I. M. Nabiev, A. Sh. Shukurov, Solution of inverse problem for the diffusion operator in a symmetric case, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2009, Volume 9, Issue 4, 36–40

DOI: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-1-36-40

УДК 517.984

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИФФУЗИИ В СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

И.М. Набиев, А.Ш. Шукюров

Бакинский государственный университет,
кафедра прикладной математики;
*Институт математики и механики НАН Азербайджана,
отдел функционального анализа, Баку
E-mail: nabievim@yahoo.com; ashshukurov@gmail.com

В работе доказывается единственность и приведены достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления оператора диффузии по одному спектру.

Ключевые слова: обратная задача, оператор диффузии, спектр.

Solution of Inverse Problem for the Diffusion Operator in a Symmetric Case

I.M. Nabiev, A.Sh. Shukurov

Baku State University, Chair of Applied Mathematics;
*Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan, Baku
E-mail: nabievim@yahoo.com; ashshukurov@gmail.com

In the paper uniqueness of reconstruction of the diffusion operator by a spectrum is proved and sufficient solvability conditions are provided.

Key words: inverse problem, diffusion operator, spectrum.

ВВЕДЕНИЕ

Обратными задачами спектрального анализа называются задачи, в которых требуется восстановить операторы по каким-либо их спектральным данным. Такими данными могут быть спектры, спектральная функция, данные рассеяния, функция Вейля и др. В настоящей работе впервые рассматривается вопрос о восстановлении на отрезке оператора диффузии по одному спектру в случае, когда коэффициенты уравнения диффузии симметричны относительно середины отрезка. Доказывается единственность и приводятся достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления оператора диффузии с граничными условиями Дирихле. Аналогичный вопрос для оператора Штурма – Лиувилля с разделенными и неразделенными граничными условиями ранее полностью изучены ([1–7]).

Обозначим через $W_2^n[0,\pi]$ пространство функций $f(x)$, $x \in [0,\pi]$, таких, что функции $f^{(m)}(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ абсолютно непрерывны и $f^{(n)}(x) \in L_2[0,\pi]$. Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке $[0,\pi]$ дифференциальным уравнением диффузии

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0 \tag{1}$$

и граничными условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $q(x) \in W_2^0[0,\pi] = L_2[0,\pi]$ — вещественные функции. Эту задачу будем обозначать через L. Для уравнения (1) при различных граничных условиях ранее подробно исследованы некоторые варианты обратных задач, в которых в качестве основных спектральных данных используются два, три спектра, спектральная функция, спектр и нормировочные числа, функция Вейля (см. [8–12] и библиогр. список в них).

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию симметричности

$$p(\pi - x) = p(x), \qquad q(\pi - x) = q(x). \tag{3}$$

Пусть $\{\lambda_n\}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — спектр задачи L. В данной работе решается обратная задача, которая ставится следующим образом: *по заданному спектру $\{\lambda_n\}$ построить функции $p(x)$ и $q(x)$.*

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

В этом пункте приводятся некоторые вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве основных результатов этой работы.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (1) при начальных условиях

$$c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1, \qquad c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что спектр задачи L будет совпадать с последовательностью нулей функции $s(\pi,\lambda)$.

Лемма 1 [9]. *Справедливы следующие представления:*

$$c(\pi,\lambda)=\cos\pi(\lambda-a)-a_1\frac{\cos\pi(\lambda-a)}{\lambda}+\pi c_1\frac{\sin\pi(\lambda-a)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_1(t)e^{i\lambda t}dt,$$

$$s'(\pi,\lambda)=\cos\pi(\lambda-a)+a_1\frac{\cos\pi(\lambda-a)}{\lambda}+\pi c_1\frac{\sin\pi(\lambda-a)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_2(t)e^{i\lambda t}dt,$$

где $a=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(t)dt$, $a_1=\frac{1}{2}[p(0)-p(\pi)]$, $c_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left[q(t)+p^2(t)\right]dt$, $\psi_i(t)\in L_2[-\pi,\pi]$, $i=1,2$.

