \frac{p_\beta}{R_\alpha} + \sum_{\substack{|\gamma| \leq m-1 \\ q_\gamma < \infty}} |\xi_\gamma| \frac{q_\gamma}{q_\alpha} + \Psi_\alpha \right) |A_\alpha \bar{\eta}|$$

при произвольном $\bar{\eta} = \{\eta_\beta : |\beta|=m\}$, где

$$(\bar{\mathcal{L}}, \bar{\eta}) = \sum_{|\beta|=m} \mathcal{L}_\beta \eta_\beta$$

Последним обозначением мы будем пользоваться и ниже.

§ 4. Алгебраические критерии выполнимости условия
коэрцитивности

ЛЕММА 4.1. Пусть для любых $\xi_\beta \in R$, $|\beta| \leq m$ выполнены неравенства

$$\left. \begin{aligned} & (\bar{\mathcal{L}}(x, \xi_\beta), \bar{\xi}) \geq \sum_{|\beta|=m} K_\beta |A_\beta \bar{\xi}|^{p_\beta} - \sum_{|\beta| \leq m-1} \tilde{K}_\beta |\xi_\beta|^{l_\beta} - |\Psi(x)| \\ & |B_\alpha^* \bar{\mathcal{L}}(x, \xi_\beta)| \leq K \left(\sum_{|\beta|=m} |A_\beta \bar{\xi}|^{\frac{p_\beta}{q_\alpha}} + \sum_{|\beta| \leq m-1} |\xi_\beta|^{\frac{l_\beta}{q_\alpha}} + |\Psi_\alpha(x)| \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

при $|\alpha| = m$ и

$$\left. \begin{aligned} & \mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\beta) \xi_\alpha \geq K_\alpha |\xi_\alpha|^{q_\alpha} - \left(\sum_{|\beta|=m} K_{\beta\alpha} |A_\beta \bar{\xi}|^{\frac{p_\beta}{q_\alpha}} + \sum_{|\beta| \leq m-1} K_{\beta\alpha} |\xi_\beta|^{\frac{l_\beta}{q_\alpha}} + |\Psi_\alpha(x)| \right) |\xi_\alpha| \\ & |\mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\beta)| \leq K \left(|\xi_\alpha|^{q_\alpha-1} + \sum_{|\beta|=m} |A_\beta \bar{\xi}|^{\frac{p_\beta}{q_\alpha}} + \sum_{|\beta| \leq m-1} |\xi_\beta|^{\frac{l_\beta}{q_\alpha}} + |\tilde{\Psi}_\alpha(x)| \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

при $|\alpha| \leq m-1$, где $K_\alpha > 0$ при $|\alpha| = m$, $K_\alpha \geq 0$ при $|\alpha| \leq m-1$, $K \geq 0$, $K_\alpha \geq 0$, $K_{\beta\alpha} \geq 0$; $1 < p_\beta \leq q_\beta$ при $|\beta| \leq m-1$; показатели l_β таковы, что для каждого β или 1) существует такой мультииндекс $\gamma(\beta)$, $|\gamma(\beta)| \leq m-|\beta|-1$, что $l_\beta < \tilde{l}_\beta = p_\beta + \gamma(\beta)$, $K_{\beta+\gamma(\beta)} > 0$ или 2) $l_\beta < \tilde{l}_\beta = p = \min \{p_\alpha\}$; $\Psi \in L_1(\Omega)$, $\Psi_\alpha \in L_{p_\alpha}(\Omega)$, если $|\alpha| = m$, $\Psi_\alpha \in L_{q_\alpha}(\Omega)$, если $|\alpha| \leq m-1$; $\tilde{\Psi}_\alpha \in L_{q_\alpha}(\Omega)$ при $|\alpha| \leq m-1$, числа $p_\beta, |\beta| = m, q_\beta, |\beta| \leq m-1$ удовлетворяют условиям леммы I.1.

Тогда оператор \mathcal{L} коэрцитивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $u \in \dot{H}_p^m(A, \Omega)$

и $\alpha, |\alpha| \leq m-1$ введем обозначения

$$\Omega_+^\alpha(u) = \{x : x \in \Omega, D^\alpha(f+u)D^\alpha u > 0\}$$

$$\Omega_-^\alpha(u) = \{x : x \in \Omega, D^\alpha(f+u)D^\alpha u \leq 0\}$$

где функция f удовлетворяет условию I.

