



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Gritsenko, Recurrence relations in the theory of Hecke's operators, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 125, 65–73

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 12, 2025, 04:57:31



## РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ГЕККЕ

Изучение мультипликативных свойств коэффициентов Фурье модулярных форм тесно связано с задачей о разложении многочленов Гекке на множители в подходящем расширении кольца Гекке (см. работу [1]). В работе автора [2] описан широкий класс многочленов с коэффициентами из кольца Гекке рода  $n+1$ , раскладывающихся на множители в ступенчатом расширении этого кольца, при этом коэффициенты множителей выражены через "отрицательные степени" элементов Фробениуса этого кольца (см. (I.6) ниже). Разложения многочлена Ранкина рода  $n$  и многочлена Гекке рода 3 описываются с использованием лишь "-2 степени" элемента Фробениуса  $\Lambda$ . Это объясняет актуальность задачи явного вычисления  $\Lambda^{-2}$ . Соответствующая формула была анонсирована в 2 (формула (4.8)). Данная работа посвящена доказательству этой формулы.

§ I. Кольца Гекке

Обозначим через  $M_n(A)$  кольцо  $n \times n$ -матриц с элементами из кольца  $A$ . Пусть  $p$  - простое число,  $q$  - произвольное натуральное число, взаимно простое с  $p$ ,  $E_n$  - единичная  $n \times n$ -матрица,

$$Z[p] = \{z = ap^t; a, t \in \mathbb{Z}, J_n = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_n(q) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{Z}); {}^t M J_n M = J_n, C \equiv 0 \pmod{q} \right\}$$

конгруэнц-подгруппа модулярной группы Зигеля  $S_{p,n}(\mathbb{Z})$ ,

$$S_n^p(q) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{Z}[p]), {}^t M J_n M = p^{S(M)} J_n, S(M) \in \mathbb{Z}, C \equiv 0 \pmod{q} \right\}.$$

Пусть  $\Gamma_{n,1}(q)$  (соответственно  $S_{n,1}^p(q)$ ) - подгруппа группы  $\Gamma_{n+1}(q)$  (соответственно  $S_{n+1}^p(q)$ ), состоящая из тех матриц, последняя строка которых имеет вид  $(0, 0, \dots, 0, S)$ . Через  $L_{n+1}^{n+1}(q)$  будем обозначать кольцо Гекке пары  $(\Gamma_{n+1}(q), L_{n+1}^{n+1}(q))$ . Напомним (см. [1], глава I), что кольцо Гекке  $L_{n+1}^{n+1}(q)$  это  $\Gamma_{n+1}(q)$ -инвариантное подпространство  $\mathbb{Q}$ -векторного пространства  $V$ , состоящего из всех формальных конеч-

ных линейных комбинаций

$$X = \sum_i a_i (\Gamma_{n+1}(q) g_i), \quad a_i \in \mathbb{Q}, \quad g_i \in S_{n+1}^p(q).$$

Представление группы  $\Gamma_{n+1}(q)$  на  $V$  задается равенством

$$X \rightarrow X \cdot \gamma = \sum_i a_i (\Gamma_{n+1}(q) g_i \gamma).$$

Для любых двух элементов

$$X = \sum a_i (\Gamma_{n+1}(q) g_i) \quad \text{и} \quad Y = \sum b_j (\Gamma_{n+1}(q) h_j)$$

кольца  $L_p^{n+1}(q)$  их произведение  $X \cdot Y$  определено равенством

$$X \cdot Y = \sum_{i,j} a_i b_j (\Gamma_{n+1} g_i h_j).$$

Если мы заменим в определении кольца Гекке  $L_p^{n+1}(q)$  группы  $\Gamma_{n+1}(q)$  и  $S_{n+1}^p(q)$  на группы  $\Gamma_{n,1}(q)$  и  $S_{n,1}^p(q)$ , то получим определение ступенчатого кольца Гекке  $L_p^{n,1}(q)$ . Положим

