



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Buryachenko, A. M. Lipanov, Effective field method in ideal plasticity theory for composite materials, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1989, Volume 30, Issue 3, 149–155

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.83

December 3, 2024, 08:20:22



величиной, полученной из непосредственного определения  $R_{\text{п}}$  газодинамическим способом. Это и подтверждает факт, что основной причиной резкого возрастания свободномолекулярного приведенного расхода является увеличение радиусов пор, а не возникновение новых.

Авторы благодарны академику Г. Н. Флерову за поддержку и интерес к работе, а также О. Л. Ореловичу за оказанную помощь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Флеров Г. Н. Синтез сверхтяжелых элементов и применение методов ядерной физики в смежных областях // Вестн. АН СССР.— 1984.— № 4.
2. Палатник Л. С., Черемской П. Г., Фукс М. Я. Поры в пленках.— М.: Энергоиздат, 1982.
3. Кузнецов В. И., Овчинников В. В. и др. Газодинамическое определение радиуса пор мембран сетчатого типа // Инж.-физ. журн.— 1983.— Т. 4, № 2.
4. Гуль В. Е., Кулезнев В. Н. Структура и механические свойства полимеров.— М.: Высш. шк., 1966.
5. Аскадский А. А. Деформация полимеров.— М.: Химия, 1973.
6. Гуль В. Е., Дьяконова В. П. Физико-химические основы производства полимерных пленок.— М.: Высш. шк., 1978.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
8. Борисов С. Ф., Калинин Б. А. и др. Микроманометр с цифровым отсчетом // ПТЭ.— 1972.— № 4.
9. Александров О. Е., Селезнев В. Д., Овчинников В. В. и др. Изучение эволюции входного профиля поры ядерной мембраны.— Дубна, 1987.— (Препр./ОИЯИ; № Р7—87—597).

Поступила 18/VIII 1987 г.,  
в окончательном варианте — 23/XI 1987 г.

УДК 539.4

### МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО ПОЛЯ В ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. А. Буряченко, А. М. Липанов  
(Москва)

При исследовании практически важных задач течения многокомпонентных смесей деформирования твердых материалов, изготовленных методами порошковой металлургии, возникает необходимость в прогнозировании предельных нагрузок для этих систем. Предполагается, что композитная среда состоит из однородных матрицы и случайного множества эллипсоидальных включений. Вычисление эффективных предела пластичности среды и параметра, описывающего ее объемную сжимаемость, осуществляется с помощью варианта метода эффективного поля, предложенного в [1, 2]. Метод основан на решении задачи бинарного взаимодействия включений, находящихся в эффективном поле, в предположении однородности напряжений внутри каждого включения. Использовалось допущение об однородности внутри включений и матрице диссипативной функции.

1. В макрообъеме с характеристической функцией  $W$  рассмотрим смесь жесткопластических компонентов, механические свойства которых описываются поверхностью текучести, учитывающей объемную сжимаемость:

$$(1.1) \quad I_2 + b(x) I_1^2 = k^2(x),$$

где  $I_1 = \sigma_{ii}$  — первый инвариант тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ ;  $I_2 \equiv s_{ij}s_{ij}$  — второй инвариант девиатора напряжений  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ii}\delta_{ij}/3$ . Матрица с пределом пластичности  $k(x) = k_0$  и параметром  $b(x) = b_0$ , характеризующим ее объемную сжимаемость, содержит пуассоновское множество  $X = (V_k, x_k, \omega_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) эллипсоидов  $v_k$  с характеристическими функциями  $V_k$ , центрами  $x_k$ , полуосями  $a_k^i$  ( $a_k^1 > a_k^2 > a_k^3$ ), совокупностью эйлеровых углов  $\omega_k$  и параметрами  $k_k, b_k$ . Компоненты имеют между собой идеальную адгезию, так что поле скоростей перемещений  $u_i(x)$  непрерывно.