Сразу заметим, что

$$|D^\alpha u| \leq |D^\alpha f| \quad \text{при } x \in \Omega_-^\alpha(u), |\alpha| \leq m-1 \quad (4.3)$$

Всюду ниже через ε , возможно, с индексами, будем обозначать произвольно малую положительную константу, а через K_ε также, возможно, с индексами, достаточно большую положительную константу.

Пусть мультииндекс $\beta, |\beta| \leq m-1$ таков, что выполнено условие I) леммы. Тогда, используя нужное число раз известные

неравенства

$\int_{\Omega} |u|^l dx \leq C \int_{\Omega} |u_{x_i}|^l dx, i=1, \dots, n, C > 0$, справедливые для любой функции $u \in \dot{W}_l^1(\Omega)$, неравенства Гельдера и Юнга, нетрудно получить для любой функции $u \in \dot{H}_p^m(A, \Omega)$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} |D^{\beta} u|^{\tilde{p}} dx &\leq C \int_{\Omega} |D^{\beta+\gamma(\beta)} u|^{p_{\beta+\gamma(\beta)}} dx, C > 0 \\ \int_{\Omega} |D^{\beta} u|^{l_p} dx &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |D^{\beta+\gamma(\beta)} u|^{p_{\beta+\gamma(\beta)}} dx + K_{\varepsilon} \end{aligned} \right\} (4.4)$$

Если же мультииндекс β таков, что выполнено условие 2) леммы, то для любой функции $u \in \dot{H}_p^m(A, \Omega)$, пользуясь неравенствами Гельдера и Юнга и учитывая неравенства (I.8), получаем

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} |D^{\beta} u|^{\tilde{p}} dx &\leq C \|u\|^p, C > 0 \\ \int_{\Omega} |D^{\beta} u|^{l_p} dx &\leq \varepsilon \|u\|^p + K_{\varepsilon} \end{aligned} \right\} (4.5)$$

Для произвольной функции $u \in \dot{H}_p^m(A, \Omega)$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u, u \rangle &\equiv \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{L}_{\alpha}(x, D^{\alpha}(f+u)) D^{\alpha} u dx = \\ &= \int_{\Omega} (\bar{\mathcal{L}}(x, D^{\alpha}(f+u)), D^m(f+u)) dx - \int_{\Omega} (\bar{\mathcal{L}}(x, D^{\alpha}(f+u)), D^m f) dx + \\ &+ \sum_{|\alpha| \leq m-1} \left[\int_{\Omega_{+}^{\alpha}(u)} \mathcal{L}_{\alpha}(x, D^{\alpha}(f+u)) D^{\alpha} u dx + \int_{\Omega_{+}^{\alpha}(u)} \mathcal{L}_{\alpha}(x, D^{\alpha}(f+u)) D^{\alpha} u dx \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Учитывая условия леммы, неравенства

$$\left. \begin{aligned} |a + b|^q &\leq 2^{q-1} (|a|^q + |b|^q) \\ |a + b| &\geq 2^{1-q} (|a|^q - |b|^q) \end{aligned} \right\} (4.7)$$

справедливые при любых a, b для $q \geq 1$, неравенства (4.3)–(4.5) и используя неравенства Юнга и Гельдера с соответствующими показателями, оценим интегралы правой части (4.6).