Лемма 2 [9, 12]. *Для того чтобы целые функции $u(z)$ и $v(z)$ допускали представления*

$$u(z)=\sin\pi(z-a)+4A\pi\frac{z-a}{4(z-a)^2-1}\cos\pi(z-a)+\frac{f(z-a)}{z-a},$$
$$v(z)=\cos\pi(z-a)-B\pi\frac{\sin\pi(z-a)}{z-a}+\frac{g(z-a)}{z-a},$$

где

$$f(z)=p_0\sin\pi z+\int_{-\pi}^{\pi}F(t)e^{itz}dt,\qquad F(t)\in L_2[-\pi,\pi],\qquad f(0)=f'(0)=0,$$
$$g(z)=p_1\cos\pi z+\int_{-\pi}^{\pi}G(t)e^{itz}dt,\qquad G(t)\in L_2[-\pi,\pi],\qquad g(0)=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$u(z)=\pi(z-a)\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}\frac{u_k-z}{k},\qquad u_k=k+a-\frac{A}{k}+\frac{\delta_k}{k},$$
$$v(z)=\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}\frac{\nu_k-z}{k-\frac{1}{2}\operatorname{sign}k},\qquad \nu_k=k+a-\frac{1}{2}\operatorname{sign}k-\frac{B}{k}+\frac{\delta'_k}{k},$$

где A, B, a, p_0, p_1 — некоторые числа, $\{\delta_k\}$, $\{\delta'_k\}$ — произвольные числовые последовательности, удовлетворяющие условию $\sum_k\left\{|\delta_k|^2+|\delta'_k|^2\right\}<\infty$.

В случае уравнения диффузии справедлив следующий аналог леммы 4 из работы [13], который доказывается с использованием результатов статьи [8].

Лемма 3. *Тождество $c(\pi,\lambda)\equiv s'(\pi,\lambda)$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия симметричности* (3).

Дальше в этом и в следующем пункте всюду будем считать, что функция $q(x)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: для всех функций $y(x)\in W_2^2[0,\pi]$, $y(x)\not\equiv0$, удовлетворяющих равенству $y'(0)\overline{y(0)}-y'(\pi)\overline{y(\pi)}=0$, выполняется неравенство

$$\int_0^\pi\left[|y'(\pi)|^2+q(x)|y(x)|^2\right]dx>0.$$

Легко заметить, что последнее неравенство заведомо выполняется, если $q(x)>0$.

Лемма 4 [8]. *Собственные значения краевой задачи L вещественны, отличны от нуля и простые. Эти собственные значения можно располагать в последовательность*

$$\ldots<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots, \tag{5}$$

причем при $|n|\to\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_n=n+a+\frac{A}{n}+\frac{\alpha_n}{n}, \tag{6}$$

где $a=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)dx$, $A=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left[q(x)+p^2(x)\right]dx$, $\{\alpha_n\}\in\ell_2$.

Лемма 5. *Если выполняются условия* (3), *то* $s'(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$.

Доказательство. Поскольку функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условию (3), то функция $s(\pi - x, \lambda)$ также удовлетворяет уравнению (1). Так как функции $c(x, \lambda)$, $s(x, \lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), то функция $s(\pi - x, \lambda)$ равна их линейной комбинации: $s(\pi - x, \lambda) = C_1 c(x, \lambda) + C_2 s(x, \lambda)$, где C_1, C_2 — некоторые постоянные. Отсюда