Для (1.1) соблюдается локальный ассоциированный закон течения компонентов [3—6]

$$(1.2) \quad \sigma_{ij} = k(x) \frac{\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} d(x) \varepsilon_{ll}(x)}{\sqrt{\varepsilon_{mn}(x) \varepsilon_{mn}(x) - d(x) \varepsilon_{ll}^2(x)}}$$

( $\varepsilon_{ij}$  — тензор скоростей деформаций,  $d(x) = (3b(x) - 1)/9b(x)$ ). Умножая (1.2) скалярно на  $\varepsilon_{ij}$ , получим соотношение для диссипативной функции  $D(x) = \sigma_{ij}(x)\varepsilon_{ij}(x)$ , с помощью которого выражение для закона течения упрощается:

$$(1.3) \quad \sigma_{ij}(x) = \frac{k^2(x)}{D(x)} \varepsilon_{ij} - \frac{k^2(x) d(x)}{D(x)} \varepsilon_{ll} \delta_{ij}.$$

Аналогично [5] будем предполагать, что диссипативная функция однородна в пределах каждого компонента  $\alpha = 0, 1, \dots, N$ ,  $D_\alpha = \text{const}$  и  $D_\alpha = \sqrt{\langle k^2 \varepsilon_{mn} \varepsilon_{mn} - k^2 d \varepsilon_{ll}^2 \rangle_\alpha}$ , здесь и ниже приняты обозначения:  $\langle (\cdot) \rangle_\alpha = \bar{V}_\alpha^{-1} \int (\cdot) V_\alpha(x) dx$ ,  $\langle (\cdot) \rangle = \bar{W}^{-1} \int (\cdot) W(x) dx$  и  $\langle (\cdot) | x_2; x_1 \rangle$  — условное среднее по ансамблю эргодичного статистически однородного поля  $X(\cdot | x_1)$  при допущении, что в точках  $x_1$  и  $x_2$  находятся включения и  $x_1 \neq x_2$ ;  $\bar{V}_\alpha = \text{mes } V_\alpha$ ;  $V_0 = W \setminus V = W \setminus \bigcup_{k=1}^N V_k$ . Включения относятся к разным фазам, если имеют различные (хотя бы один) параметры  $a_k, \omega_k, k_k, b_k$ . Подставляя (1.3) в уравнение равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$ , получим

$$(1.4) \quad \nabla L_0 \nabla u = -V \nabla (L_1 - L_0) \nabla u,$$

где  $\nabla$  — операция симметризованного градиента,  $\varepsilon \equiv \nabla u$ , а изотропные тензоры  $L_0, L_1$  при  $x \in V_\alpha$  могут быть записаны в виде

$$(1.5) \quad L_0 \equiv (3k^0, 2\mu^0) \equiv 3k^0 N_1 + 2\mu^0 N_2, \quad L_1(x) = (3k^1(x), 2\mu^1(x)), \\ N_1 = \delta_{ij} \delta_{kl} / 3, \quad N_2 = (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - (2/3) \delta_{ij} \delta_{kl}) / 2, \\ 3k^0 = k_0^2 (1 - 3d_0), \quad 2\mu^0 = k_0^2, \quad 3k^1(x) = k_1^2(x) (1 - 3d_1) D_0 / D_\alpha, \\ 2\mu^1(x) = k_1^2 D_0 / D_\alpha \quad (x \in V_\alpha).$$

Уравнение (1.4) с точностью до обозначений совпадает с аналогичным соотношением в линейной упругой задаче механики композитов [1, 2]. Поскольку эффекты нелинейности проявляются только в зависимости  $L_1$  от  $D_\alpha$ , а  $L_0 = \text{const}$ , то задача (1.4) есть частный случай упругой физически нелинейной задачи [7] и может быть решена предложенным в [1, 2] вариантом метода эффективного поля. Именно уравнение (1.4) сводится к интегральному [1, 2] с помощью фундаментального решения [8]:

$$U_{ij}(x) = (8\mu^0 \pi)^{-1} (\delta_{ij} |x|_{,pp} - \kappa^0 |x|_{,ij}), \quad \kappa^0 = (3k^0 + \mu^0) / (3k^0 + 4\mu^0), \\ \varepsilon(x) = \langle \varepsilon \rangle + \int G(x-y) \{ [L] \varepsilon(y) - \langle [L] \varepsilon \rangle \} dy$$

( $G(x) = \nabla \nabla U(x)$ ,  $[L^{(k)}] = (L_1(x_k) - L_0) V_k$  — кусочно-постоянный тензор, отличный от нуля только внутри включений,  $[L] = \sum_k ([L^{(k)}])$ ); интегрирование везде проводится по  $W$ .

