Ю. А. Алхутов, М. Д. Сурначев, Поведение в граничной точке решений задачи Дирихле для $p(x)$-лапласиана, *Алгебра и анализ*, 2019, том 31, выпуск 2, 88–117

Алгебра и анализ
Том 31 (2019), №2

Владимиру Гилелевичу Мазье.
Блажен человек, который снискал мудрость
Книга Притчей Соломоновых. Глава 3. Стих 13

ПОВЕДЕНИЕ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ $p(x)$-ЛАПЛАСИАНА

© Ю. А. АЛХУТОВ, М. Д. СУРНАЧЁВ

Рассмотрена задача Дирихле для $p(x)$-лапласиана с непрерывной граничной функцией. Дано достаточное условие регулярности граничной точки и установлена оценка модуля непрерывности решений в этой точке.

§1. Введение

В работе исследуется поведение в граничной точке решений задачи Дирихле в ограниченной области $\mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 2$, для эллиптического уравнения

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = 0 \tag{1}$$

с измеримым показателем p, отделенным от единицы и бесконечности:

$$1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty \quad \text{для почти всех } x \in D. \tag{2}$$

Уравнение (1) относится к широкому классу эллиптических уравнений с нестандартными условиями коэрцитивности и роста и является уравнением Эйлера для вариационных задач с интегрантом $|\nabla u|^{p(x)}/p(x)$. Основополагающие результаты для таких уравнений принадлежат В. В. Жикову (см. [1]), который в начале 1980-х годов исследовал вариационные задачи с нестандартными интегрантами в контексте усреднения и эффекта Лаврентьева. Большую роль в этом направлении сыграла известная

Ключевые слова: критерий Винера, граничная регулярность, задача Дирихле, переменный показатель, $p(x)$-лапласиан.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (задание №1.3270.2017/4.6) и РФФИ (проект №19-01-00184-а).

работа [2], где был рассмотрен вопрос обоснования математических моделей композитных материалов. Впоследствии выяснилось, что такого рода задачи связаны с моделированием электро- и термореологических жидкостей, свойства которых существенно меняются под воздействием приложенного электромагнитного поля или температуры [3–7].

Прежде чем определить решение задачи Дирихле с непрерывной граничной функцией, введем понятие решений уравнения (1). С этой целью рассмотрим класс функций

$$W(D) = \Big\{u \in W^{1,1}(D): \ |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D)\Big\},$$

где $W^{1,1}(D)$ — соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка. Сходимость последовательности $u_j \in W(D)$ к функции $u \in W(D)$ определяется следующим образом: $u_j \to u$ в $W(D)$, если $u_j \to u$ в $L^1(D)$ и

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_D |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)}\,dx = 0. \tag{3}$$

Нам ещё потребуется подкласс $W_0(D)$ класса $W(D)$, состоящий из функций u, для которых существует последовательность $u_j \in W(D)$ с компактным носителем в D, удовлетворяющая соотношению (3). Для сходимости последовательности $u_j \in W_0(D)$ к функции $u \in W_0(D)$ достаточно выполнения только равенства (3).

Из результатов работы [2] следует, что одного только предположения (2) недостаточно для плотности гладких функций в классах $W(D)$ и $W_0(D)$. Плотность гладких функций в данных классах обеспечивается выполнением известного логарифмического условия

$$|p(x) - p(y)| \leqslant k_0\biggl(\ln\frac{1}{|x-y|}\biggr)^{-1} \quad \text{при } x, y \in D, \quad |x-y| < 1/2, \tag{4}$$

найденного В. В. Жиковым в работе [8].

Поэтому в общем случае можно ввести функциональные классы, порожденные гладкими функциями:

$$\begin{aligned} H(D) &= \{u \in W(D)\colon \exists u_j \in C^\infty(D) \cap W(D),\ u_j \to u \text{ в } W(D)\},\\ H_0(D) &= \{u \in W(D)\colon \exists u_j \in C_0^\infty(D),\ u_j \to u \text{ в } W_0(D)\}. \end{aligned}$$

При отсутствии плотности гладких функций в классе $W(D)$ решение уравнения (1) может пониматься в различных смыслах (см. [8, 9]) и естественно определить два типа решений. Функция $u \in W(D)$ $(u \in H(D))$

называется W-решением (H-решением) уравнения (1), если равенство

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2}\, \nabla u \cdot \nabla\psi\, dx = 0 \tag{5}$$

выполнено для всех $\psi \in W_0(D)$ ($\psi \in H_0(D)$). Будем говорить, что $u \in W(D)$ ($u \in H(D)$) является W-суперрешением (H-суперрешением) уравнения (1), если для всех неотрицательных $\psi \in W_0(D)$ ($\psi \in H_0(D)$) имеет место неравенство

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2}\, \nabla u \cdot \nabla\psi\, dx \geqslant 0. \tag{6}$$

Введенные W-решения и H-решения связаны с задачами Дирихле

$$Lu = 0 \text{ в } D, \quad u \in W(D), \quad f \in W(D), \quad (u - f) \in W_0(D) \tag{7}$$

и

$$Lu = 0 \text{ в } D, \quad u \in H(D), \quad f \in H(D), \quad (u - f) \in H_0(D). \tag{8}$$

Эти задачи ввёл В. В. Жиков в [9] под названием задач первого и второго рода. Он же заметил, что если коразмерность класса H в W больше единицы, то существуют и другие промежуточные задачи Дирихле и соответствующие им решения уравнения (1).

Решение задач (7) и (8) связано с минимизантами w вариационных задач

$$\min_{w\in W_0(D)} F(w+f), \quad F(v) = \int_D \frac{|\nabla v|^{p(x)}}{p(x)}\, dx \tag{9}$$

и

$$\inf_{w\in C_0^\infty(D)} F(w+f) = \min_{w\in H_0(D)} F(w+f), \tag{10}$$

соответственно, соотношением $u = w + f$.

Для областей с липшицевой границей однозначная разрешимость задач (9) и (10) при выполнении одного только условия (2) известна из работ [8] и [10]. В случае произвольной области этот результат получен в [11]. Более простое доказательство содержится в работе [12].

Настоящая работа посвящена исследованию граничных свойств решений обобщенной задачи Дирихле

$$Lu_f = 0 \text{ в } D, \quad u|_{\partial D} = f \tag{11}$$

с непрерывной на ∂D функцией f. Для определения решений задачи (11) продолжим функцию f по непрерывности на всё пространство и пусть $f_k \in C^\infty(\overline{D})$ — последовательность функций, равномерно сходящаяся к f

в $\overline{D}$. Построим решения u_k задач Дирихле (7) (или (8)), соответствующие граничным функциям f_k. В §4 работы [12] показано, что последовательность u_k сходится равномерно в области D к функции, ограниченной максимумом модуля f, которая в любой подобласти $D' \Subset D$ будет W-решением (соответственно, H-решением) уравнения (1). Предельная функция u_f определена однозначно, не зависит от способа продолжения функции f, выбора её гладких приближений, и называется обобщенным W-решением (H-решением) задачи Дирихле (11). Однако, будет ли предельная функция u_f иметь предельное значение на границе, совпадающее с f, вообще говоря, неясно.

Определение. Граничная точка $x_0 \in \partial D$ называется регулярной, если

$$\operatorname*{ess\,lim}_{D \ni x \to x_0} u_f(x) = f(x_0)$$

для любой непрерывной на ∂D функции f.

Для линейных эллиптических уравнений построение обобщенной задачи Дирихле можно проводить различными способами. Например, с помощью метода Пуанкаре–Перрона [14], или приближая область изнутри областями с гладкой границей, как это делал N. Wiener в работах [15, 16]. В [17] установлена эквивалентность данных способов для уравнения Лапласа. Для нелинейных эллиптических уравнений типа p-лапласиана метод Пуанкаре–Перрона изложен в [18]. Применение описанных методов в нашем случае проблематично, поскольку решения уравнения (1) не обязаны быть непрерывными в области D. Мы использовали более простую конструкцию построения обобщенного решения задачи Дирихле, изложенную для линейных эллиптических уравнений дивергентного вида в обзорной статье [19].

Понятие регулярности граничной точки восходит к А. Лебегу, он же в 1913 году в работе [20] привел пример нерегулярной граничной точки для уравнения Лапласа. Критерий регулярности граничной точки для уравнения Лапласа получен Н. Винером в работах [15] и [16]. Для линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка аналогичный результат установлен в статье [21], а оценка модуля непрерывности решения задачи Дирихле в регулярной граничной точке получена В. Г. Мазьёй в работах [22] и [23]. Достаточное условие регулярности граничной точки винеровского типа, оценка модуля непрерывности решения вблизи границы и геометрические условия регулярности для p-лапласиана впервые найдены В. Г. Мазьей в [24]. Им же в совместной работе [25] показано, что найденное достаточное условие регулярности граничной точки является точным, если дополнение области является воронкой вращения с вершиной в этой точке. Позже результаты В. Г. Мазьи о регулярности граничной точки были распространены на широкий класс квазилинейных эллиптических уравнений типа p-лапласиана в статье [26]. Необходимость найдённого В. Г. Мазьёй условия регулярности граничной точки для уравнений типа p-лапласиана была установлена в работе [27] для $n-1 < p \leqslant n$, а в общем случае в [28]. Критерий регулярности граничной точки для уравнения (1) при выполнении условия (4) получен в работе [11]. Позже в статье [12] этот результат был распространен на случай, когда показатель $p(x)$ обладает логарифмическим модулем непрерывности в фиксированной граничной точке.