Для первого интеграла получим следующую оценку снизу:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\bar{\mathcal{L}}(x, D^{\alpha}(f+u)), D^m(f+u)) dx &\geq \int_{\Omega} \left(\sum_{|\beta|=m} K_{\beta} |A_{\beta} D^m(f+u)|^{p_{\beta}} - \sum_{|\beta| \leq m-1} \tilde{K}_{\beta} |D^{\beta}(f+u)|^{l_{\beta}} \right. \\ &\left. - |v| \right) dx \geq \int_{\Omega} \left(\sum_{|\beta|=m} 2^{1-p_{\beta}} K_{\beta} (|A_{\beta} D^m u|^{p_{\beta}} - |A_{\beta} D^m f|^{p_{\beta}}) - \sum_{|\beta| \leq m-1} 2^{l_{\beta}-1} K_{\beta} (|D^{\beta} u| + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + |D^{\beta} \varphi|^{l_{\beta}} - |\Psi| dx \geq \sum_{|\beta|=m} 2^{1-P_{\beta}} K_{\beta} \int_{\Omega} |A_{\beta} D^m u|^{P_{\beta}} dx - \\
 & - \varepsilon \|u\|^P - \varepsilon \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-1 \\ K_{\alpha} > 0}} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^{P_{\alpha}} dx - K_{\varepsilon} .
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Второй интеграл правой части (4.6) оценим сверху:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\Omega} (\bar{L}(x, D^r(\varphi+u)), D^m \varphi) dx \right| = \left| \int_{\Omega} (B^* \bar{L}(x, D^r(\varphi+u)), A D^m \varphi) dx \right| \leq \\
 & \leq \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |B_{\alpha}^* \bar{L}(x, D^r(\varphi+u))| |A_{\alpha} D^m \varphi| dx \leq \varepsilon_1 \sum_{|\beta|=m} \int_{\Omega} |A_{\beta} D^m u|^{P_{\beta}} dx + \\
 & + \varepsilon_1 \sum_{|\beta| \leq m-1} \int_{\Omega} |D^{\beta} u|^{l_{\beta}} dx + K_{\varepsilon_1} \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \int_{\Omega} |A_{\beta} D^m u|^{P_{\beta}} dx + \\
 & + \varepsilon \sum_{\substack{|\beta| \leq m-1 \\ K_{\beta} > 0}} \int_{\Omega} |D^{\beta} u|^{P_{\beta}} dx + \varepsilon \|u\|^P + K_{\varepsilon} .
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Для оценки третьего интеграла правой части (4.6) заметим, что если $\xi_{\alpha} \eta_{\alpha} > 0$, то умножая обе части первого из неравенств (4.2) на $\frac{\eta_{\alpha}}{\xi_{\alpha}} = \frac{|\eta_{\alpha}|}{|\xi_{\alpha}|}$, получим для любого α , $|\alpha| \leq m-1$

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha}(x, \xi_{\alpha}) \eta_{\alpha} & \geq K_{\alpha} |\xi_{\alpha}|^{P_{\alpha}-1} |\eta_{\alpha}| - \left(\sum_{|\beta|=m} K_{\beta \alpha} |A_{\beta} \xi|^{P_{\beta}} + \right. \\
 & \left. + \sum_{|\beta| \leq m-1} K_{\beta \alpha} |\xi_{\beta}|^{l_{\beta}} + |\Psi_{\alpha}| \right) |\eta_{\alpha}| .
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Учитывая (4.10) и (4.3), для любого α , $|\alpha| \leq m-1$ и любой функции $u \in H_{\bar{P}}^m(A, \Omega)$ получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{+}^{\alpha}(u)} L_{\alpha}(x, D^r(\varphi+u)) D^{\alpha} u dx \geq \int_{\Omega_{+}^{\alpha}(u)} [K_{\alpha} |D^{\alpha}(\varphi+u)|^{P_{\alpha}-1} |D^{\alpha} u| - \\
 & - \sum_{|\beta|=m} K_{\beta \alpha} |A_{\beta} D^m(\varphi+u)|^{P_{\beta}} + \sum_{|\beta| \leq m-1} K_{\beta \alpha} |D^{\beta}(\varphi+u)|^{l_{\beta}} + |\Psi_{\alpha}|] |D^{\alpha} u| dx \geq \\
 & \int_{\Omega_{+}^{\alpha}(u)} 2^{2-P_{\alpha}} K_{\alpha} |D^{\alpha} u|^{P_{\alpha}} dx - \left[\int_{\Omega} 2^{2-P_{\alpha}} |D^{\alpha} \varphi|^{P_{\alpha}-1} |D^{\alpha} u| + \sum_{|\beta|=m} \varepsilon |A_{\beta} D^m u|^{P_{\beta}} + \right. \\
 & \left. + \sum_{|\beta| \leq m-1} \varepsilon |D^{\beta} u|^{l_{\beta}} + K_{\varepsilon} |D^{\alpha} u|^{l_{\alpha}} \right] dx - \left(\int_{\Omega} |\Psi_{\alpha}|^{q'_{\alpha}} dx \right)^{\frac{1}{q'_{\alpha}}} \left(\int_{\Omega} |D^{\alpha} \varphi|^{q_{\alpha}} dx \right)^{\frac{1}{q_{\alpha}}} .
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$-K_{2\epsilon} \geq 2^{2-p\alpha} K_\alpha \int_{\Omega} |D^\alpha u|^{p_\alpha} dx - \epsilon \|u\|^p - \epsilon \sum_{\substack{|\beta| \leq m-1 \\ K_\beta > 0}} \int_{\Omega} |D^\beta u|^{p_\beta} dx - \\ - \epsilon \sum_{|\beta|=m} \int_{\Omega} |A_\beta D^m u|^{p_\beta} dx - K_\epsilon.$$