Зададимся структурой композита с помощью бинарной корреляционной функции  $\varphi(x_k, \omega_k | x_i, \omega_i)$  — вероятного расположения  $k$ -го включения во множестве  $X$  при фиксированном  $i$ -м включении. Примем, что  $\varphi$  центрально-симметрична:

$$(1.6) \quad \varphi(x_k, \omega_k | x_i, \omega_i) = \psi(\omega_k) f_k(|x_i - x_k|) \bar{W}^{-1}.$$

Здесь  $f_k(|x_i - x_k|) = 0$  при  $x_k \in v'_i$  и  $f_k(|x_i - x_k|) = n_k$  при  $x_k \notin v'_i$ ;  $v'_i$  — шар радиуса  $a_{ik} = \max_j (a_i^j + a_k^j)$  с центром в  $x_i$ ;  $n_k$  — счетная кон-

центрация включений компонента  $X_k \subset X$  — связана с их объемной концентрацией  $c_k = (4/3) \pi a_k^1 a_k^2 a_k^3 n_k$ ,  $c = \sum_{k=1}^N c_k$ ;  $\psi(\omega_k)$  — плотность распределения ориентаций включений компонента  $X_k$ .

Фиксируем включение с номером  $i$ , тогда, выделяя из правой части (1.5) слагаемое, равное локальному внешнему полю  $\bar{\varepsilon}_i$ , в котором находится  $i$ -е включение, с помощью осреднения по  $\varphi$  (1.6) найдем

$$(1.7) \quad \langle \bar{\varepsilon}_i \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \int G(x-y) \{ \langle [L(y)] \varepsilon(y) V(y; x_i) | y; x_i \rangle - \langle [L] \varepsilon \rangle \} dy$$

( $(V(y; x) = \bigcup_{k=1} V_k \setminus V_i(x_i))$ ). Для замыкания (1.7) нужно установить зависимость между полями  $\bar{\varepsilon}_i$  и  $\varepsilon(x_i)$ , а также между  $\bar{\varepsilon}(x_i)$  и  $\bar{\varepsilon}(y)$ .

2. Решим задачу (1.7) для случая, когда множество  $X$  состоит из одного и двух включений. Поскольку по предположению  $L_0, L_1 = \text{const}$  в матрице и включениях, то уравнение (1.7) с точностью до обозначений совпадает с аналогичным соотношением линейной теории упругости композитов [1] и для одного включения, находящегося в заданном на бесконечности однородном поле  $\varepsilon^0 \equiv L_0^{-1} \sigma$ , поля скоростей деформаций  $\varepsilon_i$  и напряжений  $\sigma_i$  внутри включения также однородны:

$$(2.1) \quad \varepsilon_i(x) = A_i \varepsilon^0, \quad A_i = (I + P_i [L])^{-1}, \quad \sigma_i = B_i \sigma \equiv L_1 A_i L_0^{-1} \sigma$$

( $x \in v_i$ , постоянный тензор  $\bar{P}_i \equiv - \int G(x-y) V_i(y) dy$  известен [8]).

Решение задачи о бинарном взаимодействии включений, находящихся в бесконечной матрице с заданным на бесконечности однородным полем  $\varepsilon^0$ , может быть построено методом последовательных приближений. Так, из уравнения

$$(2.2) \quad \varepsilon(x) = \varepsilon^0 + \int G(x-y) [L] \varepsilon(y) [V_i(y) + V_j(y)] dy$$

с учетом первых итераций найдем необходимое при решении (1.7) соотношение

$$(2.3) \quad G(x_i - x_j) [L^{(j)}] \varepsilon(x_j) \bar{V}_j = G(x_i - x_j) R_j \varepsilon^0(x_j) + G(x_i - x_j) R_i \varepsilon^0(x_i),$$

при получении которого принято допущение о точечном характере включений [1, 2] и однородности полей  $\varepsilon(x_i)$  внутри каждого включения;  $R_i = [L^{(i)}] A_i \bar{V}_i$ .