Настоящая работа посвящена исследованию поведения в граничной точке $x_0 \in \partial D$ решения обобщенной задачи Дирихле u_f с непрерывной граничной функцией f. Данное решение может быть как W-решением, так и H-решением. В дальнейшем мы будем называть его просто решением задачи Дирихле. Предполагается, что показатель p непрерывен в граничной точке $x_0 \in \partial D$ и

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B_r^{x_0}\cap D} p \leqslant \omega(|x-x_0|), \tag{12}$$

где $B_r^{x_0}$ — открытый шар радиуса r с центром в x_0, а ω — непрерывная, неубывающая на отрезке $[0,d]$ функция и $\omega(0)=0$. Определим также функцию

$$\theta(r) = r^{-\omega(r)}. \tag{13}$$

Далее будем предполагать, что $\theta(r)$ является невозрастающей функцией на полуинтервале $(0,d]$.

Для формулировки результата введём понятие ёмкости. Предварительно продолжим показатель p на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением свойств (2), (12). Например, можно положить $p(x)=p(x_0)$ при $x\in\mathbb{R}^n\setminus D$. Ниже полагается

$$w_- = \max(-w,0), \quad w_+ = \max(w,0).$$

Определение 1. Для области Ω и множества $E \subset \overline{\Omega}$ класс $W_0(\Omega,E)$ ($H_0(\Omega,E)$) определяется как множество функций из $W(\Omega)$ ($H(\Omega)$), таких, что существует последовательность функций $u_j \in W(\Omega)$ (соотвственно, $u_j \in C^\infty(\Omega)\cap W(\Omega)$), равных нулю в окрестности $\overline{E}\cap\overline{\Omega}$ и сходящихся к u в $W(\Omega)$. Будем говорить, что $u \geqslant v$ на множестве E, если $(u-v)_- \in W_0(\Omega,E)$ ($(u-v)_- \in H_0(\Omega,E)$). Аналогично определяется неравенство $u\leqslant v$. Скажем, что $u=v$ на множестве E, если одновремененно выполнены неравества $u\leqslant v$ на E и $u\geqslant v$ на E.

Отметим (см. раздел 2), что имеет место свойство транзитивности — если $u\geqslant v$ и $v\geqslant w$ на E, то $u\geqslant w$ на E в смысле данного определения. Кроме того, $W_0(\Omega,\partial\Omega)=W_0(\Omega)$, $H_0(\Omega,\partial\Omega)=H_0(\Omega)$. Если функция

$u \in W(\Omega)$ ($u \in H(\Omega)$) является непрерывной в окрестности множества E и $u \geqslant 0$ на E в обычном смысле, то $u \geqslant 0$ на E в смысле определения 1.

Определение 2. Для компакта $K \subset B_r^{x_0}$ определим классы

$$\mathcal{E}_W(K, B_r^{x_0}) = \{u \in W_0(B_r^{x_0}) \,:\, (u-1)_- \in W_0(B_r^{x_0}, K)\}\,,$$
$$\mathcal{E}_H(K, B_r^{x_0}) = \{u \in H_0(B_r^{x_0}) \,:\, (u-1)_- \in H_0(B_r^{x_0}, K)\}\,.$$

Таким образом, $\mathcal{E}_W(K, B_r^{x_0})$ ($\mathcal{E}_H(K, B_r^{x_0})$) — это множество функций из $W(B_r^{x_0})$ ($H(B_r^{x_0})$), имеющих нулевой след на границе $B_r^{x_0}$, и больших либо равных единице на K в смысле определения 1.

Определение 3. W-ёмкостью (H-ёмкостью) компакта $K \subset B_R^{x_0}$ относительно шара $B_R^{x_0}$ назовём число

$$C_p(K, B_R^{x_0}) = \inf \int\limits_{B_R^{x_0}} \frac{|\nabla\varphi|^{p(x)}}{p(x)}\,dx, \tag{14}$$

где точная нижняя грань берется по $\varphi \in \mathcal{E}_W(K, B_r^{x_0})$ ($\varphi \in \mathcal{E}_H(K, B_r^{x_0})$). Далее будем говорить просто “ёмкость”, подразумевая, что в случае H-решений используется H-ёмкость, а в случае W-решений используется W-ёмкость.

Поскольку для $\varphi \in H_0(B_R^{x_0})$ ($\varphi \in W_0(B_R^{x_0})$) имеем $\min(\varphi, 1) \in H_0(B_R^{x_0})$ ($\min(\varphi, 1) \in W_0(B_R^{x_0})$) (см. раздел 2), то точную нижнюю грань в (14) можно брать по множеству функций, равных единице на K в смысле определения 1.

Для $x_0 \in \partial D$ положим

$$p_0 = p(x_0),\ \ \xi(t) = \Big(C_p\left(\overline{B}_t^{x_0} \setminus D, B_{2t}^{x_0}\right) t^{p_0-n}\Big)^{1/(p_0-1)}. \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2), (12). *Тогда, если*

$$\int\limits_0 \exp\big(-\theta^{3+2n/\alpha}(t)\big)\xi(t)t^{-1}\,dt = \infty, \tag{16}$$

то граничная точка $x_0 \in \partial D$ регулярна. Если справедливо равенство (16), *то для решения u_f обобщенной задачи Дирихле* (11) *при достаточно малом ρ и $r \leqslant \rho/4$ имеет место оценка*

$$\begin{aligned}&\operatorname*{ess\,sup}_{D\cap B_r^{x_0}} |u_f - f(x_0)|\\ &\leqslant \widetilde{C}\bigg(\operatorname*{osc}_{\partial D\cap B_r^{x_0}} f + \rho + \exp\bigg(-C\int\limits_r^\rho \exp(-\theta^{3+2n/\alpha}(t))\xi(t)t^{-1}\,dt\bigg)\bigg),\end{aligned} \tag{17}$$

в которой положительные постоянные C и $\widetilde{C}$ зависят только от n, α, β и $\max_{\partial D} |f|$.

Если $p_0 > n$, то, пользуясь теоремой вложения Соболева, нетрудно показать, что граничная точка x_0 всегда будет регулярной (доказательство аналогично [24]).

Ключевым инструментом в доказательстве теоремы 1 является неравенство Харнака слабого типа. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и $f \in L^1(E)$ будем обозначать

$$\fint_E f\,dx = \frac{1}{|E|}\int_E f\,dx,$$

где $|E|$ — мера Лебега множества E. Ниже полагается

$$M = \operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_{4R}} |u|, \quad s = \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_{4R}} p.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* (2) *и* (12) *и u — неотрицательное ограниченное суперрешение уравнения* (1) *в шаре $B^{x_0}_{4R}$, то для любого $0 < q < n(s-1)/(n-1)$ справедлива оценка*

$$\Bigg(\fint_{B^{x_0}_{5R/2}} (u+R)^q\,dx\Bigg)^{1/q} \leqslant \exp\Big(C(n,\alpha,\beta,M,q)\theta(4R)^{2(n+s)/s}\Big) \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_R}(u+R). \quad (18)$$

С помощью теоремы 2 в разделе 5 работы доказана лемма об осцилляции.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (12) *и u_f — решение задачи Дирихле* ((7) *или* (8)) *с гладкими граничными данными f. Тогда*

$$\operatorname*{ess\,osc}_{D\cap B^{x_0}_R} u \leqslant \Big(1 - C\exp(-\theta^{3+2n/\alpha}(R))\xi(R)\Big) \operatorname*{ess\,osc}_{D\cap B^{x_0}_{4R}} u + C\exp(-\theta^{3+2n/\alpha}(R))\xi(R) \operatorname*{osc}_{\partial D\cap B^{x_0}_{4R}} f + R,$$

где положительная постоянная C зависит только от n, α, β и M.

Из последней леммы следует, что в случае гладких граничных данных справедливо неравенство

$$\operatorname*{ess\,osc}_{D\cap B^{x_0}_r} u \leqslant \widetilde{C}\Bigg(\operatorname*{osc}_{\partial D\cap B^{x_0}_\rho} f + \rho + \exp\Bigg(-C\int_r^\rho \exp(-\theta^{3+2n/\alpha}(t))\xi(t)t^{-1}\,dt\Bigg)\Bigg), \quad (19)$$

где положительные постоянные C и $\widetilde{C}$ зависят только от n, α, β и $\max_{\partial D}|f|$. Следовательно, при выполнении условия (16) существует предел решения в точке x_0. Покажем, что он совпадает с $f(x_0)$. Если это не так, то для некоторых r, $\varepsilon > 0$ будем иметь $|u - f| > \varepsilon$ почти всюду в $D \cap B_r^{x_0}$. Рассмотрим функцию $v = \min(|u - f|\varepsilon^{-1}, 1)$, продолженную нулём вне D. Эта функция принадлежит $W_0(D)$ или $H_0(D)$ в зависимости от типа решения, равна единице почти всюду в $D \cap B_r^{x_0}$ и нулю почти всюду в $B_r^{x_0} \setminus D$. Следовательно, её градиент равен нулю почти всюду в $B_r^{x_0}$. По неравенству Пуанкаре

$$|B_r^{x_0} \setminus D| = \int\limits_{B_r^{x_0}} (1 - v)\, dx \leqslant \frac{C(n) r^{n+1}}{|D \cap B_r^{x_0}|} \int\limits_{B_r^{x_0}} |\nabla(1 - v)|\, dx = 0.$$

Пусть теперь $t < r/2$ и $\varphi \in C_0^\infty(B_{2t}^{x_0})$. Так как $v \in W_0(D)$ ($v \in H_0(D)$), то $(1 - v)\varphi \in \mathcal{E}_W(\overline{B}_t^{x_0} \setminus D, B_{2t}^{x_0})$ ($(1 - v)\varphi \in \mathcal{E}_H(\overline{B}_t^{x_0} \setminus D, B_{2t}^{x_0})$). Согласно определению ёмкости,

$$C_p(\overline{B}_t^{x_0} \setminus D, B_{2t}^{x_0}) \leqslant \int\limits_{B_{2t}^{x_0}} |\nabla((1 - v)\varphi)|^{p(x)} (p(x))^{-1}\, dx = 0,$$

что противоречит условию (16).