$$L^{n+1} = L_p^{n+1}(q) \quad \text{и} \quad L^{n,1} = L_p^{n,1}(q).$$

Хорошо известно (см. [3]), что любой элемент  $X$  кольца  $L^{n+1}$  можно представить в виде суммы классов  $X = \sum a_i \Gamma_{n+1}(q) g_i$ , где

$$g_i = \begin{pmatrix} \rho^{\delta_i} & * & * & \dots & * \\ \rho^{\delta_i} \mathfrak{D}^{-1} & \mathfrak{B} & & & \\ 0 & \mathfrak{D} & & & \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \rho^{d_1} & * & * & \dots & * \\ 0 & \rho^{d_2} & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho^{d_n} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.I})$$

Отображение

$$\mathcal{E}: X \rightarrow \tilde{X} = \sum_i a_i \Gamma_{n,1}(q) g_i \quad (\text{I.2})$$

является вложением кольца  $L^{n+1}$  в кольцо  $L^{n,1}$  (см. [1], лемма I.I.3). Мы будем отождествлять кольцо Гекке  $L^{n+1}$  с его образом  $\mathcal{E}(L^{n+1})$  в кольце  $L^{n,1}$ . Любой элемент  $X \in L^{n,1}$  можно представить в виде суммы  $X = \sum_i a_i \Gamma_{n,1}(q) g_i$ , где  $g_i$  имеет вид (I.I). Положим

$$\Phi_{n+1}(X) = \sum_i a_i x_i^{\delta_i} \prod_{j=1}^{n+1} (x_j \rho^{-j})^{d_{ij}}. \quad (\text{I.3})$$

Отображение  $\Phi$  (см. [4]) является гомоморфизмом кольца  $L^{n,1}$  в кольцо многочленов от  $n+2$  переменных, а сужение  $\Phi|_{L^{n+1}}$  является изоморфизмом кольца  $L^{n+1}$  и кольца многочленов  $\mathbb{Q}^{W_{n+1}}[x_0^{\pm 1}, \dots, x_{n+1}^{\pm 1}]$ , инвариантных относительно перестановок переменных  $x_1, \dots, x_{n+1}$ , и преобразований вида

$$x_0 \rightarrow x_0 x_i, \quad x_i \rightarrow x_i^{-1}, \quad x_j \rightarrow x_j \quad (j \neq i).$$

Пусть

$$z^{(n)}(z) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i^{-1} z)(1 - x_i z) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i z_i^{(n)} z^i. \quad (I.4)$$

Коэффициенты  $z_i \in \mathbb{Q}^{W_n}[x_0^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , поэтому можно определить многочлен Ранкина  $R^{(n)}(z)$  из кольца  $L^n[z]$  такой, что

$$R^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i R_i^{(n)} z^i = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \Phi_n^{-1}(z_i) z^i. \quad (I.5)$$

Кольцо  $L^{n,1}$  в отличие от кольца  $L^{n+1}$  некоммукативно и обладает делителями нуля. Структура кольца  $L^{n,1}$  была исследована в параграфе 3 работы [2]. Элементами Фробениуса кольца  $L^{n,1}$  назовем элементы

$$\Lambda = \Lambda_- = \Gamma_{n,1}(q) \begin{pmatrix} pE_n & 0 \\ 0 & p^2 E_n \end{pmatrix} \Gamma_{n,1}(q), \quad \Lambda_+ = \Gamma_{n,1}(q) \begin{pmatrix} pE_n & 0 \\ 0 & pE_n \end{pmatrix} \Gamma_{n,1}(q)$$

В работе [2] установлено (см. теорему 3.1), что  $p^{-n-1} \Lambda_- \Delta^{-1}$  и  $p^{-n-1} \Lambda_+ \Delta^{-1}$  ( $\Delta = \Gamma_{n,1}(q) p E_{2n+2}$  - обратимый элемент кольца  $L^{n,1}$ ) являются, соответственно, левым и правым корнем многочлена Ранкина  $R^{(n+1)}(z)$ , что позволяет определить рекуррентную последовательность "отрицательных степеней" элементов  $\Lambda_{\mp}$ :

$$\Lambda_-^k = \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^{i+1} p^{-(n+1)i} \Lambda_-^{i+k} R_i^{(n+1)} \Delta^{-i}, \quad (I.6)$$

$$\Lambda_+^k = \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^{i+1} p^{-(n+1)i} R_i^{(n+1)} \Lambda_+^{i+k} \Delta^{-i}.$$