При оценке четвертого интеграла правой части (4.6) опять учитывая (4.3), получаем для всех α , $|\alpha| \leq m-1$

$$\int_{\Omega_-(u)} L_\alpha(x, D^\alpha(\varphi+u)) D^\alpha u dx \leq \int_{\Omega_-(u)} K(|D^\alpha(\varphi+u)|^{q_\alpha-1} + \sum_{|\beta|=m} |A_\beta D^m(\varphi+u)|^{p_\beta/q_\alpha} + \\ + \sum_{|\beta| \leq m-1} |D^\beta(\varphi+u)|^{p_\beta/q_\alpha} + |\tilde{\Psi}_\alpha(x)|) |D^\alpha u| dx \leq \epsilon \sum_{|\beta|=m} |A_\beta D^m u|^{p_\beta} dx + \\ + \epsilon \|u\|^p + \epsilon \sum_{\substack{|\beta| \leq m-1 \\ K_\beta > 0}} \int_{\Omega} |D^\beta u|^{p_\beta} dx + K_\epsilon \quad (4.12)$$

Из (4.6), (4.8), (4.9), (4.11) и (4.12) следует оценка

$$\langle Lu, u \rangle \geq C_1 \sum_{|\beta|=m} \int_{\Omega} |A_\beta D^m u|^{p_\beta} dx + \\ + C_2 \sum_{\substack{|\beta| \leq m-1 \\ K_\beta > 0}} \int_{\Omega} |D^\beta u|^{p_\beta} dx - \epsilon \|u\|^p - K_\epsilon \quad (4.13)$$

где C_1, C_2 - положительные константы, из которой очевидным образом следует коэрцитивность оператора L .

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из доказательства леммы 4.1 видно, что в условиях (4.1), (4.2) всюду можно l_β заменить на \tilde{l}_β . Только при этом входящие в них константы должны удовлетворять некоторым условиям, смысл которых заключается в том, что константы K_α , $|\alpha| \leq m$ должны быть достаточно большими по отношению к остальным константам, входящим в эти неравенства.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В условиях леммы 4.1 можно опустить требование $p_\beta \leq q_\beta$ для тех β , $|\beta| \leq m-1$, для которых $K_\beta > 0$, если потребовать полуограниченности вариации оператора в пространстве \tilde{H} , полученном замыканием $C^m(\Omega)$ по норме $\|u\|_1 \equiv \|u\| + \sum_{\substack{|\beta| \leq m-1 \\ K_\beta > 0, p_\beta > q_\beta}} \|D^\beta u\|_{p_\beta, \Omega}$; для тех α , $|\alpha| \leq m-1$, для которых

$K_\alpha > 0$, $p_\alpha > q_\alpha$ во втором из неравенств (4.2) q_α заменить на p_α и для тех же α в условии I вместо второго из условий (2.2) потребовать, чтобы $D^\alpha f \in L_{p_\alpha}(\Omega)$, так как при этом оценка (4.13) гарантирует разрешимость уравнения $\mathcal{L}u = 0$ в пространстве H .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В случае однородных граничных условий доказательство леммы 4.1 значительно упрощается, причем, в этом случае даже нет необходимости пользоваться вторыми из неравенств (4.1) и (4.2), которые, тем самым, могут быть опущены.