Таким образом, для решений задачи Дириле (11) с гладкой граничной функцией f имеет место оценка (17). Из определения обобщенного решения задачи Дирихле (11) вытекает, что эта оценка останется верной и для произвольной непрерывной граничной функции f.

Приведём теперь достаточное условие регулярности граничной точки.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (2), (12) *и точки* $x_0 \in \partial D$ *можно коснуться конусом, лежащим во внешности области. Тогда, если*

$$\omega(t) \leqslant k |\ln t|^{-1} \ln\ln|\ln t|, \quad t \in (0, 1/27), \quad \text{где } k \in (0, \alpha/5n),$$

то граничная точка x_0 *регулярна.*

§2. Свойства классов H и W

В этом разделе приводятся некоторые общие сведения о классах W и H. Доказательства достаточно стандартны и могут быть найдены, например, в [11] или [12].

Лемма 2. *Пусть* $m \in \mathbb{R}$. *Если последовательность функций* $u_j \in W(D)$ *сходится к функции* $u \in W(D)$ *в пространстве* $W(D)$, *то найдётся последовательность функций* $v_j \in W(D)$, $v_j \leqslant m$, *сходящаяся в* $W(D)$ *к* $\min(u, m)$. *Если при этом* $u_j \in C^\infty(D)$, *то* $v_j \in C^\infty(D)$. *Если* $m \geqslant 0$ *и функции* u_j *имеют компактный носитель в* D, *то функции* v_j *также* *имеют компактный носитель в D. Если $u_j \geqslant m$ на множестве E, то $v_j = m$ на E.*

Таким образом, если $u \in H(D)$ ($u \in W(D)$), то $\min(u, m) \in H(D)$ ($\min(u, m) \in W(D)$). Если $m \geqslant 0$ и $u \in H_0(D)$ ($u \in W_0(D)$), то $\min(u, m) \in H_0(D)$ ($\min(u, m) \in W_0(D)$). Таким образом, множества $W(D)$, $H(D)$, $W_0(D)$, $H_0(D)$ образуют решётку, то есть для любых $u, v \in H(D)$ ($W(D)$, $H_0(D)$, $W_0(D)$) выполняется

$$\min(u,v)=u+\min(v-u,0)\in H(D)\,(\text{соответственно, } W(D), H_0(D), W_0(D)),$$
$$\max(u,v)=u-\min(u-v,0)\in H(D)\,(\text{соответственно, } W(D), H_0(D), W_0(D)).$$

Следовательно, для $u \in H(D)$ ($W(D)$) или $u \in H_0(D)$ ($W_0(D)$) имеем $u_\pm \in H(D)$ ($W(D)$) или $u \in H_0(D)$ ($W_0(D)$). Кроме того, если $u \in W_0(D)$ ($u \in H_0(D)$), то $(u-k)_+ \in W_0(D)$ ($(u-k)_+ \in H_0(D)$) для всех $k \geqslant 0$.

Для решения задачи Дирихле (7) (или (8)) имеет место принцип максимума (см. напр. [11]). Если $u_1, u_2 \in H(D)$ ($u_1, u_2 \in W(D)$) — решения задачи Дирихле (7) (или (8)) с граничными функциями f_1, f_2, причём $f_1 \leqslant f_2$ на ∂D, то $u_1 \leqslant u_2$ почти всюду в D.

Также нам понадобится следующий факт. Если $u \in H(D)$ ($u \in W(D)$), $m \leqslant u \leqslant M$ и f — липшицева на $[m, M]$ функция, то $f(u) \in H(D)$ ($f(u) \in W(D)$).

§3. Неравенство Харнака слабого типа

Данный раздел посвящен доказательству теоремы 2 — неравенству Харнака слабого типа для неотрицательных ограниченных суперрешений u уравнения (1) в шаре $B_{4R}^{x_0}$. Идея доказательства основана на схеме рассуждений работы [30].

Ниже полагается

$$s = \operatorname*{ess\,inf}_{B_{4R}^{x_0}} p, \quad M = \operatorname*{ess\,sup}_{B_{4R}^{x_0}} u.$$

Утверждение теоремы 2 вытекает из двух приводимых ниже лемм, в формулировке которых предполагаются выполненными условия (2) и (12), а u — неотрицательное ограниченное суперрешение уравнения (1) в $B_{4R}^{x_0}$.

Лемма 3. *Если $1/4 \leqslant \sigma < t \leqslant 3$, то справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u+R) \geqslant \exp\left(-C(t-\sigma)^{-n\beta/s}\theta(4R)^{(n+s)/s} + \fint_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u+R)\,dx\right), \quad (20)$$

в которой $C = C(n, \alpha, \beta, M)$.

Доказательство. Положим

$$\ln k = \fint_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u+R)\,dx. \tag{21}$$

В силу неравенства Иенсена имеем

$$k = \exp \fint_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u+R)\,dx \leqslant \fint_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)\,dx \leqslant M+R.$$

Положим

$$w = \left(\ln \frac{k}{u+R}\right)_+$$

и выберем в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = w^{\gamma}(u+R)^{1-s}\eta^{\beta},$$

где $\gamma \geqslant 1$, $\eta \in C_0^\infty(B_{tR}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\gamma \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}w^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx + (s-1)\int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}w^{\gamma}\eta^{\beta}\,dx$$
$$\leqslant \beta \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2}(u+R)^{1-s}w^{\gamma}\eta^{\beta-1}\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx.$$

Применяя к подинтегральному выражению в правой части этой оценки неравенство Юнга, будем иметь

$$\int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}w^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)\int_{B_{tR}^{x_0}} \gamma^{-p(x)}(u+R)^{p(x)-s}w^{\gamma+p(x)-1}\eta^{\beta-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$

Отсюда получаем

$$\int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla w|^{p(x)}(u+R)^{p(x)-s}w^{\gamma-1}\eta^{\beta}\,dx$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)\int_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^{p(x)-s}w^{\gamma+p(x)-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\,dx. \tag{22}$$

По неравенству Юнга

$$|\nabla w|^s \leqslant |\nabla w|^{p(x)}(u+R)^{p(x)-s} + (u+R)^{-s}.$$

Поскольку

$$(u+R)w = (u+R)\biggl(\ln\frac{k}{u+R}\biggr)_+ \leqslant \begin{cases} k/e, & \text{если} \quad k/e > R, \\ R\ln\frac{k}{R}, & \text{если} \quad k/e \leqslant R, \end{cases}$$

то в силу неравенства $k \leqslant M+R$ имеем

$$(u+R)w \leqslant \max(k/e, R) \leqslant M+1.$$

Пользуясь этими оценками, из (22) получаем

$$\int\limits_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla w|^s w^{\gamma-1}\eta^\beta\,dx \leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^\beta \int\limits_{B^{x_0}_{tR}} \Bigl(w^{\gamma+s-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)} + w^{\gamma-1}R^{-s}\eta^\beta\Bigr)\,dx.$$

Домножая последнее неравенство на R^{s-n}, пользуясь (13) и оценкой

$$(R|\nabla\eta|)^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)} \leqslant \eta^\beta + (R|\nabla\eta|)^\beta, \tag{23}$$

имеем

$$\begin{aligned} &R^s \fint\limits_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla\max(w,1)|^s \max(w,1)^{\gamma-1}\eta^\beta\,dx \\ &\quad\leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^\beta\theta(4R) \fint\limits_{B^{x_0}_{tR}} \max(w,1)^{\gamma+s-1}\bigl(\eta^\beta + (R|\nabla\eta|)^\beta\bigr)\,dx. \end{aligned} \tag{24}$$

Положим $R_j = R(\sigma + 2^{-j}(t-\sigma))$, где $j = 0, 1, \ldots, \kappa = n/(n-1)$, и зададим последовательность γ_j соотношениями $\gamma_0 = 1$, $\gamma_{j+1} + s - 1 = (\gamma_j + s - 1)\kappa$ (иначе $\gamma_j + s - 1 = \kappa^j s$). Пусть $\eta_j \in C_0^\infty(B^{x_0}_{R_j})$, $0 \leqslant \eta_j \leqslant 1$, $\eta_j = 1$ на $B^{x_0}_{R_{j+1}}$ и $|\nabla\eta_j| \leqslant 2^{1+j}R^{-1}(t-\sigma)^{-1}$. Из оценки (24) получаем

$$\begin{aligned} &R^s \fint\limits_{B^{x_0}_{R_j}} \Bigl|\nabla\Bigl(\max(w,1)^{(\gamma_j+s-1)/s}\eta_j^{\beta/s}\Bigr)\Bigr|^s\,dx \\ &\leqslant C(\alpha,\beta)\theta(4R)(M+1)^\beta 2^{\beta j}(t-\sigma)^{-\beta}(\gamma_j+s-1)^s \fint\limits_{B^{x_0}_{R_j}} \max(w,1)^{\gamma_j+s-1}\,dx. \end{aligned} \tag{25}$$