$$-s'(\pi - x, \lambda) = C_1 c'(x, \lambda) + C_2 s'(x, \lambda). \tag{7}$$

Полагая в последних двух равенствах $x = 0$ и учитывая (4), получим

$$C_1 = s(\pi, \lambda), \quad C_2 = -s'(\pi, \lambda). \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) влекут $s'(\pi - x, \lambda) = s'(\pi, \lambda)s'(x, \lambda) - s(\pi, \lambda)c'(x, \lambda)$. Отсюда при $x = \pi$ вытекает, что $s'^2(\pi, \lambda) - s(\pi, \lambda)c'(\pi, \lambda) = 1$. Из этого равенства при $\lambda = \lambda_n$ следует, что $s'^2(\pi, \lambda_n) = 1$. Значит, $s'(\pi, \lambda_n) = \pm 1$. Известно [9], что $\operatorname{sign} s'(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$. Последние два равенства показывают, что $s'(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$. $\square$

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ СПЕКТРОМ ЗАДАЧИ L

Исследуем теперь вопрос об однозначной определенности уравнения диффузии спектром задачи L.

По последовательности $\{\lambda_n\}$ можно восстановить функцию $s(\pi, \lambda)$ в виде бесконечного произведения. Согласно лемме 1, функция $s'(\pi, \lambda)$ представима в виде

$$s'(\pi, \lambda) = \cos \pi(\lambda - a) + A\pi \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{f(\lambda)}{\lambda}, \tag{9}$$

где $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа не выше π, принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$ при вещественном λ (представление (9) в случае $p(x) \equiv 0$ получено в [14, с. 38]). Из асимптотической формулы (6) получаем

$$A = \lim_{n \to \infty} n(\lambda_n - n - a). \tag{10}$$

Далее, из формулы (9) получаем $f(\lambda_n) = \lambda_n [s'(\pi, \lambda_n) - \cos \pi(\lambda_n - a)] - A\pi \sin \pi(\lambda_n - a)$, откуда, принимая во внимание лемму 5, имеем

$$f(\lambda_n) = \lambda_n [(-1)^n - \cos \pi(\lambda_n - a)] - A\pi \sin \pi(\lambda_n - a). \tag{11}$$

Легко убедиться, что $\{f(\lambda_n)\} \in \ell_2$. Тогда функцию $f(\lambda)$ можно восстановить по формуле

$$f(\lambda) = s(\pi, \lambda) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{f(\lambda_n)}{(\lambda - \lambda_n)\dot{s}(\pi, \lambda_n)}, \tag{12}$$

где точка над функцией означает дифференцирование по λ. Известно [15, с. 120], что этот ряд сходится равномерно на каждом компакте комплексной плоскости, а на вещественной оси — по норме пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Последняя формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между ℓ_2 и множеством целых функций экспоненциального типа не выше π, принадлежащих $L_2(-\infty, \infty)$ на вещественной оси. Соотношения (9)–(12) показывают, что функция $s'(\pi, \lambda)$ однозначно определяется спектром $\{\lambda_n\}$ краевой задачи L. Множество нулей $\{\nu_n\}$ функции $s'(\pi, \lambda)$ совпадает со спектром краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями

$$y(0) = y'(\pi) = 0. \tag{13}$$

По двум спектрам $\{\lambda_n\}$ и $\{\nu_n\}$ однозначно восстанавливаются коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1) (см. [8]).

Таким образом, справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Задание спектра* $\{\lambda_n\}$ *однозначно определяет краевую задачу* L.

Легко заметить, что приведенное выше рассуждение содержит также процедуру восстановления функций $p(x)$ и $q(x)$ по спектру $\{\lambda_n\}$.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Теперь приведем достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность вещественных чисел* (5) *была спектром некоторой краевой задачи вида* L *с вещественными коэффициентными функциями* $p(x)$ *и* $q(x)$, *удовлетворяющими условиям* (3), *достаточно, чтобы имели место асимптотическая формула* (6) *и неравенство*

$$\cos \pi a + A\pi \frac{\sin \pi a}{a} + \frac{s(0)}{a} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\lambda_n s'(\lambda_n)} > 0, \tag{14}$$

где $a \neq 0$ *и* A *— вещественные числа,* $\varphi_n = [(-1)^n - \cos \pi(\lambda_n - a)](\lambda_n - a) - A\pi \sin \pi(\lambda_n - a)$, $s(z) = \pi \prod\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{n}$.