Заметим, что при указанных предположениях задача (2.2) может быть решена методами линейной алгебры:

$$(2.4) \quad G(x_i - x_j) R_j \bar{\varepsilon}(x_j) V_j = G(x_i - x_j) R_j \{ (Z^{-1})_{ji} \varepsilon^0(x_i) + (Z^{-1})_{jj} \varepsilon^0(x_j) \},$$

где  $(Z^{-1})_{ij}$  — матрица, обратная к матрице  $Z$  с элементами  $Z_{mn}$  ( $m, n = 1, 2$ ) в виде подматриц

$$(2.5) \quad Z_{mn} = I \delta_{mn} + G(x_m - x_n) R_n (1 - \delta_{mn}).$$

В (2.4), (2.5)  $\bar{\varepsilon}(x)$ ,  $\varepsilon^0(x)$  представлены векторами размерности 6, а  $[L]$ ,  $A$ ,  $R$  — матрицами  $6 \times 6$ ; правило перехода от тензора второго и четвертого рангов к векторам и матрицам описано в [8]. Таким образом, включение  $v_i$  находится в однородном поле, зависящем от геометрических и механических свойств рассматриваемого включения.

3. При получении соотношения для  $\langle \bar{\varepsilon}_i \rangle$  из (1.7) воспользуемся гипотезами эффективного поля [1, 2], согласно которым поле  $\bar{\varepsilon}_i$  однородно в окрестности каждого точечного включения и зависит от свойств этого включения, а каждая пара включений  $v_i, v_j$  находится в своем эффективном поле  $\bar{\varepsilon}_{ij}$ , не зависящем от свойств изучаемой пары. Эти гипотезы позволяют преобразовать (1.7), (2.1), (2.4) в систему уравнений относи-

тельно  $\langle \bar{\varepsilon}_i \rangle$  путем замены  $\varepsilon^0(x_i)$  в (2.1), (2.4) на  $\langle \bar{\varepsilon}_i \rangle$ :

$$(3.1) \quad \langle \bar{\varepsilon}_i \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \sum_{v=1}^N P(V_{iv}^0) R_v n_v \langle \bar{\varepsilon}_v \rangle + \sum_{v=1}^N \int G(x_i - x) R \{ (Z^{-1})_{vv} - I \} \times \\ \times (1 - V_{iv}^0) n_v dx \langle \bar{\varepsilon}_v \rangle + \sum_{v=1}^N \int G(x_i - x) R_v (Z^{-1})_{vi} n_v (1 - V_{iv}^0) dx \langle \bar{\varepsilon}_i \rangle.$$

Интегралы в (3.1) абсолютно сходятся, поскольку при  $|x_i - x| \rightarrow \infty$   $(Z^{-1})_{vv} \rightarrow I$ ,  $(Z^{-1})_{vi} \rightarrow 0$ . Тензоры второго и четвертого рангов в (3.1) представим в виде векторов размерности  $(6 \times 1)$  и матриц  $(6 \times 6)$ . Сформируем из вектора  $\langle \varepsilon \rangle^T$  вектор размерности  $(6 \times 1)$   $\langle E \rangle^T = (\langle \varepsilon \rangle^T, \dots, \langle \varepsilon \rangle^T)$  (т — знак транспонирования), аналогично образуем  $\langle \bar{E} \rangle^T = (\langle \bar{\varepsilon}_1 \rangle^T, \dots, \langle \bar{\varepsilon}_N \rangle^T)$ . Тогда система (3.1) может быть представлена в матричном виде

$$(3.2) \quad Y \langle \bar{E} \rangle = \langle E \rangle,$$

где элементами матрицы  $Z = Z_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ) служат подматрицы

$$Y_{ij} = \delta_{ij} \left( I - \sum_{v=1}^N \int G(x_i - x) R_v (Z^{-1})_{vi} n_v (1 - V_{iv}^0) dx \right) - \\ - P(V_{ij}^0) R_j n_j - \int G(x_i - x) R_j \{ (Z^{-1})_{jj} - I \} n_j (1 - V_{ij}^0) dx.$$

Обращая матрицу  $Y$ , находим

$$(3.3) \quad \langle \bar{\varepsilon}_i \rangle = \sum_{j=1}^N (Y^{-1})_{ij} \langle \varepsilon_j \rangle.$$