§ 2. Стандартные операторы кольца  $L^{n,1}$

Пусть

$$C_- = \{X \in L^{n,1} : X \Lambda_- = \Lambda_- X\}$$

- централизатор оператора  $\Lambda_-$  в  $L^{n,1}$ . Будем писать  $A \equiv B \pmod{C_-}$ , если  $A-B \in C_-$  ( $A, B \in L^{n,1}$ ).

ЛЕММА 1. Пусть  $A$  и  $B$  два элемента кольца  $L^{n,1}$ . Если  $A \equiv B \pmod{C_-}$  и  $\Phi(A) = \Phi(B)$ , то  $A = B$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложений 3.1 и 3.4 из [2] сужение гомоморфизма  $\Phi$  на  $C_-$  инъективно.

Опишем теперь разложение элемента  $R_z^{(n+1)}$  на двойные смежные классы в кольцах Гекке  $L^{n,1}$  и  $L^{n+1}$ . Введем с этой целью некоторые стандартные операторы из этих колец. Пусть

$$T_{i,n+1} = \Gamma_{n+1}(q) \begin{pmatrix} pE_{n+1-i} & 0 & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & E_i & & \\ & & & & \\ & 0 & & pE_{n+1-i} & \\ & & & & 0 \\ & & & & & p^2 E_i \end{pmatrix} \Gamma_{n+1}(q), \Delta = \Gamma_{n+1}(q) pE_{2n+2}$$

Если  $\chi = \Gamma_n(q) \begin{pmatrix} p^\delta t & 0 \\ 0 & \mathcal{D} \end{pmatrix} \Gamma_n(q)$  - элемент кольца Гекке  $L^n$ , то через  $\chi^{(i)}(z)$  ( $i, z \in \mathbb{Z}$ ) обозначим соответствующий оператор кольца  $L^{n,1}$ :

$$\chi^{(i)}(z) = \Gamma_{n,1}(q) \begin{pmatrix} p^\delta t & 0 & 0 & 0 \\ & p^{\delta-i} & 0 & z \\ & 0 & \mathcal{D} & 0 \\ & 0 & 0 & p^i \end{pmatrix} \Gamma_{n,1}(q)$$

ЛЕММА 2. Имеет место следующее равенство

$$T_{2,n+1} = T_{1,n}^{(2)} + T_{1,n}^{(0)} + T_{2,n}^{(1)} + \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ z \neq 0}} T_{1,n}^{(1)}(z) + \sum_{v \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \Gamma_{n,1}(q) \begin{pmatrix} pE_n & 0 & 0 & l \\ -tq & p^{-1}t & l & z \\ 0 & 0 & pE_n & q \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

причем пара столбцов  $l, q$  пробегает все множество  $M_{n,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times M_{n,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , за исключением пары  $(0, 0)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы отождествляем кольцо  $L^{n+1}$  и его  $\varepsilon$ -образ в  $L^{n,1}$  (см. (I.2)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 & B & * \\ * & a & * & * \\ C & 0 & \mathcal{D} & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in S_{n,1}^p(q)$$

Отображение

$$\omega: M \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

является очевидно гомоморфизмом группы  $S_{n,1}^P(q)$  в группу  $S_n^P(q)$ . Двойной смежный класс  $T_{2,n+1}$  состоит из матриц  $M \in S_{n+1}^P(q)$ , имеющих ранг 2 над конечным полем  $Z_P$ . Разобьем матрицы этого класса на три подмножества таких, что  $p$  - ранг матриц  $\omega(M)$  равен 0, 1, 2 соответственно. Тогда матрицы из первого подмножества ( $\text{rang}_p \omega(M) = 0$ ) принадлежат одному из смежных классов, стоящих под знаком второй суммы, матрицы из третьего подмножества ( $\text{rang}_p \omega(M) = 2$ ) - двойному классу  $T_{2,n}^{(1)}$ , а матрицы из второго подмножества попадают в один из оставшихся классов.