Применяя неравенство Соболева, будем иметь

$$\begin{aligned} &\fint_{B^{x_0}_{R_{j+1}}} \max(w,1)^{\gamma_{j+1}+s-1}\,dx \leqslant 4^n \fint_{B^{x_0}_{R_j}} \max(w,1)^{\gamma_{j+1}+s-1}\eta_j^{\beta\kappa}\,dx \\ &\leqslant \Big(C(n,\alpha,\beta,M)2^{\beta j}(t-\sigma)^{-\beta}\theta(4R)(\gamma_j+s-1)^s \fint_{B^{x_0}_{R_j}} \max(w,1)^{\gamma_j+s-1}\,dx\Big)^{\kappa}. \end{aligned} \tag{26}$$

Полагая

$$Y_j = \Big(\fint_{B^{x_0}_{R_j}} \max(w,1)^{\gamma_j+s-1}\,dx\Big)^{1/(\gamma_j+s-1)}, \tag{27}$$

перепишем неравенство (26) в виде

$$Y_{j+1} \leqslant \Big(C2^{\beta j}\theta(4R)(\gamma_j+s-1)^s(t-\sigma)^{-\beta}\Big)^{1/(\gamma_j+s-1)} Y_j, \quad C = C(n,\alpha,\beta,M).$$

Итерируя данное неравенство, придём к оценке

$$Y_k \leqslant \prod_{j=0}^{k-1}\Big(C\theta(4R)(t-\sigma)^{-\beta}\Big)^{\kappa^{-j}/s} 2^{\beta j\kappa^{-j}/s}(s\kappa^j)^{\kappa^{-j}} Y_0.$$

Отсюда, поскольку $\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^{-j} = n$ и $\sum_{j=0}^{\infty} j\kappa^{-j} = n(n-1)$, получаем

$$\limsup_{k\to\infty} Y_k \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)(t-\sigma)^{-n\beta/s}\theta(4R)^{n/s}Y_0.$$

Так как

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_{\sigma R}} \max(w,1) \leqslant \limsup_{k\to\infty} Y_k,$$

то

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_{\sigma R}} \max(w,1) \leqslant C\theta(4R)^{n/s}(t-\sigma)^{-n\beta/s}\Big(\fint_{B^{x_0}_{tR}} \max(w,1)^s\,dx\Big)^{1/s}. \tag{28}$$

Для оценки интеграла

$$\fint_{B^{x_0}_{tR}} w^s\,dx \leqslant \fint_{B^{x_0}_{tR}} \left|\ln\frac{k}{u+R}\right|^s dx,$$

выбирая в (6) пробную функцию

$$\psi = (u+R)^{1-s}\eta^{\beta},$$

где $\eta \in C_0^\infty(B_{4tR/3}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в $B_{tR}^{x_0}$ и $|\nabla \eta| \leqslant 4(tR)^{-1}$, будем иметь

$$\int\limits_{B_{4tR/3}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\eta^\beta\,dx \leqslant \beta \int\limits_{B_{4tR/3}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s}\eta^{\beta-1}|\nabla \eta|\,dx.$$

Отсюда и из неравенства Юнга, применного к подинтегральному выражению в правой части последнего неравенства, следует, что

$$\int\limits_{B_{4tR/3}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\eta^\beta\,dx \leqslant C(\alpha,\beta) \int\limits_{B_{4tR/3}^{x_0}} (u+R)^{p(x)-s}\eta^{\beta-p(x)}|\nabla \eta|^{p(x)}\,dx.$$

Так как $|\nabla u|^s \leqslant |\nabla u|^{p(x)} + 1$, $(u+R)^{-s} \leqslant R^{-s}$, и $(u+R)^{p(x)-s} \leqslant (M+1)^\beta$, то

$$\int\limits_{B_{4tR/3}^{x_0}} |\nabla u|^{s}(u+R)^{-s}\eta^\beta\,dx \leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^\beta \int\limits_{B_{4tR/3}^{x_0}} (R^{-s}\eta^\beta + \eta^{\beta-p(x)}|\nabla \eta|^{p(x)}).$$

Домножая это неравенство на R^{s-n}, пользуясь (13) и неравенством (23), найдём

$$R^s \fint\limits_{B_{4tR/3}^{x_0}} |\nabla u|^{s}(u+R)^{-s}\eta^\beta\,dx \leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^\beta\theta(4R) \fint\limits_{B_{4tR/3}^{x_0}} (\eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta)\,dx.$$

В силу выбора η отсюда получаем

$$R^s \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\nabla \ln \frac{k}{u+R}\right|^s dx \leqslant C(n,\alpha,\beta)(M+1)^\beta\theta(4R).$$

По определению постоянной k из (21)

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} \ln \frac{k}{u+R}\,dx = 0,$$

и по неравенству Пуанкаре

$$\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\ln \frac{k}{u+R}\right|^s dx \le C(n,s)R^s \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\nabla \ln \frac{k}{u+R}\right|^s dx \leqslant C(n,\alpha,\beta)(M+1)^\beta\theta(4R). \quad (29)$$

Из (28) и (29) вытекает

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{\sigma R}^{x_0}} w \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)\,(t-\sigma)^{-n\beta/s}\,\theta(4R)^{(n+s)/s}.$$

Вспоминая определение w, придём к оценке (20). Лемма 3 доказана. $\square$

Перейдём ко второму утверждению.

Лемма 4. *Для любых* $1/4 \leqslant \tau < t \leqslant 3$ *и всех* $0 < q < n(s-1)/(n-1)$ *имеет место оценка*

$$\Bigg(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R)^q\,dx\Bigg)^{1/q} \leqslant \exp\Bigg(C(t-\tau)^{-2n\beta/s}\theta(4R)^{(n+s)/s} + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln(u+R)\,dx\Bigg) \quad (30)$$

с положительной постоянной $C = C(n, \alpha, \beta, M, q)$.

Доказательство. Положим

$$w = \left(\ln \frac{u+R}{k}\right)_+, \quad (31)$$

где величина k определена формулой (21) и $R \leqslant k \leqslant M + R$. Выберем в интегральном неравенстве (6) пробную функцию

$$\psi = \max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma (u+R)^{1-s}\eta^\beta,$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\eta \in C_0^\infty(B^{x_0}_{tR})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и $c_0 = 2/(s-1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
(s-1)\int_{B^{x_0}_{tR}} &|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma\eta^\beta\,dx \\
&\leqslant \gamma\int_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla(u+R)|^{p(x)}(u+R)^{-s}\chi_{\{w>c_0(\gamma+s)\}}\max(w, c_0(\gamma+s))^{\gamma-1}\eta^\beta\,dx \\
&\quad + \beta\int_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla u|^{p(x)-2}(u+R)^{1-s}\max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma\eta^{\beta-1}\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx.
\end{aligned}$$

Так как $\gamma\big(\max(w, c_0(\gamma+s))\big)^{-1} \leqslant 1/c_0 = (s-1)/2$, то

$$\begin{aligned}
\int_{B^{x_0}_{tR}} &|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma\eta^\beta\,dx \\
&\leqslant \frac{2\beta}{s-1}\int_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s}\max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma\eta^{\beta-1}|\nabla\eta|\,dx.
\end{aligned}$$

Из неравенства Юнга, примененного к подинтегральному выражению в правой части последедней оценки, вытекает, что

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma}\eta^{\beta}\,dx$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}}(u+R)^{p(x)-s}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma}\eta^{\beta-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$

Далее, поскольку $|\nabla u|^s\leqslant|\nabla u|^{p(x)}+1$ и $(u+R)^{p(x)-s}\leqslant(M+1)^{\beta}$, придём к неравенству

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{s}(u+R)^{-s}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma}\eta^{\beta}\,dx$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}\int\limits_{B_{tR}^{x_0}}\max\big(w,c_0(\gamma+s)\big)^{\gamma}\Big((u+R)^{-s}\eta^{\beta}+|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\Big)\,dx.$$

Домножая это неравенство на R^{s-n}, используя (13) и (23), будем иметь

$$R^s\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}}\Big|\nabla\Big(\max(w,c_0(\gamma+s))^{1+\gamma/s}\eta^{\beta/s}\Big)\Big|^s\,dx$$
$$\leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^{\beta}\theta(4R)\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma+s}\Big(\eta^{\beta}+(R|\nabla\eta|)^{\beta}\Big)\,dx.$$

Напомним, что $\kappa=n/(n-1)$. По неравенству Соболева,

$$\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}}\max(w,c_0(\gamma+s))^{(\gamma+s)\kappa}\eta^{\beta\kappa}\,dx$$
$$\leqslant\bigg(C(n,\alpha,\beta,M)\theta(4R)\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}}\max(w,c_0(\gamma+s))^{\gamma+s}(\eta^{\beta}+(R|\nabla\eta|)^{\beta})\,dx\bigg)^{\kappa}. \tag{32}$$

Определим срезающие функции $\eta=\eta_j$ следующим образом. Пусть $\tau<\sigma<t$, $r_j=\sigma+(t-\sigma)2^{-j}$, $j=0,1,2,\ldots$, $\eta_j\in C_0^{\infty}(B_{r_j}^{x_0})$, $0\leqslant\eta_j\leqslant1$, $\eta_j=1$ в $B_{r_{j+1}}^{x_0}$ и $|\nabla\eta_j|\leqslant2^{j+3}(t-\sigma)^{-1}$. Зададим последовательность γ_j соотношением $\gamma_{j+1}+s=(\gamma_j+s)\kappa$, $\gamma_0=0$. Тогда из (32), в котором $\gamma=\gamma_j$,

$\eta=\eta_j$, получим

$$\begin{aligned}\fint_{B^{x_0}_{r_{j+1}}} &\max\big(w, c_0(\gamma_{j+1}+s)\big)^{\gamma_{j+1}+s}\,dx \\ &\leqslant \kappa^{\gamma_{j+1}+s} \fint_{B^{x_0}_{r_{j+1}}} \max\big(w, c_0(\gamma_j+s)\big)^{\gamma_{j+1}+s}\,dx \\ &\leqslant C\kappa^{\gamma_{j+1}+s}(t-\sigma)^{-\beta\kappa}2^{j\beta\kappa}\theta(4R)^{\kappa}\Bigg(\fint_{B^{x_0}_{r_j}} \max(w, c_0(\gamma_j+s))^{\gamma_j+s}\,dx\Bigg)^{\kappa}\end{aligned} \tag{33}$$

с константой $C=C(n,\alpha,\beta,M)$.