Для получения аналитического выражения для  $\langle \bar{\varepsilon}_i \rangle$  воспользуемся вместо точного решения (2.4) итерационным приближением (2.3), тогда  $(Z^{-1})_{vv} = I$ ,  $(Z^{-1})_{vi} = G(x_i - x) R_v$ . Это приводит к тому, что часть интегралов в (3.1) исчезает, а остальные могут быть вычислены аналитически. Если принять, кроме того, допущения  $\langle \bar{\varepsilon}_i \rangle = \langle \bar{\varepsilon} \rangle = \text{const}$  [1, 2] и  $\bar{V}_{iv}^0 = V_1^0$  — шар радиуса  $2a_1^1$ , то, осредняя (3.1) по  $\omega_i, a_i$ , получим

$$(3.4) \quad \langle \bar{\varepsilon} \rangle = D^e \langle \varepsilon \rangle, \quad D^e = \left( I - P(V_i^0) \sum_v \langle R_v n_v \rangle - \sum_v \int J^0(x) dx \right)^{-1}.$$

Здесь  $J^0(x) = \ll G(x_i - x) R_v G(x_i - x) R (1 - \bar{V}_i^0) \gg_{iv}$ ;  $\ll \cdot \gg_{iv}$  означает операцию осреднения по  $\omega_i, a_i, \omega_v, a_v$  на сфере радиуса  $|x_i - x|$  с центром  $x_i$ . Аналогично находим тензор концентраций напряжений  $D^\sigma$  на включениях компонента  $i$ , который в аналитической форме имеет вид

$$(3.5) \quad \langle \bar{\sigma} \rangle = D^\sigma \langle \sigma \rangle, \quad D^\sigma = \left( I - Q(V_i^0) \sum_v \langle \bar{R}_v n_v \rangle - \sum_v \int J^0(x) dx \right)^{-1},$$

$$Q_v = L_0 (I - P_v L_0), \quad \bar{R}_v = B_v [M^{(v)}] \bar{V}_v, \quad [M^{(v)}] = \{ L_1^{-1}(x) - L_0^{-1} \} V_v.$$

Тензор  $J^0(x)$  в случае, если  $\langle R_v \rangle$  ( $v = 1, \dots, N$ ) изотропны, также является изотропным, его значения приведены в [1]. Тензоры  $D^e, D^{ei} \equiv \sum_{j=1}^N (Y^{-1})_{ij}$  в (3.3), характеризующие собой концентрацию скоростей деформаций, вызванных окружающими включениями, позволяют определить эффективные характеристики среды. Для этого осредним локальный закон течения по представительному объему  $W$ ; в тензорном виде получим  $D_0 \langle \sigma \rangle = L_0 \langle \varepsilon \rangle + \sum_i [L^{(i)}] \langle \varepsilon \rangle_i$ . С учетом предположения об однородности поля  $\langle \bar{\varepsilon}_i \rangle$  и соотношений (2.1), (3.3), (3.4) находим

$$(3.6) \quad D_0 \langle \sigma \rangle = L^* \langle \varepsilon \rangle, \quad L^* = L_0 + \sum_i \langle R_i n_i \rangle D^{ei};$$

$$(3.7) \quad (M^* \langle \sigma \rangle) \langle \sigma \rangle = D^* / D_0, \quad D^* = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle$$

$(M^* = (L^*)^{-1})$ . Если вместо соотношения (3.3) использовано (3.4), нужно в (3.6) заменить  $D^{\varepsilon i}$  на  $D^\varepsilon$ .

4. До сих пор полагали, что  $L_1(x_k)$  известны, но по предположению эти тензоры зависят через диссипирующие функции  $D_0, D_k$  от неизвестных полей напряжений и скоростей деформаций в компонентах. При вычислении  $D_0, D_k$  сделаем ряд допущений. Если подобно [3] принять гипотезу об отсутствии флуктуаций  $D_\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, N$ ) не только в пределах компонента  $X_\alpha$ , но и во всем объеме  $W$ , то (3.7) является явным выражением для макроповерхности текучести композитной среды. Действительно, при  $D_\alpha = D^* = \text{const } D_0/D_k = 1$  ( $k = 1, \dots, N$ ) и тензор  $L_1$ , а значит, и  $R_k, D^\varepsilon, M$  не зависят от полей напряжений и скоростей деформаций. В общем случае  $L^*$  анизотропен, но при равновероятной ориентации включений  $L^*$  изотропен и макроповерхность текучести среды будет задаваться уравнением, аналогичным (1.1), с эффективными параметрами

$$(4.1) \quad k^* = (2L_2^*)^{1/2}, \quad b^* = 2L_2^*/(9L_1^*)$$

$(3L_1^*, 2L_2^*$  — компоненты изотропного тензора  $L^* = (3L_1^*, 2L_2^*)$ ).