ЛЕММА 3. Справедливо равенство

$$\Phi(T_{2,n+1}) = x_0^2 x_1 \dots x_{n+1} \left( p^{-\langle n-1 \rangle} \gamma_2^{(n+1)} + p^{-\langle n \rangle} (p^n - 1) \gamma_1^{(n+1)} - \frac{p^{-\langle n+1 \rangle + 2} (1 + p^{n-1}) (1 - p^{n-1})}{1 - p^2} \right),$$

где  $\gamma_2$  и  $\gamma_1$  - коэффициенты многочлена  $\gamma^{(n+1)}(z)$  (см. (I.4)), а  $\langle n \rangle = \frac{n(n+1)}{2}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя леммы 3.1, 3.6, 4.1 статьи [2] легко получить следующие равенства:

$$\Phi_{n+1}(T_{1,n}^{(2)}) = x_{n+1}^2 \Phi_n(T_{1,n}), \quad \Phi_{n+1}(T_{1,n}^{(0)}) = \Phi_n(T_{1,n}),$$

$$\Phi_{n+1}(T_{1,n}^{(1)}(\gamma)) = p^{-n} x_{n+1} \Phi_n(T_{1,n}), \quad \Phi_{n+1}(T_{2,n}^{(1)}) = p^{-n+1} x_{n+1} \Phi_n(T_{2,n}),$$

$$\Phi_n(T_{1,n}) = p^{-\langle n-1 \rangle} x_0^2 x_1 \dots x_n [\gamma_1^{(n)} + 1 - p^{-n}].$$

Для доказательства леммы 3 теперь достаточно применить индукцию по  $n$ .

ЛЕММА 4. В кольце  $L^{n+1}$  справедливо равенство

$$p^{2n+1} \Delta R_2^{(n+1)} = T_{2,n+1} - (p^n - 1) T_{1,n+1} + \frac{(p^{n+1} - 1)(p^{n+2} + p^{n+1} - p^{n+1})}{(p^2 - 1)} \Delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение  $\Phi$  инъективно на  $L^{n+1}$ ,

$$p^{n+1} \Delta R_1^{(n+1)} = T_{1,n+1} - (p^{n+1} - 1) \Delta \quad (\text{см. лемму 3.6 из [2]}),$$

$$\Phi(\Delta) = p^{-\langle n+1 \rangle} x_0^2 x_1 \dots x_{n+1}.$$

Перейдем теперь к исследованию коэффициента  $R_3$ . Отметим, что для вычисления  $\Lambda^{-2}$  нам необходимо получить разложение элемента  $\Lambda - R_3^{(n+1)}$  (см. (I.6),  $K = -2$ ).

ЛЕММА 5. Выполняется сравнение

$$p^{(n+1)} \Lambda R_3^{(n+1)} \equiv p T_{2,n}^{(1)} + p^2 (p^{n-1} - 1) T_{1,n}^{(1)} \pmod{\mathbb{C}_-}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$v_3^{(n+1)} = x_{n+1}^2 v_2^{(n)} + x_{n+1}^{-1} v_2^{(n)} + v_1^{(n)} + v_3^{(n)},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(p^{3n} \Delta R_3^{(n+1)}) &= \Phi_n(p^{2n-1} \Delta_n R_2^{(n)}) + x_{n+1} [\Phi_n(p^{2n-1} \Delta_n R_1^{(n)}) + \\ &+ \Phi_n(p^{2n-1} \Delta_n R_3^{(n)})] + x_{n+1}^2 \Phi_n(p^{2n-1} \Delta_n R_2^{(n)}). \end{aligned}$$