Доказательство. Поскольку для $\{\lambda_n\}$ имеет место асимптотическая формула (6), то, согласно лемме 2, функция $(z-a)s(z)$ допускает следующее представление:

$$(z-a)s(z) = \sin \pi(z-a) - 4A\pi \frac{z-a}{4(z-a)^2 - 1} \cos \pi(z-a) + \frac{g(z-a)}{z-a},$$

где $g(z) = a_0 \sin \pi z + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{itz}\, dt$, $g(t) \in L_2[-\pi, \pi]$, $g(0) = g'(0) = 0$, a_0 — некоторое число.

Рассмотрим функцию

$$s_1(z) = \cos \pi(z-a) + A\pi \frac{\sin \pi(z-a)}{z-a} + \frac{\varphi(z-a)}{z-a}, \tag{15}$$

где

$$\varphi(z) = s(z) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\varphi_n}{(z-\lambda_n)s'(\lambda_n)}.$$

Принимая во внимание асимптотические формулы $\cos x = 1 + O(x^2)$, $\sin x = O(x)$, при $x \to 0$ и (6), получаем

$$\varphi_n = \left[(-1)^n - (-1)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \cdot O(n) - O\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е. $\varphi_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Следовательно, $\{\varphi_n\} \in \ell_2$. Поэтому функция $\varphi(z)$ — целая функция экспоненциального типа не выше π, суммируемая с квадратом на вещественной оси. Тогда нули ν_n $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ функции $s_1(z)$ удовлетворяют асимптотической формуле

$$\nu_n = n - \frac{1}{2} \operatorname{sign} n + a + \frac{A}{n} + \frac{\xi_n}{n}, \quad \{\xi_n\} \in \ell_2 \tag{16}$$

(см. лемму 2). Полагая в равенстве (15) $z = \lambda_n$, получим

$$s_1(\lambda_n) = \cos \pi(\lambda_n - a) + A\pi \frac{\sin \pi(\lambda_n - a)}{\lambda_n - a} + \frac{\varphi_n}{\lambda_n - a} = (-1)^n. \tag{17}$$

С другой стороны, неравенство (14) показывает, что $s_1(0) > 0$. Поэтому в каждом интервале $\ldots, (\lambda_{-2},\ \lambda_{-1})$, $(\lambda_{-1}, 0)$, $(0, \lambda_1)$, $(\lambda_1, \lambda_2), \ldots$ лежит один и в силу асимптотики (16) только один нуль функции $s_1(z)$. Следовательно, нули функций $s_1(z)$ и $s(z)$ перемежаются в следующем смысле:

$$\ldots < \lambda_{-2} < \nu_{-2} < \lambda_{-1} < \nu_{-1} < 0 < \nu_1 < \lambda_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \ldots .$$

Отсюда, учитывая асимптотические формулы (6) и (16), заключаем, что последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\nu_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы 3 работы [8]. Поэтому $\{\lambda_n\}$, $\{\nu_n\}$ являются спектрами краевых задач, порожденных на отрезке $[0, \pi]$ одним и тем же уравнением (1) с вещественными коэффициентами $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $q(x) \in L_2[0, \pi]$ и граничными условиями (2), (13) и

$$s(\lambda) = s(\pi, \lambda), \qquad s_1(\lambda) = s'(\pi, \lambda). \tag{18}$$

Остается показать, что восстановленные функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям (3). Действительно, из равенств (17), (18) и тождества $c(\pi,\lambda)s'(\pi,\lambda)-c'(\pi,\lambda)s(\pi,\lambda)=1$ вытекает, что

$$c(\pi,\lambda_n)=\frac{1}{s'(\pi,\lambda_n)}=\frac{1}{s_1(\lambda_n)}=(-1)^n.$$

Поэтому функция $a(\lambda)=c(\pi,\lambda)-s'(\pi,\lambda)$ обращается в нуль в нулях функции $s(\lambda)=s(\pi,\lambda)$.