Можно привести и другие критерии выполнимости условия коэрцитивности, аналогичные тем, что выписаны в пункте 4 § 2 и пункте 4 § 3 работы [I], однако мы этого не будем делать ввиду аналогичности доказательства с одной стороны и громоздкости записи с другой.

§ 5. Алгебраические критерии definitности и полуограниченности вариации. Пример оператора с definitной вариацией

Оператор называется оператором с definitной вариацией, если для любых $u, v \in H_p^m(A, \Omega)$

$$\langle \mathcal{L}u - \mathcal{L}v, u - v \rangle \geq d \sum_{|\alpha|=m} \|A_\alpha D^m(u-v)\|_{p_\alpha, \Omega}^{p_\alpha}, \quad (5.1)$$

где d - положительная константа.

Очевидно, оператор с definitной вариацией тем более является оператором с полуограниченной вариацией. Очевидно также, что при definitности вариации оператора \mathcal{L} уравнение $\mathcal{L}u = 0$ имеет единственное решение. Более того, оператор \mathcal{L} осуществляет гомоморфизм между пространствами $H_p^m(A, \Omega)$ и $(H_p^m(A, \Omega))^*$. Доказательство этого факта просто и вполне аналогично доказательству соответствующего утверждения для операторов второго порядка (см. теоремы 2.2 и 3.2 работы [I]).

ЛЕММА 5.1. Пусть для всех α , $|\alpha|=m$ $p_\alpha \geq 2$ и для всех α , $|\alpha| \leq m$ функции $\mathcal{L}_\alpha(x, \xi_x)$ дифференцируемы по всем ξ_x , $|\gamma| \leq m$. Пусть, кроме того, для любых ξ_α, η_α , $|\alpha| \leq m$ и n.v. $x \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha(x, \xi_x)}{\partial \xi_\beta} \eta_\alpha \eta_\beta \geq d \sum_{|\alpha|=m} |A_\alpha \xi|^{p_\alpha-2} |A_\alpha \eta|^2, \quad d > 0. \quad (5.2)$$

Тогда оператор \mathcal{L} имеет definitную вариацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам теоремы 2.2. работы [9], предложений 2.2 и 3.2 работы [I].

Для любых $u, v \in \dot{H}_p^m(A, \Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u - \mathcal{L}v, u - v \rangle &\equiv \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} [\mathcal{L}_{\alpha}(x, D^{\gamma}(f+u)) - \mathcal{L}_{\alpha}(x, D^{\gamma}(f+v))] D^{\alpha}(u-v) dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}_{\alpha}(x, D^{\gamma}(f+v+\tau(u-v)))}{\partial \xi_{\beta}} d\tau D^{\beta}(u-v) D^{\alpha}(u-v) dx \gg \\ &\gg d \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} \int_0^1 |A_{\alpha} D^m(f+v+\tau(u-v))|^{p_{\alpha}-2} d\tau |A_{\alpha} D^m(u-v)|^2 dx \quad (5.3) \end{aligned}$$

Учитывая элементарное неравенство

$$\int_0^1 |a+\tau(b-a)|^{p-2} d\tau > \kappa |b-a|^{p-2},$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $p \geq 2$, $\kappa > 0$ и не зависит от a и b , получим из (5.3) оценку

$$\langle \mathcal{L}u - \mathcal{L}v, u - v \rangle \gg \kappa d \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |A_{\alpha} D^m(u-v)|^{p_{\alpha}} dx = \kappa d \sum_{|\alpha|=m} \|A_{\alpha} D^m(u-v)\|_{p_{\alpha}, \Omega}^{p_{\alpha}}$$

Лемма доказана.

Приведем теперь алгебраический критерий полуограниченности вариации.