Ослабим допущение об однородности локальной диссипативной функции и будем считать, что  $D_\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, N$ ) постоянна только в пределах рассматриваемого компонента  $X_\alpha$ . Подобно [5, 6], примем аппроксимацию для диссипативной функции в виде  $D_\alpha = \sqrt{\langle (\bar{L}^\alpha \varepsilon) \varepsilon \rangle_\alpha}$ , где  $\bar{L}^\alpha = L^{(\alpha)} D_\alpha D_0^{-1}$ ,  $L^{(\alpha)} = L_0$  при  $V_0(x) = 1$  и  $L^{(\alpha)} = L_1(x_\alpha)$  при  $x \in v_\alpha$ . В силу однородности полей напряжений внутри включений примем приближенно  $D_k^2 = \langle (\bar{L}^k \varepsilon) \varepsilon \rangle_k = \langle \bar{L}^k \varepsilon \rangle_k \langle \varepsilon \rangle_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) [5, 6], более точные соотношения могут быть получены с помощью оценки корреляционной функции полей напряжений на включениях по методу [2], а  $D_0$  — из очевидных соотношений

$$(4.2) \quad \langle V'_k \varepsilon' \rangle = c_k (\langle \varepsilon \rangle_k - \langle \varepsilon \rangle), \quad (1 - c) \langle (L_0 \varepsilon) \varepsilon \rangle_0 = \\ = \langle L_0 \varepsilon \rangle \langle \varepsilon \rangle + \langle (L_0 \varepsilon') \varepsilon' \rangle - \sum_k c_k \langle L_0 \varepsilon \rangle_k \langle \varepsilon \rangle_k$$

(штрихом отмечаются флуктуации  $f' = f - \langle f \rangle$ ). Тогда, учитывая, что при преобразовании объемного интеграла по первой формуле Грина значение поверхностного интеграла по  $\partial W$ , отнесенное к  $\text{mes } W$ , стремится к нулю при  $\text{mes } W \rightarrow \infty$ , и используя уравнения (1.4), (3.6), получим

$$(4.3) \quad \langle (L_0 \varepsilon') \varepsilon' \rangle = - \sum_k c_k \langle [L^{(k)}] \varepsilon \rangle_k (\langle \varepsilon \rangle_k - \langle \varepsilon \rangle).$$

При выводе последнего равенства учтен, как в [5], только первый член разложения (2.3), более точные оценки могут быть найдены по методу [2]. Таким образом, диссипативные функции зависят только от однородных полей  $\langle \varepsilon \rangle, \langle \varepsilon \rangle_k$  и, значит, могут быть выражены с помощью соотношений (2.1), (3.4), (4.2), (4.3) через  $\langle \varepsilon \rangle$ :

$$(4.4) \quad D_k^\varepsilon = (\bar{L}^k A_k D^\varepsilon \langle \varepsilon \rangle) (A_k D^\varepsilon \langle \varepsilon \rangle), \\ D_0^2 = (1 - c)^{-1} \left\{ (L^* \langle \varepsilon \rangle) \langle \varepsilon \rangle - \sum_k c_k (\langle L^{(k)} A_k D^\varepsilon \rangle \langle \varepsilon \rangle) (\langle A_k D^\varepsilon \rangle \langle \varepsilon \rangle) \right\}.$$

Поскольку в формулах (2.1), (3.4)  $A_k, D^\varepsilon$  зависят от диссипативных функций  $D_0, D_k$ , то в общем случае  $D_0, D_k$  могут быть получены методом последовательных приближений. Именно на нулевой итерации  $D_\alpha = D = \text{const } V\alpha$ , тогда нулевые приближения  $A_k, D^\varepsilon$  не зависят от  $D_\alpha$  и первое приближение для  $D_\alpha$  может быть найдено по уравнениям (4.4). затем по (1.5), (2.1) и (3.4) вычисляем первое приближение  $L_k, A_k, D^\varepsilon$ , переходим к (4.4) и т. д.