Из (29), пользуясь определением w (см. (31)), находим

$$\fint_{B^{x_0}_{tR}} \max\big(w, c_0(\gamma_0+s)\big)^{\gamma_0+s}\,dx \leqslant C_0(n,\alpha,\beta,M)\theta(4R). \tag{34}$$

Полагая

$$Y_j=\fint_{B^{x_0}_{r_j}} \max\big(w, c_0(\gamma_j+s)\big)^{\gamma_j+s}\,dx,$$

перепишем (33) и (34) в виде

$$Y_j\leqslant K_jY_{j-1}^{\kappa}, \quad K_j=C^{\beta\kappa}\kappa^{\gamma_j+s}(t-\sigma)^{-\beta\kappa}2^{\beta j\kappa}\theta(4R)^{\kappa}, \quad Y_0\leqslant C\theta(4R).$$

Итерируя это неравенство, придем к соотношению

$$Y_j\leqslant \prod_{m=0}^{j-1}\left(K_{j-m}\right)^{\kappa^m}\left(Y_0\right)^{\kappa^j}.$$

Поскольку $\gamma_j+s=\kappa^j s$, то для $j\geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}\prod_{m=0}^{j-1}&\left(K_{j-m}\right)^{\kappa^m} \\ &=\big(C(t-\sigma)^{-1}\big)^{\beta\kappa(1+\kappa+\ldots+\kappa^{j-1})}\kappa^{sj\kappa^j}2^{\beta\kappa\sum_{m=0}^{j-1}(j-m)\kappa^m}\theta(4R)^{\sum_{m=1}^{j}\kappa^m+\kappa^j}.\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\sum_{m=0}^{j-1}(j-m)\kappa^m=\kappa^j\sum_{l=1}^{j}l\kappa^{-l}\leqslant\kappa^j\sum_{l=0}^{\infty}l\kappa^{-l}=\kappa^j\kappa^{-1}(1-\kappa^{-1})^{-2},$$

$$\kappa+\kappa^2+\ldots+\kappa^{j-1}+\kappa^j+\kappa^j\leqslant(n+1)\kappa^j.$$

В итоге,

$$Y_j \leqslant \big(C(t-\sigma)^{-\beta n/s}\big)^{\gamma_j+s} \kappa^{j(\gamma_j+s)} \theta(4R)^{(\gamma_j+s)(n+1)/s}.$$

Таким образом,

$$\Bigg(\fint_{B^{x_0}_{r_j}} \max\big(w, c_0(\gamma_j+s)\big)^{\gamma_j+s}\,dx \Bigg)^{1/(\gamma_j+s)} \leqslant C(t-\sigma)^{-\beta n/s}\kappa^j \theta(4R)^{(n+1)/s}. \quad (35)$$

Пусть r — целое число из отрезка $[\gamma_{k-1}+s, \gamma_k+s]$. Тогда $\kappa^k \leqslant \kappa r/s$. Пользуясь неравенством Гёльдера и оценкой Стирлинга ($r! \geqslant \sqrt{2\pi r}(r/e)^r$), найдём

$$\begin{aligned} \fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{w^r}{r!}\,dx &\leqslant \frac{1}{r!}\Bigg(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} w^{\gamma_k+s}\,dx \Bigg)^{r/(\gamma_k+s)} \\ &\leqslant C^r(t-\sigma)^{-\beta nr/s}\kappa^{kr}\theta(4R)^{(n+1)r/s}/r! \\ &\leqslant (C_1(t-\sigma)^{-\beta n/s}\theta(4R)^{(n+1)/s})^r, \end{aligned} \quad (36)$$

где $C_1 = C_1(n,\alpha,\beta,M)$. Следовательно, для

$$\delta_0 \leqslant (t-\sigma)^{\beta n/s}(2C_1)^{-1}\theta(4R)^{-(n+1)/s}$$

будем иметь

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{(w\delta_0)^r}{r!}\,dx \leqslant 2^{-r}.$$

Для $1 \leqslant r \leqslant s$ из неравенства Гёльдера и оценки (34) найдём

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{(w\delta_0)^r}{r!}\,dx \leqslant \frac{\delta_0^r}{r!}\Bigg(\fint_{B^{x_0}_{tR}} w^s\,dx \Bigg)^{r/s} \leqslant \frac{(C_0\delta_0\theta(4R)^{1/s})^r}{r!},$$

где $C_0 = C_0(n,\alpha,\beta,M)$. В итоге, полагая

$$\begin{aligned} \delta_* &= \delta_*(n,\alpha,\beta,M) = \min\big((2C_1)^{-1}, (2C_0)^{-1}\big), \\ \delta_0 &= \delta_*(t-\sigma)^{\beta n/s}\theta(4R)^{-(n+1)/s}, \end{aligned}$$

получаем

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} e^{\delta_0 w}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{(\delta_0 w)^r}{r!}\,dx \leqslant e+1.$$

Так как по определению функции w выполнено неравенство

$$(u+R)^{\delta_0} \leqslant k^{\delta_0}\exp(\delta_0 w),$$

то приходим к оценке

$$\begin{aligned}\Bigg(\ \fint\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_0}\,dx\Bigg)^{1/\delta_0}\\ \leqslant k(e+1)^{1/\delta_0} \leqslant k\exp\Big(C(t-\sigma)^{-n\beta/s}\theta(4R)^{(n+1)/s}\Big).\end{aligned}\tag{37}$$

Для завершения доказательства леммы осталось оценить левую часть неравенства (30) через левую часть неравенства (37). Выбирая в интегральном неравенстве (6) пробную функцию

$$\psi = (u+R)^{1-s+\gamma}\eta^{\beta},$$

где $0<\gamma<s-1$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$, $\eta\in C_0^{\infty}(B^{x_0}_{\sigma R})$, придём к соотношению

$$\begin{aligned}(s-1-\gamma)\int\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-s}\eta^{\beta}\,dx\\ \leqslant \beta\int\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} |\nabla u|^{p(x)-2}(u+R)^{1-s+\gamma}\eta^{\beta-1}\nabla u\nabla\eta\,dx\\ \leqslant \beta\int\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} |\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s+\gamma}\eta^{\beta-1}|\nabla\eta|\,dx.\end{aligned}$$

Пользуясь неравенством Юнга, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-s}\eta^{\beta}\,dx\\ \leqslant C(\alpha,\beta)(s-1-\gamma)^{-\beta}\int\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{p(x)-s+\gamma}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\,dx,\end{aligned}$$

откуда, в силу неравенств $|\nabla u|^s\leqslant|\nabla u|^{p(x)}+1$ и $(u+R)^{p(x)-s}\leqslant(M+1)^{\beta}$ найдем

$$\begin{aligned}\int\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} |\nabla u|^{s}(u+R)^{\gamma-s}\eta^{\beta}\,dx \leqslant \int\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\gamma-s}\eta^{\beta}\,dx\\ +C(\alpha,\beta)(s-1-\gamma)^{-\beta}(M+1)^{\beta}\int\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\gamma}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{\beta-p(x)}\,dx.\end{aligned}$$

Домножая последнее неравенство на R^{s-n}, применяя (13) и (23), будем иметь

$$\begin{aligned} R^s \fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \Big|\nabla\big((u+R)^{\gamma/s}\eta^{\beta/s}\big)\Big|^s\,dx \\ \leqslant C(\alpha,\beta)(M+1)^\beta(s-1-\gamma)^{-\beta}\theta(4R) \fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^\gamma\big(\eta^\beta+(R|\nabla\eta|)^\beta\big)\,dx. \end{aligned} \tag{38}$$

Применяя неравенство Соболева, из (38) получаем

$$\begin{aligned} \bigg(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \big((u+R)^\gamma\eta^\beta\big)^\kappa\,dx\bigg)^{1/(\kappa\gamma)} \\ \leqslant \bigg(C(n,\alpha,\beta,M)(s-1-\gamma)^{-\beta}\theta(4R)\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}}(u+R)^\gamma(\eta^\beta+(R|\nabla\eta|)^\beta)\,dx\bigg)^{1/\gamma}. \end{aligned} \tag{39}$$