Обозначим  $\Phi_{n+1}$ -образы первого, второго и третьего слагаемых через  $X_0, X_1, X_2$ , тогда  $X_0 \in \mathbb{C}_-$  и  $\Lambda X_1 \in \mathbb{C}_-$  - в силу лемм 3.1 и 3.2 и предложения 3.2 из [2]. Вычислим элемент  $X_0$ . Применяя лемму 4, получаем:

$$\Phi_{n+1}(X_0) = \Phi_{n+1}(T_{2,n}^{(0)} - (p^{n-1} - 1) T_{1,n}^{(0)} + \frac{(p^n - 1)(p^{n+1} + p^n - p^{n-1} + 1)}{p^2 - 1} \Lambda_-).$$

Сужение отображения  $\Phi_{n+1}$  на  $\mathbb{C}_-$  инъективно, следовательно, элементы, стоящие в последнем равенстве под знаком  $\Phi$ , совпадают.

Множество двойных смежных классов образует базис кольца  $L^{n,1}$ , рассматриваемого как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$ , следовательно, любой элемент  $X$  кольца  $L^{n,1}$  можно представить в виде

$$X = \sum_i a_i \Gamma_{n,1}(q) q_i \Gamma_{n,1}(q).$$

Положим

$$X^* = \sum_i a_i \Gamma_{n,1}(q) p^{\delta(q_i)} q_i^{-1} \Gamma_{n,1}(q). \quad (2.1)$$

Тогда отображение  $*$  является антиавтоморфизмом кольца  $L^{n,1}$  и обладает следующими важными свойствами (см. лемму 2.2 из [2]):

$$X^* = X, \text{ если } X \in L^{n+1}; (X^*)^* = X \text{ для любого } X \in L^{n,1}.$$

Из инвариантности  $R_3$  относительно инволюции  $*$  получаем, что  $X_2 = X_0^*$ , то есть,

$$\chi_2 = T_{2,n}^{(2)} - (P^{n-1} - 1)T_{1,n}^{(2)} + \frac{(P^n - 1)(P^{n+1} + P^n - P^{n-1} + 1)}{P^2 - 1} \Lambda_+.$$

Легко проверить (см. лемму 3.1 [2]), что

$$\Lambda_- T_{2,n}^{(2)} = P^{2n} \Delta T_{2,n}^{(1)},$$

$$\Lambda_- T_{1,n}^{(2)} = P^{2n+1} T_{1,n}^{(1)} \Delta,$$

$$\Lambda_- \Lambda_+ = P^{2n+2} \Delta^2.$$

Лемма 5 доказана.

### § 3. Основное равенство

ЛЕММА 6. Выполняется соотношение

$$\Lambda_- R_i^{(n+1)} \in \mathbb{C}_-, \quad 1 \leq i \leq 2n+1.$$

Утверждение леммы сразу следует из предложения 3.2 [2].

Преобразуем теперь равенство (1.6). Принимая во внимание утверждение леммы 6, получаем, что

$$(P^{n+1} \Delta)^4 \Lambda_-^{-2} = (P^{n+1} \Delta)^3 \Lambda_-^{-1} R_1 - (P^{n+1} \Delta)^2 R_2 + \Lambda_- (P^{n+1} \Delta) R_3 \pmod{\mathbb{C}_-}. \quad (3.1)$$

Элемент  $\Lambda_-^{-1}$  вычислен в [2] (см. предложение 4.3):

$$(P^{n+1} \Delta)^{-2} \Lambda_-^{-1} = \Lambda_+ + \nabla_1 - P \Delta,$$

где

$$\nabla_1 = \sum_{a \in \mathbb{Z}/P\mathbb{Z}} \Gamma_{n,1}(q) \begin{bmatrix} PE_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & a \\ 0 & 0 & PE_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

Сформулируем основные соотношения, необходимые для вычисления элемента  $\Lambda_-^{-1} R_i^{(n+1)}$ .