ЛЕММА 5.2. Пусть оператор \mathcal{L} , определенный формулой (2.4), представим в виде $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}} + \mathcal{L}'$, где операторы $\hat{\mathcal{L}}$ и \mathcal{L}' определяются соотношениями

$$\langle \hat{\mathcal{L}}u, \eta \rangle \equiv \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \hat{\mathcal{L}}_{\alpha}(x, D^{\gamma}(f+u)) D^{\alpha} \eta dx, \quad u, \eta \in \dot{H}_p^m(A, \Omega),$$

$$\langle \mathcal{L}'u, \eta \rangle \equiv \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha|=m} \mathcal{L}'_{\alpha}(x, D^{\omega}(f+u)) D^{\alpha} \eta + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \mathcal{L}'_{\alpha}(x, D^{\gamma}(f+u)) D^{\alpha} \eta \right] dx, \quad u, \eta \in \dot{H}_p^m(A, \Omega),$$

причем, оператор $\hat{\mathcal{L}}$ имеет дефинитную вариацию, функции

$$\hat{\mathcal{L}}_{\alpha}(x, \xi_{\beta}), |\alpha| \leq m, \mathcal{L}'_{\alpha}(x, \xi_{\omega}), |\alpha| = m, \mathcal{L}'_{\alpha}(x, \xi_{\beta}), |\alpha| \leq m-1$$

удовлетворяют условию Каратеодори. Мультииндекс γ пробегает

всевозможные значения с $|\omega| \leq m-1$. Пусть, кроме того, функции $\mathcal{L}'_\alpha(x, \xi_\omega)$, $|\alpha| = m$, $\mathcal{L}'_\alpha(x, \xi_\gamma)$, $|\alpha| \leq m-1$ дифференцируемы по ξ_ω , $|\omega| \leq m-1$ и ξ_γ , $|\gamma| \leq m$ соответственно, и для п.в. $x \in \Omega$ и любых ξ_ω, ξ_γ , $\eta_\alpha \in \mathbb{R}$, $|\omega| \leq m-1$, $|\gamma| \leq m$, $|\alpha| = m$ выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} \left| \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial \mathcal{L}'_\alpha(x, \xi_\omega)}{\partial \xi_\beta} \eta_\alpha \right| &\leq K \sum_{|\alpha|=m} \left(\sum_{|\omega| \leq m-1} |\xi_\omega| \frac{p_\alpha (q_\beta - p_\alpha)}{p_\alpha q_\beta} + \varphi_{\alpha\beta}(x) |A_\alpha \bar{\eta}| \right), \\ &|\beta| \leq m-1 \\ \left| \frac{\partial \mathcal{L}'_\alpha(x, \xi_\gamma)}{\partial \xi_\beta} \right| &\leq K \left(\sum_{|\gamma|=m} |A_\gamma \bar{\xi}| \frac{p_\gamma (q_\beta - q_\alpha)}{q'_\alpha q_\beta} + \sum_{|\gamma| \leq m-1} |\xi_\gamma| \frac{q_\gamma (q_\beta - q_\alpha)}{q'_\alpha q_\beta} + \varphi_{\alpha\beta}(x) \right), \\ &|\alpha|, |\beta| \leq m-1 \\ \left| \sum_{|\beta|=m} \frac{\partial \mathcal{L}'_\alpha(x, \xi_\gamma)}{\partial \xi_\beta} \eta_\beta \right| &\leq K \sum_{|\beta|=m} \left(\sum_{|\gamma|=m} |A_\gamma \bar{\xi}| \frac{p_\gamma (q_\alpha - p'_\beta)}{p'_\beta q_\alpha} + \sum_{|\gamma| \leq m-1} |\xi_\gamma| \frac{q_\gamma (q_\alpha - p'_\beta)}{p'_\beta q_\alpha} + \right. \\ &\left. + \varphi_{\alpha\beta}(x) |A_\beta \bar{\eta}| \right), \quad |\alpha| \leq m-1 \end{aligned} \right\} (5.4)$$