Пусть j_0 — минимальное натуральное число, такое, что $q\leqslant\delta_0\kappa^{j_0}$. Положим $\delta_1=q\kappa^{-j_0}$, $\delta=s-1-q\kappa^{-1}$ и $r_j=\sigma-(\sigma-\tau)(1-2^{-j})$, $j=0,1,\ldots,j_0$. Пусть ещё $\eta_j\in C_0^\infty(B^{x_0}_{r_j})$, $\eta_j=1$ на $B^{x_0}_{r_{j+1}}$, $0\leqslant\eta_j\leqslant1$, $|\nabla\eta_j|\leqslant 2^{j+2}/(\sigma-\tau)$. Последовательно записывая неравенство (39) для $\eta=\eta_j$, $\gamma=\gamma_j=\delta_1\kappa^j$, $j=0,1,\ldots,j_0-1$, будем иметь

$$\begin{aligned} \bigg(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}}(u+R)^q\,dx\bigg)^{1/q} &= \bigg(\fint_{B^{x_0}_{r_{j_0}}}(u+R)^{\gamma_{j_0}}\,dx\bigg)^{1/\gamma_{j_0}} \\ &\leqslant \prod_{j=0}^{j_0-1}\Big(C\delta^{-\beta}\theta(4R)(\sigma-\tau)^{-\beta}2^{\beta j}\Big)^{1/\gamma_j}\bigg(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}}(u+R)^{\delta_1}dx\bigg)^{1/\delta_1} \\ &\leqslant \Big(C\delta^{-\beta}(\sigma-\tau)^{-\beta}\theta(4R)\Big)^{n/\delta_1}\bigg(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}}(u+R)^{\delta_1}\,dx\bigg)^{1/\delta_1} \\ &\leqslant \Big(C\delta^{-\beta}(\sigma-\tau)^{-\beta}\theta(4R)\Big)^{2n/\delta_0}\bigg(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}}(u+R)^{\delta_0}\,dx\bigg)^{1/\delta_0}, \end{aligned}$$

где на последнем шаге мы применили неравенство Гёльдера. Совмещая последнее неравенство с (37), где $\sigma = (t+\tau)/2$, придём к оценке

$$\Bigl(\fint_{B_{\tau R}^{x_0}} (u+R)^q\,dx\Bigr)^{1/q} \leqslant k\exp\Bigl(C\delta^{-\beta}(t-\tau)^{-\beta(n+s)/s}\theta(4R)^{(n+s)/s}\Bigr),$$

что и составляет утверждение леммы. По ходу мы использовали простое неравенство

$$\begin{aligned}&(C(t-\tau)^{-\beta}\theta(4R))^{2n/\delta_0}(e+1)^{1/\delta_0}\\ &\quad= \exp\Bigl((\ln C + \beta\ln(t-\tau)^{-1} + \ln\theta(4R))C(t-\tau)^{-\beta n/s}\theta(4R)^{(n+1)/s}\Bigr)\\ &\quad\leqslant \exp\Bigl(C(t-\sigma)^{-\beta(n+s)/s}\theta(4R)^{(n+s)/s}\Bigr).\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана. □

Замечание 1. В формулировке леммы 4 степень q можно взять любую, меньшую, чем $n(s-1)/(n-s)$, если $s<n$, и любую положительную, если $s \geqslant n$. В оценке (30) константа может быть взята не зависящей от q, если q отделено от $n(s-1)/(n-1)$.

Доказательство теоремы 2. Совмещая оценки леммы 3, где $\sigma=1$, $t=3$, и леммы 4, в которой $\tau = 5/2$, $t=3$, приходим к (18). Теорема 2 доказана. □

§4. Лемма об осцилляции

В этом разделе мы докажем лемму 1 (лемму об осцилляции).

Пусть

$$s = \operatorname*{ess\,inf}_{B_{4R}^{x_0}} p.$$

Напомним, что $\theta(r) = r^{-\omega(r)}$ и мы предполагаем, что функция θ не возрастает на полуинтервале $(0,d]$.

Пусть граничная функция $f \in C^\infty(\overline{D})$, $0 \leqslant f \leqslant M$ в D и

$$m = \inf_{\partial D\cap B_{4R}^{x_0}} f.$$

Обозначим

$$u_m(x) = \begin{cases}\min(u(x),m), & x\in D\cap B_{4R}^{x_0},\\ m, & x\in B_{4R}^{x_0}\setminus D,\end{cases} \tag{40}$$

$$v_m(x) = u_m(x) + R. \tag{41}$$

Вначале поясним корректность введённого обозначения, например, в классе W-решений. Поскольку граничная функция f гладкая и $f \geqslant m$ на $\partial D \cap B^{x_0}_{4R}$ в обычном смысле, то это же неравенство верно и в смысле определения 1. Так как ещё и $u - f \in W_0(D)$, то $u \geqslant m$ на $\partial D \cap B^{x_0}_{4R}$, то есть

$$\max(m - u, 0) \in W_0(D, \partial D \cap B^{x_0}_{4R}).$$

Будем считать функцию $\max(m - u, 0)$ продолженной нулём в $B^{x_0}_{4R} \setminus D$. Поскольку $u_m = m - \max(m - u, 0)$, то данное выше определение корректно.

Функция v_m является суперрешением (1). Докажем это для W-решения u, для H-решений доказательство аналогично. Пусть $\varphi \in W_0(D)$. В интегральном тождестве (5) возьмём пробную функцию

$$\varphi = \Phi_\varepsilon(m + R - v_m),$$

где $\Phi_\varepsilon(t) = \max(0, \min(t\varepsilon^{-1}, 1))$. Тогда

$$\int\limits_D \Phi_\varepsilon(m + R - v_m)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\varphi\, dx = \int\limits_D \varphi\Phi'_\varepsilon(m + R - v_m)|\nabla u|^{p(x)}\, dx \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\int\limits_D |\nabla v_m|^{p(x)-2}\nabla v_m \nabla\varphi\, dx \geqslant 0,$$

что и доказывает требуемое.

Выбирая в интегральном неравенстве (6) пробную функцию

$$\psi = \bigl(v_m^{1-s+\gamma} - (m + R)^{1-s+\gamma}\bigr)\eta^\beta, \quad 0 < \gamma < s - 1,$$

где $\eta \in C_0^\infty(B^{x_0}_{5R/2})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ на $B^{x_0}_{2R}$, $|\nabla\eta| \leqslant 4R^{-1}$, и используя неравенство Юнга из (13), придём к оценке

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B^{x_0}_{5R/2}} |\nabla v_m|^{p(x)} v_m^{\gamma-s}\eta^\beta\, dx &\leqslant C(n, \alpha, \beta, \gamma) \int\limits_{B^{x_0}_{5R/2}} v_m^{p(x)-s+\gamma}|\nabla\eta|^{p(x)}\, dx \\
&\leqslant CR^{n-p_0}\theta(R) \fint\limits_{B^{x_0}_{5R/2}} v_m^{p_0-s+\gamma} v_m^{p(x)-p_0}\, dx \\
&\leqslant CR^{n-p_0}\theta^2(R) \fint\limits_{B^{x_0}_{5R/2}} v_m^{p_0-s+\gamma}\, dx.
\end{aligned}$$

В силу оценки теоремы 2 и выбора функции η,

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)} v_m^{\gamma-s}\,dx \\
&\leqslant CR^{n-p_0}\theta^2(R)\exp\Big(C(n,\alpha,\beta,M,\gamma)\theta(R)^{2(n+s)/s}\Big)\Big(\operatorname*{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} v_m\Big)^{p_0-s+\gamma}
\end{aligned} \tag{42}
$$

Здесь требуется, чтобы

$$
p_0 - s + \gamma < n(s-1)/(n-1).
$$

В силу непрерывности показателя p в точке x_0 это неравенство выполнено для достаточно малых R. Будем считать также, что $p_0 - 1 < s$.

Положим

$$
t = R\Big(\inf_{B_R^{x_0}} v_m\Big)^{s-\gamma-1}.
$$

По неравенству Юнга,

$$
\begin{aligned}
\fint\limits_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v_m|^{p(x)-1}\,dx \quad &\leqslant \fint\limits_{B_{2R}^{x_0}} t|\nabla v_m|^{p(x)} v_m^{\gamma-s}\,dx \\
&+ \fint\limits_{B_{2R}^{x_0}} t^{1-p(x)} v_m^{(s-\gamma)(s-1)} v_m^{(s-\gamma)(p(x)-s)}\,dx.
\end{aligned} \tag{43}
$$

Из (42) ясно, что

$$
\begin{aligned}
&\fint\limits_{B_{2R}^{x_0}} t|\nabla v_m|^{p(x)} v_m^{\gamma-s} dx \\
&\qquad \leqslant CR^{1-p_0}\theta^2(R)\exp\Big(C\theta^{2(n+s)/s}(R)\Big)\Big(\inf_{B_R^{x_0}} v_m\Big)^{p_0-1}.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Далее, в силу (13) имеем

$$
\begin{aligned}
t^{1-p(x)} &= R^{1-p_0}\Big(\inf_{B_R^{x_0}} v_m\Big)^{(s-1-\gamma)(1-s)} R^{p_0-p(x)}\Big(\inf_{B_R^{x_0}} v_m\Big)^{(s-1-\gamma)(s-p(x))} \\
&\leqslant \theta^{s-\gamma}(R) R^{1-p_0}\Big(\inf_{B_R^{x_0}} v_m\Big)^{(s-1-\gamma)(1-s)}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, согласно (13),

$$\fint_{B^{x_0}_{2R}} t^{1-p(x)} v_m^{(s-\gamma)(s-1)} v_m^{(s-\gamma)(p(x)-s)}\,dx \leqslant \theta^{2(s-\gamma)}(R) R^{1-p_0} \Bigl(\inf_{B^{x_0}_R} v_m\Bigr)^{(s-1-\gamma)(1-s)} \fint_{B^{x_0}_{2R}} v_m^{(s-\gamma)(s-1)}\,dx.$$

Пусть γ таково, что $(s-\gamma)(s-1) < n(s-1)/(n-1)$. Для этого достаточно, чтобы $\gamma \in (s-n/(n-1), s-1)$. Используя теорему 2, найдём

$$\fint_{B^{x_0}_{2R}} t^{1-p(x)} v_m^{(s-\gamma)(s-1)} v_m^{(s-\gamma)(p(x)-s)}\,dx \leqslant C R^{1-p_0} \theta^4(R) \exp\Bigl(C\theta^{2(n+s)/s}(R)\Bigr) \Bigl(\inf_{B^{x_0}_R} v_m\Bigr)^{s-1}, \tag{45}$$

где $C = C(n,\alpha,\beta,M)$. Совмещая оценки (43), (44), (45) получаем

$$\fint_{B^{x_0}_{2R}} |\nabla v_m|^{p(x)-1}\,dx \leqslant C\theta^4(R) \exp\Bigl(C\theta(R)^{2(n+s)/s}\Bigr) R^{1-p_0} \Bigl(\inf_{B^{x_0}_R} v_m\Bigr)^{p_0-1}, \tag{46}$$

где $C = C(n,\alpha,\beta,M)$.