5. Рассмотрим практически важные случаи, когда удается построить  $L^*$  в явном виде. Сюда относятся среды с абсолютно жесткими включениями и порами, когда  $D_k = 0$  ( $k = 1, \dots, N$ ) и  $L_1(x_k)$  не зависят от дис-

сипативных функций  $D_\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, N$ ). Для равновероятно ориентированных включений компоненты изотропного тензора  $J_{ij} = (3J_{ij}^1, 2J_{ij}^2)$  известны [1]:

$$\begin{aligned} 3J_{ij}^1 &= 2(\widehat{3k}_i)(2\widehat{2\mu}_j)\xi^2|r|^{-6}, \\ 2J_{ij}^2 &= \frac{2}{5}[(\widehat{3k}_j)(2\widehat{2\mu}_i)\xi^2 + (2\widehat{2\mu}_i)(2\widehat{2\mu}_j)(7\gamma^2 + 2\xi\eta - \eta^2/4)]|r|^{-6}, \\ \xi &= (3k^0 + 4\mu^0)^{-1}, \eta = (3\mu^0)^{-1}, \gamma = (3k^0 + \mu^0)(3\mu^0(3k^0 + 4\mu^0))^{-1}, \\ (\widehat{3k}_i, 2\widehat{2\mu}_i) &= \prod_{n=1}^3 a_i^n \int A_i[L^{(i)}] d\omega_i. \end{aligned}$$

Пусть в пластически несжимаемую матрицу помещены шаровые поры одного размера. Тогда  $L_0 = (\infty, k_0^2)$ ,  $D^\sigma = ([1 - (29/24)c]^{-1}, [1 - (35/24)c]^{-1})$ ,  $J(r) = (5/3, 11/3)a^6/|r|^{-6}$ , значения  $D^\sigma$  для плоских сфероидалных пор могут быть получены аналогично [9]. Тензоры  $A, R$  не зависят от диссипативных функций, что позволяет найти

$$L^* = k_0^2(2/c - 29/12, [1 - (35/24)c][1 + (5/24)c]^{-1}), D^* = (1 - c)D_0$$

и эффективные параметры среды

$$(5.1) \quad \begin{aligned} (k^*)^2 &= k_0^2(1 - c)(1 - (35/24)c)(1 + (5/24)c)^{-1}, \\ b^* &= c(1 - (35/24)c)[6(1 + (5/24)c)(1 - (29/24)c)]^{-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что аналогичные оценки

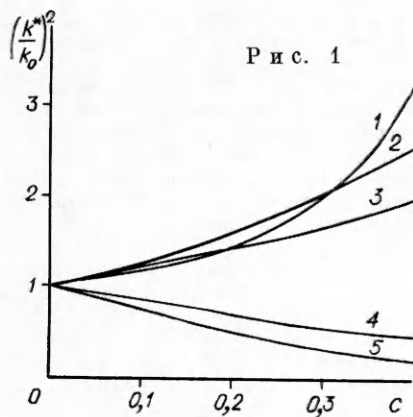
$$(5.2) \quad (k^*)^2 = k_0^2(1 - c)(1 + (2/3)c)^{-1}, b^* = c/6(1 + (2/3)c)^{-1},$$

найденные с применением гипотезы «сильной изотропии» [3], имеют отличие первого порядка малости по  $c$  от (5.1). На рис. 1 кривые 4 и 5 рассчитаны по формулам (5.2) и (5.1) соответственно. На рис. 2 приведены экспериментальные данные [10] (точки) по уплотняемости спеченного электролитического никеля, подвергавшегося одноосному сжатию в пресс-форме ( $k_0 = 1,14$  МПа). Из ассоциированного закона течения, отвечающего (1.1) с эффективными параметрами (5.2), (5.1), на рис. 2 рассчитаны кривые 1, 2 зависимости давления  $p$  внутри такой пресс-формы от  $c$ , асимптотические близкие при малых  $c$  и отличающиеся на 30 % по  $p$  при  $c \sim 0,40$ . Более точная кривая 2 будет смещаться влево вдоль оси  $p$  тем больше, чем больше эллипсоидальные включения отличаются от шаровых, принятых в расчетах (5.1).