Из равенств (15), (18) и леммы 1 вытекает, что для построенной задачи $a_1=0$ $(p(0)=p(\pi))$. Кроме того, из представлений для $c(\pi,\lambda)$ и $s'(\pi,\lambda)$ (см. лемму 1) следует, что

$$a(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(t)e^{i\lambda t}dt,$$

где $\Psi(t)\in L_2[-\pi,\pi]$. Отсюда получается $|a(\lambda)|=|\lambda|^{-1}e^{\pi|\mathrm{Im}\,\lambda|}o(1)$, при $|\lambda|\to\infty$. Значит, функция $\nu(\lambda)=a(\lambda)/s(\lambda)$ — целая, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{\lambda\in K_n}|\nu(\lambda)|=0$, где K_n — последовательность неограниченно расширяющихся контуров, ограничивающих квадраты $\left\{\lambda:|\mathrm{Re}\,\lambda-a|\le n+\frac12,\ |\mathrm{Im}\,\lambda|\le n+\frac12\right\}$. Тогда по теореме Лиувилля $\nu(\lambda)\equiv 0$. Таким образом, при любом λ имеет место равенство $c(\pi,\lambda)=s'(\pi,\lambda)$ (для восстановленного уравнения). Отсюда, согласно лемме 3, получаем, что $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условию симметричности (3). □

Замечание 1. Условия теоремы 2 являются также необходимыми, если функция $q(x)$ удовлетворяет дополнительному условию, приведенному в п. 1. Но построенная вещественная функция при доказательстве теоремы 2 не обязана удовлетворять этому условию.

Замечание 2. Подобные результаты могут быть получены и в случае граничных условий вида $y'(0)-hy(0)=0$, $y'(\pi)+hy(\pi)=0$, где h — вещественное число. При этом широко используются результаты, полученные в работе [16].

Библиографический список

1. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
2. *Левитан Б.М.* Об определении оператора Штурма–Лиувилля по одному и двум спектрам // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1978. Т. 42, № 1. С. 185–199.
3. *Poschel J., Trubowitz E.* Inverse Spectral Theory. N.Y.: Academic Press, 1987. 192 p.
4. *Гусейнов И.М., Набиев И.М.* Определение дифференциального оператора по спектру // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 4. С. 59–66.
5. *Yurko V. A.* The inverse spectral problem for differential operators with non-separated boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 250. P. 266–289.
6. *Набиев И.М.* Свойства спектров и восстановление дифференциальных операторов на отрезке: Автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук. Баку, 2007. 36 с.
7. *Мазур Т. В.* О разрешимости обратной задачи Штурма–Лиувилля в симметричном случае// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, № 1. С. 21–24.
8. *Гусейнов Г. Ш.* К спектральному анализу квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 6. С. 1292–1296.
9. *Гусейнов Г. Ш.* Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля на конечном интервале // Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку, 1986. Вып. 7. С. 51–101.
10. *Юрко В. А.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Мат. сборник. 2000. Т. 191, № 10. С. 137–160.
11. *Набиев И.М.* Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии // Докл. РАН. 2007. Т. 415, № 2. С. 168–170.
12. *Гусейнов И.М., Набиев И.М.* Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Мат. сборник. 2007. Т. 198, № 11. С. 47–66.
13. *Юрко В.А.* Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 569–576.
14. *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977. 332 с.
15. *Левин Б.Я.* Целые функции (курс лекций). М.: Изд-во МГУ, 1971. 124 с.
16. *Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш.* Определение оператора диффузии по спектральным данным // Докл. АН Азерб. ССР. 1981. Т. 37, № 2. С. 19–23.