ЛЕММА 7. Имеют место следующие равенства:

$$\Lambda_- (\nabla_1 - P \Delta) = 0, \quad \nabla_1^2 = P \Delta \nabla_1,$$

$$\nabla_1 T_{i,n}^{(1)} = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}/P\mathbb{Z}} T_{i,n}^{(1)}(\tau),$$



$$P^{n+1} \Delta R_1^{(n+1)} = T_{1,n+1} - (P^{n+1} - 1) \Delta,$$

$$T_{1,n+1} = T_{1,n}^{(1)} + \Lambda_+ + \Lambda_- + \nabla_1 - \Delta.$$

Первые три равенства легко получить прямыми вычислениями, последние два доказаны в леммах 3.5, 3.6 [2].

Определим еще один элемент кольца  $L^{n,1}$ :

$$\nabla_2 = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ q, \ell \in M_{n,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}} \Gamma_{n,1}(q) \begin{bmatrix} P E_n & 0 & 0 & \ell \\ -q & P & \ell & r \\ 0 & 0 & P E_n & q \\ 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix} \Gamma_{n,1}(q).$$

Теперь мы можем завершить вычисление элемента  $\Lambda_-^{-2}$ . Соединим вместе результаты лемм 2, 4, 5, 7 и произведем в сравнении (3.1) необходимые преобразования и сокращения, получим:

$$\begin{aligned} (P^{n+1} \Delta)^4 \Lambda_-^{-2} &= \Lambda_+^2 + (\nabla_1 - P \Delta) \Lambda_- + \Lambda_+ (\nabla_1 - P \Delta) + \\ &+ (1-P) \Delta \left( \sum_{r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} T_{1,n}^{(1)}(r) - P T_{1,n}^{(1)} \right) + (\Lambda_+ T_{1,n}^{(1)} - P \Delta T_{1,n}^{(2)}) + \\ &+ (\Lambda_+ \Lambda_- - P \Delta \nabla_2) \pmod{\mathcal{C}_-}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В работе [2] доказано, что

$$\Lambda_-^2 \Lambda_-^{-2} = \Gamma_{n,1}(q) E_{2n}.$$

следовательно,

$$\Phi_{n+1}((P^{n+1} \Delta)^4 \Lambda_-^{-2}) = P^{-2\langle n \rangle} (x_0^2 x_1 \dots x_n x_{n+1}^2)^2 = \Phi_{n+1}(\Lambda_+^2).$$

Легко заметить, что  $\Phi$ -образ любого другого слагаемого, стоящего в правой части сравнения (3.2), равен 0, поэтому знак сравнения в (3.2) можно заменить на знак равенства в силу леммы I.

Для того, чтобы найти  $\Lambda_+^{-2}$ , достаточно заметить, что  $(\Lambda_-)^* = \Lambda_+$  и  $(\Lambda_-^{-2})^* = \Lambda_+^{-2}$  (см. (2.1)). Следовательно,

$$\begin{aligned}
& (\rho^{n+1}\Delta)^4 \Lambda_+^{-2} = \Lambda_-^2 + (\nabla_1 - \rho\Delta)\Lambda_- + \Lambda_+ (\nabla_1 - \rho\Delta) + \\
& + (1-\rho)\Delta \left( \sum_{\nu \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} T_{i,n}^{(1)}(\nu) - \rho T_{i,n}^{(1)} \right) + (T_{i,n}^{(1)}\Lambda_- - \rho\Delta T_{i,n}^{(0)}) + \\
& + (\Lambda_+ \Lambda_- - \rho\Delta \nabla_2).
\end{aligned}$$

#### Литература

1. Андрианов А.Н. Мультипликативная арифметика зигелевых модулярных форм. - Успехи мат.наук, 1979, т.34, № I, с.67-135.
2. Гриценко В.А. Действие модулярных операторов на коэффициенты Фурье-Якоби модулярных форм. - Мат.об., 1982, т.II9, № 2, с.248-278.
3. Shimura G. Frithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms. - J.Math.Soc.Japan, 1963, vol.15, N 1, p.33-65.
4. Satake I. Theory of spherical functions on reductive algebraic group over p-adic fields. - Publ.Math. IHES, 1963, N 18, p.1-69.