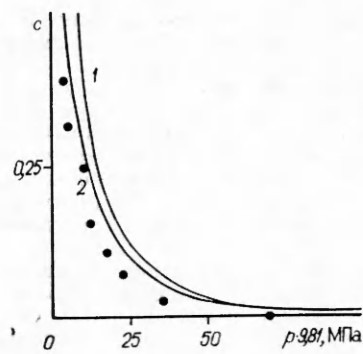
Рассмотрим противоположный случай, когда при достаточно малых напряжениях ( $\sigma$ ) включения ведут себя как жесткие частицы. Последние начинают деформироваться при достижении критических напряжений. Для недеформируемых включений в пластически несжимаемой матрице  $k_1 = \infty$ ,  $b_0 = 0$ ,

$$(5.3) \quad \begin{aligned} L^* &= (0, k_0^2[1 + (5/2)c\{1 - (31/16)c\}^{-1}]); \\ (k^*)^2 &= k_0^2(1 - c)[1 + (5/2)c\{1 - (31/16)c\}^{-1}]. \end{aligned}$$

На рис. 1 кривые 1—3 рассчитаны по формулам (5.3), [5] и [3] соответственно. В случаях (5.1), (5.3) относительное изменение эффективных параметров  $L^*/L_0$  коррелирует с относительным изменением эффективных модулей упругости [1, 2], где также проведено сравнение экспериментальных данных по относительной вязкости ньютоновских суспензий с расчетами по различным методам. Показано, что использование предложенного метода эффективного поля [1, 2] позволяет при  $c > 0,4$  существенно (в 2 раза) уточнить расчетный модуль сдвига по сравнению с другими методами, что согласуется с экспериментом. Полученные значения тензора концентраций напряжений  $D^\sigma = (1 + (9/16)c)^{-1}$  позволяют най-



Р и с . 1



Р и с . 2

ти критическое значение макронапряжений  $\langle \sigma \rangle$ , при котором напряжения включений достигают предела пластичности:

$$(25/4)(1 + (9/16)c)^{-1} I_2^* + d_1 I_1^{*2} = k_1^2.$$

После достижения критического напряжения, определяемого инвариантами  $I_1^*$ ,  $I_2^*$ , реологическая модель описывается общими соотношениями (3.4)–(3.6), учитывающими пластичность включений.

Таким образом, предложенный метод эффективного поля позволяет учесть неоднородность полей напряжений в матрице и бинарное взаимодействие включений и приводит к уточнению расчетных эффективных параметров пластичности композитной среды в рассмотренных примерах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буряченко В. А., Липанов А. М. Концентрация термоупругих напряжений на эллипсоидальных включениях и эффективные термоупругие свойства композитных материалов // ПМ.— 1986.— Т. 22, № 11.
2. Буряченко В. А. Корреляционная функция полей напряжений в матричных композитах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 3.
3. Сараев Л. А. К теории идеальной пластичности многокомпонентных смесей // ПМТФ.— 1984.— № 6.
4. Исупов Л. П., Работнов Ю. Н. О законе пластичности для композитной среды // Изв. АН СССР. МТТ.— 1985.— № 1.
5. Дудукаленко В. В., Лысач Н. Н. О пластических свойствах материала, содержащего пластинчатые включения // Изв. АН СССР. МТТ.— 1980.— № 1.
6. Дудукаленко В. В., Шаповалов С. П. Об установившейся ползучести огнеупорных композитов // ПМТФ.— 1984.— № 4.
7. Маслов Б. П., Хорошун Л. П. Эффективные характеристики упругих, физически нелинейных неоднородных сред // Изв. АН СССР. МТТ.— 1977.— № 2.
8. Шермергор Т. Д. Теория упругости микрон неоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
9. Буряченко В. А., Липанов А. М. Уравнения механики газонасыщенных пористых сред // ПМТФ.— 1986.— № 4.
10. Мартынова И. Ф., Скороход В. В. Уплотнение пористого металла при объемном пластическом деформировании в отсутствие деформационного упрочнения // Порошковая металлургия.— 1976.— № 5.

Поступила 19/XI 1986 г.,  
в окончательном варианте — 18/I 1988 г.

УДК 539.214 : 539.374 : 539.375

### ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТЫ НА КИНЕТИКУ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ВПЕРЕДИ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

А. Д. Волков  
(Москва)

Для того чтобы иметь возможность исследовать основные механизмы усталости, необходимо исключить влияние возможно большего числа параметров и проводить эксперименты в простых контролируемых условиях. Для построения физически правдоподобной теории роста трещины очень важно иметь четкое представление о характере, механизме и степени влияния каждого исключаемого параметра. Это особенно