Далее $\xi(R)$ имеет тот же смысл, что и в (15). Пусть $\eta \in C_0^\infty(B^{x_0}_{2R})$, $\eta = 1$ в $B^{x_0}_R$, $|\nabla\eta| \leqslant CR^{-1}$. Выбирая в интегральном тождестве (5) пробную функцию $\psi = (m+R-v_m)\eta^s$, получим

$$\int_{B^{x_0}_{2R}} |\nabla v_m|^{p(x)} \eta^s\,dx = s\int_{B^{x_0}_{2R}} |\nabla v_m|^{p(x)-2}(m+R-v_m)\eta^{s-1}\nabla v_m \nabla\eta\,dx \leqslant s(m+R)R^{-1}\int_{B^{x_0}_{2R}} |\nabla v_m|^{p(x)-1}\,dx.$$

Положим $w_m = v_m/(m+R)$. Тогда, используя (13), будем иметь

$$\int_{B^{x_0}_R} (m+R)^{p(x)} |\nabla(w_m\eta)|^{p(x)}\,dx \leqslant C(n,\beta)(m+R)R^{-1}\int_{B^{x_0}_{2R}} |\nabla v_m|^{p(x)-1}\,dx + C(n,\beta)(m+R)\theta^2(R)R^{-p_0}\int_{B^{x_0}_{2R}} v_m^{p_0-1}\,dx. \tag{47}$$

Снова используя (13) для оценки $(m+R)^{p(x)} \geqslant \theta^{-1}(R)(m+R)^{p_0}$, неравенство Харнака слабого типа для оценки второго члена в правой части и (46) для оценки первого члена в правой части, придём к неравенству

$$\begin{aligned}(m+R)^{p_0-1} \int\limits_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla(w_m\eta)|^{p(x)}\,dx \\ \leqslant C(n,\alpha,\beta,M)R^{n-p_0}\theta^4(R)\exp\Big(C\theta^{2(n+s)/s}(R)\Big)\Big(\inf_{B_R^{x_0}} v_m\Big)^{p_0-1}.\end{aligned} \tag{48}$$

По определению ёмкости

$$\int\limits_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla(w_m\eta)|^{p(x)}\,dx \geqslant C_p(\overline{B}_R^{x_0}\setminus D, B_{2R}^{x_0}). \tag{49}$$

Из (48) и (49) получаем

$$\begin{aligned}C(n,p,M)\theta^{4/(p_0-1)}(R)\exp\Big(C\theta^{2(n+s)/s}(R)\Big)\inf_{B_R^{x_0}} v_m \\ \geqslant (m+R)\Big(R^{p_0-n}C_p\big(\overline{B}_R^{x_0}\setminus D, B_{2R}^{x_0}\big)\Big)^{1/(p_0-1)}\end{aligned} \tag{50}$$

Из (50) по определению функции v_m и величины $\xi(R)$ следует

$$\xi(R)\Big(\inf_{\partial D\cap B_{4R}^{x_0}} f+R\Big) \leqslant \Lambda\exp\Big(\theta^{3+2n/\alpha}(R)\Big)\Big(\inf_{D\cap B_R^{x_0}} u+R\Big), \tag{51}$$

где $\Lambda=\Lambda(n,\alpha,\beta,M)$. Здесь мы использовали простую оценку

$$x^a\exp(bx^c) \leqslant C(a,b,c,d)\exp x^d, \quad a,b>0, \quad d>c>0, \quad x\geqslant 1.$$

Пусть теперь

$$F_R=\sup_{\partial D\cap B_R^{x_0}} f, \quad f_R=\inf_{\partial D\cap B_R^{x_0}} f, \quad M_R=\sup_{D\cap B_R^{x_0}} u, \quad m_R=\inf_{D\cap B_R^{x_0}} u.$$

Применим оценку (51) к функциям $M_{4R}-u$ и $u-m_{4R}$. Будем иметь

$$\xi(R)(M_{4R}-F_{4R}+R) \leqslant \Lambda\exp\Big(\theta^{3+2n/\alpha}(R)\Big)(M_{4R}-M_R+R),$$

$$\xi(R)(f_{4R}-m_{4R}+R) \leqslant \Lambda\exp\Big(\theta^{3+2n/\alpha}(R)\Big)(m_R-m_{4R}+R).$$

Складывая полученные оценки, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}M_R-m_R \leqslant \Big(1-\Lambda^{-1}\exp\Big(-\theta^{3+2n/\alpha}(R)\Big)\xi(R)\Big) \\ +\Lambda^{-1}\exp\Big(-\theta^{3+2n/\alpha}(R)\Big)\xi(R)(F_{4R}-f_{4R})+R.\end{aligned}$$

Доказательство леммы 1 завершено.

§5. Геометрические условия регулярности

Будем предполагать, что $p(x) = p(x_0) = p_0$ в дополнении к области D. Сначала получим оценку снизу емкости замкнутого шара $\overline{B}_r^{x_0}$ относительно концентрического ему шара $B_R^{x_0}$ достаточно малого радиуса $R < R_0(p)$ для показателя суммируемости p, удовлетворяющего условию (12).

Нам понадобится оценивать как H-ёмкость, так и W-ёмкость. Для случая H-ёмкости положим $\mathcal{E} = \mathcal{E}_H(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0})$ и обозначим через $\mathcal{M}$ множество функций из $C_0^\infty(B_R^{x_0})$, равных единице в окрестности $\overline{B}_r^{x_0}$. Для W-ёмкости пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_W(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0})$, а $\mathcal{M}$ — множество функций из $W_0^{1,\alpha}(B_R^{x_0})$ (где α из условия (2)), равных единице в окрестности $\overline{B}_r^{x_0}$.

Перейдем к сферической системе координат (ρ, η), $|\eta| = 1$ с центром в точке x_0, то есть $\rho = |x - x_0|$, $\eta = (x - x_0)/|x - x_0|$. По определению ёмкости

$$C_p(\overline{B}_r, B_R) = \inf_{\varphi \in \mathcal{E}} \int_{B_R^{x_0}} |\nabla \varphi|^{p(x)} (p(x))^{-1}\, dx \geqslant \inf_{\varphi \in \mathcal{E}} \int\limits_{|\eta|=1} d\eta \int\limits_r^R \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right|^p \frac{\rho^{n-1}}{p(\rho, \eta)}\, d\rho$$

$$\geqslant \inf_{\varphi \in \mathcal{M}} \int\limits_{|\eta|=1} d\eta \int\limits_r^R \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right|^p \frac{\rho^{n-1}}{p(\rho, \eta)}\, d\rho \geqslant \int\limits_{|\eta|=1} d\eta \inf_{\varphi \in \mathcal{M}} \int\limits_r^R \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right|^p \frac{\rho^{n-1}}{p(\rho, \eta)}\, d\rho.$$

Для определённости рассмотрим случай W-ёмкости. Для H-ёмкости доказательство аналогично с очевидными упрощениями.

Если $\varphi \in \mathcal{M}$, то для почти каждого $\eta \in \partial B_1^0$ функция

$$\varphi(\,\cdot\,, \eta)\colon (r, R) \to \mathbb{R},$$

которая есть ограничение функции φ на луч $x_0 + t\eta$, $t > 0$, является функцией, принадлежащей $W^{1,\alpha}(r, R)$, причём $\varphi(R, \eta) = 0$, $\varphi(r, \eta) = 1$.

Отметим, что для одномерной вариационной задачи с переменным показателем эффект Лаврентьева отсутствует [29]. Это следует из того, что $C[r, R]$ плотно в $L^{p(x)}(r, R)$, откуда следует плотность в $W^{1,p(x)}(r, R)$ липшицевых функций, которые приближаются гладкими обычной процедурой сглаживания. Наличие веса $\rho^{n-1}/p(\rho, \eta)$ на эту процедуру не влияет, так как на отрезке от r до R этот вес ограничен сверху и снизу положительными константами.