где K - положительная константа, числа p_α , $|\alpha| = m$ и q_α , $|\alpha| \leq m-1$ удовлетворяют условию леммы I.1, $\varphi_{\alpha\beta} \in L^{\frac{p_\alpha q_\beta}{q'_\alpha p'_\beta}}(\Omega)$ при $|\alpha| = m$, $|\beta| \leq m-1$, $\varphi_{\alpha\beta} \in L^{\frac{q'_\alpha q'_\beta}{q_\alpha - p'_\beta}}(\Omega)$ при $|\alpha|, |\beta| \leq m-1$, $\varphi_{\alpha\beta} \in L^{\frac{p'_\beta q_\alpha}{q_\alpha - p'_\beta}}$ при $|\beta| = m$, $|\alpha| \leq m-1$. Тогда оператор \mathcal{L} имеет полуограниченную вариацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $u, v \in H^m_p(A, \Omega)$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u - \mathcal{L}v, u - v \rangle &= \langle \hat{\mathcal{L}}u - \hat{\mathcal{L}}v, u - v \rangle + \langle \mathcal{L}'u - \mathcal{L}'v, u - v \rangle \geq d \sum_{|\alpha|=m} \|A_\alpha D^m(u-v)\|_{p_\alpha, \Omega}^{p_\alpha} + \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m, |\beta| \leq m-1} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}'_\alpha(x, D^{\alpha'}(t+v+\tau(u-v)))}{\partial \xi_\beta} d\tau D^\beta(u-v) D^\alpha(u-v) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m-1} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}'_\alpha(x, D^{\alpha'}(t+v+\tau(u-v)))}{\partial \xi_\beta} d\tau D^\beta(u-v) D^\alpha(u-v) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m-1, |\beta|=m} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}'_\alpha(x, D^{\alpha'}(t+v+\tau(u-v)))}{\partial \xi_\beta} d\tau D^\beta(u-v) D^\alpha(u-v) dx = \\ &= d \sum_{|\alpha|=m} \|A_\alpha D^m(u-v)\|_{p_\alpha, \Omega}^{p_\alpha} + \int_{\Omega} \int_0^1 (J_1 + J_2 + J_3) d\tau dx. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Пусть $\|u\|, \|v\| \leq \rho$. Тогда, учитывая лемму I.2, пользуясь сначала неравенством Юнга с показателем p_α , затем неравенством Гельдера с показателем $\frac{q_\alpha}{p_\alpha}$, благодаря первому из неравенств (5.4), получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \int_0^1 J_1 d\tau dx \right| &\leq \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \|A_\alpha D^m(u-v)\|_{p_\alpha, \Omega}^{p_\alpha} + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta| \leq m-1}} C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \rho) \|D^\beta(u-v)\|_{q_\beta, \Omega}^{p'_\alpha} \\ &\leq \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \|A_\alpha D^m(u-v)\|_{p_\alpha, \Omega}^{p_\alpha} + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta| \leq m-1}} K C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \rho) (\|u-v\|')^{p'_\alpha}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где K — положительная константа, $C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \rho) \geq 0$, $|\alpha|=m, |\beta| \leq m-1$, а норма $\|\cdot\|'$ определяется следующим образом:

$$\|u\|' = \sum_{|\beta|=m-1} \|D^\beta u\|_{q_\beta, \Omega}, \quad u \in \overset{\circ}{H}_p^m(A, \Omega) \quad (5.7)$$

и, в силу леммы I.2, является компактной по отношению к норме $\|\cdot\|$.

Аналогичным образом, пользуясь сначала неравенством Юнга с показателем p_β , затем неравенством Гельдера с показателем $\frac{q_\alpha}{p_\beta}$, учитывая третье из неравенств (5.4), получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \int_0^1 J_3 d\tau dx \right| &\leq \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \|A_\beta D^m(u-v)\|_{p_\beta, \Omega}^{p_\beta} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-1 \\ |\beta|=m}} C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \rho) \|D^\alpha(u-v)\|_{q_\alpha, \Omega}^{p'_\beta} \\ &\leq \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \|A_\beta D^m(u-v)\|_{p_\beta, \Omega}^{p_\beta} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-1 \\ |\beta|=m}} K C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \rho) (\|u-v\|')^{p'_\beta}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \rho) \geq 0$, $|\alpha| \leq m-1, |\beta|=m$.

Учитывая второе из неравенств (5.4), пользуясь дважды неравенством Гельдера сначала с показателем q_α , затем с показателем $\frac{q_\beta}{q_\alpha}$, получим оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \int_0^1 J_2 d\tau dx \right| &\leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m-1} C_{\alpha\beta}(\rho) \|D^\beta(u-v)\|_{q_\beta, \Omega} \|D^\alpha(u-v)\|_{q_\alpha, \Omega} \\ &\leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m-1} K C_{\alpha\beta}(\rho) (\|u-v\|')^2, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $C_{\alpha\beta}(\rho) \geq 0, |\alpha|, |\beta| \leq m-1$.

Выбирая в (5.6) и (5.8) $\varepsilon \leq \frac{d}{2}$, из (5.5), (5.6) (5.8) и (5.9) заключаем, что оператор \mathcal{L} удовлетворяет условию полуограниченности вариации (условие IV теоремы 2.1) с функцией $\mu(\rho, \tau)$ в (2.9), определенной соотношением

$$\mu(\rho, \tau) \equiv K \left[\sum_{\substack{|\alpha|=m, \\ |\beta| \leq m-1}} C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \rho) \tau^{\rho'_\alpha} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-1, \\ |\beta|=m}} C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \rho) \tau^{\rho'_\beta} + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m-1} C_{\alpha\beta}(\rho) \tau^2 \right]$$

и нормой $\|\cdot\|'$, определенной равенством (5.7).

Поскольку $\rho'_\alpha > 1$, $|\alpha|=m$, то функция $\mu(\rho, \tau)$, очевидно, удовлетворяет условию (2.10).

Лемма доказана.

Из теоремы 2.1 и доказанных в работе лемм и замечаний вытекает следующая

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия лемм 3.1, 4.1, 5.2, а также условие I § 2. Тогда краевая задача (2.1) имеет хотя бы одно решение $u = v + \varphi$, где $v \in \overset{0}{H}_P^m(A, \Omega)$, φ - удовлетворяет условию I § 2.

Если вместо условия леммы 5.2 выполнено условие леммы 5.1, то решение будет единственным, более того, оператор \mathcal{L} , определенный соотношением (2.4), осуществляет гомеоморфизм между пространствами $\overset{0}{H}_P^m(A, \Omega)$ и $(\overset{0}{H}_P^m(A, \Omega))^*$.

ПРИМЕР. Пусть для всех α , $|\alpha|=m$

$$\mathcal{L}_\alpha(x, \xi) \equiv \sum_{|\beta|=m} a_{\rho\alpha}(x) |A_\rho \xi|^{p_\beta-2} A_\rho \xi$$

Тогда оператор $\hat{\mathcal{L}}$, определенный формулой

$$\langle \hat{\mathcal{L}}u, \eta \rangle \equiv \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \mathcal{L}_\alpha(x, D^\alpha(\varphi+u)) D^\alpha \eta dx \equiv$$

$$\equiv \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\rho\alpha} |A_\rho D^\beta(\varphi+u)|^{p_\beta-2} A_\rho D^\beta(\varphi+u) D^\alpha \eta dx, u, \eta \in \overset{0}{H}_P^m(A, \Omega)$$

удовлетворяет условию definitности вариации.

Проверка этого утверждения не представляет труда и по существу не отличается от проверки соответствующего утверждения для операторов второго порядка, приведенного в пункте 7 § 3 работы [1].

Автор выражает свою благодарность А.В.Иванову за постоянное внимание к выполняемой работе и неоднократные ее обсуждения.

Литература

1. И в а н о в А.В., М к р т ч я н П.З. О разрешимости первой краевой задачи для некоторых классов вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. - Тр.Матем. ин-та АН СССР, 1980.
2. Л у В е н ь - Т у а н . К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными степенями. - Вестник ЛГУ, 1961, №7, 2, с.23-37.
3. К р у ж к о в С.Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. - Матем.сб., 1969, т.77, №3, с.299-334.
4. К р а с н о с е л ь с к и й М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.
5. B r o w d e r F.E. Nonlinear elliptic boundary value problems. - Bull.Amer.Math.Soc., 1963, vol.69, №6, p.862-874.
6. M i n t y G. On a monotonicity method for the solutions of nonlinear equations in Banach Spaces. - Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 1963, vol.50, №6.
7. Л а д ы ж е н с к а я О.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973, 576 с.
8. И в а н о в А.В. Первая краевая задача для квазилинейных (A, \bar{b}) - эллиптических уравнений. - В сб.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. II, 1979, с.45-88.
9. Д у б и н с к и й Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М., 1976, т.9.
10. Л и о н с Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.