Следовательно, точная нижняя грань функционала

$$F(\eta)[v] = \int\limits_r^R \left|\frac{dv(\rho)}{d\rho}\right|^p \frac{\rho^{n-1}}{p(\rho, \eta)}\, d\rho$$

по множеству гладких функций, принимающих значение $v(r)=1$, $v(R)=0$, совпадает с точной нижней гранью этого же функционала по множеству функций из $W^{1,\alpha}(r,R)$ с теми же граничными значениями. Нетрудно показать, что она достигается на функции

$$v(\rho,\eta)=\int\limits_{\rho}^{R} d^{1/(p-1)}t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt,$$

где $p=p(t,\eta)$, а неотрицательная функция $d=d(\eta)$ такова, что

$$\int\limits_{r}^{R} d^{1/(p-1)}t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt=1. \tag{52}$$

Действительно, уравнение Эйлера для одномерной вариационной задачи имеет вид

$$\frac{d}{d\rho}\Big(\,\rho^{n-1}|v'|^{p(\rho,\eta)-2}v'\Big)=0,$$

откуда вытекает, что

$$\rho^{n-1}|v'(\rho)|^{p(\rho,\eta)-2}v'=c,\quad c=c(\eta).$$

Следовательно, производная v' знакопостоянна. А поскольку $v(r)=1$ и $v(R)=0$, то ясно, что $v'\leqslant 0$ почти всюду на интервале (r,R). Нетрудно видеть, что функция v удовлетворяет уравнению Эйлера и граничным условиям. Если теперь положить $d(\eta)=|c(\eta)|$, то из предыдущего равенства будем иметь

$$v'(\rho)=-d^{1/(p(\rho,\eta)-1)}\rho^{(1-n)/(p(\rho,\eta)-1)}.$$

Так как

$$\int\limits_{r}^{R} v'(\rho)\,d\rho=-1,$$

то отсюда приходим к равенству (52).

Следовательно, с учетом явного вида минимизанта и условия (2) получим

$$C_p(\overline{B}_r^{x_0},B_R^{x_0})\geqslant\beta^{-1}\int\limits_{\partial B_1^0}d\eta\int\limits_{r}^{R} d^{p/(p-1)}t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt. \tag{53}$$

Положим $l = \sup_{B_R} p$, $s = \inf_{B_R} p$. Если $d < 1$, то из неравенства Гёльдера и сооотношения (52) имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_r^R d^{p/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt &\geqslant \int\limits_r^R d^{l/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \\ &\geqslant \biggl(\int\limits_r^R d^{1/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \biggr)^l \biggl(\int\limits_r^R t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \biggr)^{1-l} \\ &\geqslant \biggl(\int\limits_r^R t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \biggr)^{1-l}. \end{aligned} \tag{54}$$

Аналогично, если $d \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned} \int\limits_r^R d^{p/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt &\geqslant \int\limits_r^R d^{s/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \\ &\geqslant \biggl(\int\limits_r^R d^{1/(p-1)} t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \biggr)^s \biggl(\int\limits_r^R t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \biggr)^{1-s} \\ &\geqslant \biggl(\int\limits_r^R t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \biggr)^{1-s}. \end{aligned} \tag{55}$$

Теперь из (53), (54) и (55) найдем

$$\begin{aligned} &C_p\Bigl(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0}\Bigr) \\ &\quad \geqslant \beta^{-1} \int\limits_{\partial B_1^0} \min\biggl\{ \biggl(\int\limits_r^R t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \biggr)^{1-l}, \biggl(\int\limits_r^R t^{-(n-1)/(p-1)}\,dt \biggr)^{1-s} \biggr\}\,d\eta. \end{aligned}$$

В силу условия (12) при $t \in (r, R)$ имеем

$$t^{-(n-1)/(p-1)} \leqslant \theta^{(n-1)(p_0-1)^{-1}(s-1)^{-1}}(t)\, t^{-(n-1)/(p_0-1)}.$$

Следовательно, полагая

$$\nu(t) = \theta^{(n-1)(p_0-1)^{-1}(s-1)^{-1}}(t)$$

и пользуясь монотонностью θ, получим

$$C_p(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0}) \geqslant C(n,\alpha,\beta)\nu^{1-l}(r) \times \min\biggl\{ \biggl(\int\limits_r^R t^{-(n-1)/(p_0-1)}\,dt\biggr)^{1-l},\ \biggl(\int\limits_r^R t^{-(n-1)/(p_0-1)}\,dt\biggr)^{1-s}\biggr\}.$$

Отсюда приходим к следующим соотношениям:

$$C_p(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0}) \geqslant C\nu^{1-l}(r)|R^{(p_0-n)/(p_0-1)} - r^{(p_0-n)/(p_0-1)}|^{1-l}, \quad \text{если } p_0 < n,$$
$$C_p(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0}) \geqslant C\nu^{1-l}(r)\ln^{1-l}(R/r), \quad \text{если } p_0 = n,$$
$$C_p(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0}) \geqslant C\nu^{1-l}(r)|R^{(p_0-n)/(p_0-1)} - r^{(p_0-n)/(p_0-1)}|^{1-l}, \quad \text{если } p_0 > n,$$

где $C = C(n,\alpha,\beta)$.

Вспоминая определение ν и пользуясь (12), (13), получим следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть выполнено предположение* (12) *и* $\delta R \leqslant r \leqslant R/2$, $\delta > 0$. *Существуют положительные константы* $c_i = c_i(n,\alpha,\beta)$, $i = 1,2,3$, *и* $C = C(n,\alpha,\beta,\delta)$, *такие, что справедливы неравенства*

$$C_p(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0}) \geqslant C\theta^{-c_1}(r)R^{n-p_0}, \quad \textit{если } p_0 < n, \tag{56}$$
$$C_p(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0}) \geqslant C\theta^{-c_2}(r) \quad \textit{если } p_0 = n, \tag{57}$$
$$C_p(\overline{B}_r^{x_0}, B_R^{x_0}) \geqslant C\theta^{-c_3}(r)R^{n-p_0}, \quad \textit{если } p_0 > n. \tag{58}$$

Доказательство теоремы 3. Достаточно рассмотреть случай $p_0 \leqslant n$, так как в случае $p_0 > n$ граничная точка всегда регулярна. Поскольку дополнение к области D в окрестности точки x_0 содержит конус с вершиной в этой точке, то для достаточно малого $r_0 > 0$ и всех $r < r_0$ множество $\overline{B}_r^{x_0} \setminus D$ содержит шар $\overline{B}_{\delta r}^{x_r}$, где $\delta > 0$ не зависит от r. В силу свойств ёмкости

$$C_p\Bigl(\overline{B}_r^{x_0} \setminus D, B_{2r}^{x_0}\Bigr) \geqslant C_p\Bigl(\overline{B}_{\delta r}^{x_r}, B_{2r}^{x_0}\Bigr) \geqslant C_p\Bigl(\overline{B}_{\delta r}^{x_r}, B_{3r}^{x_r}\Bigr).$$

Аналогично оценкам леммы 5 можно показать, что

$$C_p\bigl(\overline{B}_{\delta r}^{x_r}, B_{3r}^{x_r}\bigr) \geqslant C(n,\alpha,\beta,\delta)\theta^{-\mu}(r)r^{n-p_0}, \text{ если } p_0 < n, \quad \mu = \mu(n,\alpha,\beta).$$

Здесь надо перейти в систему полярных координат (t,η) с центром в точке x_r, $t = |x - x_r|$, $\eta = (x - x_r)/|x - x_r|$ и заметить, что для $\delta r < t < 3r$ имеет место неравенство

$$t^{-|p(t,\eta)-p_0|} \leqslant t^{-\omega(t+r)} \leqslant C(\delta)(t+r)^{-\omega(t+r)} = C(\delta)\theta(t+r) \leqslant C(\delta)\theta(r).$$

Следовательно,

$$C_p\bigl(\overline{B}_r^{x_0} \setminus D, B_{2r}^{x_0}\bigr) \geqslant C(n,\alpha,\beta,q)\theta^{-\mu}(r)r^{n-p_0}, \quad \mu = \mu(n,\alpha,\beta).$$

Отсюда,

$$\xi(t) \geqslant C(n, \alpha, \beta, q)\theta^{-\mu/(\alpha-1)}.$$

По условию теоремы $\theta(t) = (\ln|\ln t|)^k$. Следовательно

$$\int_0 \exp\big(-\theta^{3+2n/\alpha}(t)\big)\xi(t)t^{-1}\,dt$$
$$\geqslant C\int_0 \exp(-(\ln|\ln t|)^{k(3+2n/\alpha)})(\ln|\ln t|)^{-k\mu/(\alpha-1)}t^{-1}\,dt.$$

Если $k < \alpha/5n$, то $k(3+2n/\alpha) < 1$, и последний интеграл расходится, что в силу теоремы 1 влечёт регулярность граничной точки x_0. □

Список литературы

[1] Жиков В. В., *Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **47** (1983), №5, 961–995.

[2] Жиков В. В., *Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **50** (1986), №4, 675–711.

[3] Жиков В. В., *Оценки типа Мейерса для решения нелинейной системы Стокса*, Диффер. уравн. **33** (1997), №1, 107–144.

[4] Růžička M., *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2000.

[5] Acerbi E., Mingione G., Seregin G., *Regularity results for parabolic systems related to a class of non-Newtonian fluids,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **21** (2004), no. 1, 25–60.

[6] Жиков В. В., *Разрешимость трёхмерной задачи о термисторе*, Тр. Мат. ин-та РАН **261** (2008), 101–114.

[7] Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M., *Lebesgue and Sobolev spaces with variable txponents*, Lecture Notes in Math., vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011.

[8] Zhikov V. V., *On Lavrentiev's Phenomenon*, Russian J. Math. Phys. **3** (1994), no. 2, 249–269.

[9] Жиков В. В., *О постановке краевых задач для интегрантов вида* $|\xi|^{\alpha(x)}$, В Московском математическом обществе, Успехи мат. наук **41** (1986), №4, 187–188.

[10] Zhikov V. V., *On some variational problems*, Russian J. Math. Phys. **5** (1997), no. 1, 105–116.

[11] Алхутов Ю. А., Крашенинникова О. В., *Непрерывность в граничных точках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста*, Изв. РАН. Сер. мат. **68** (2004), №6, 3–60.

[12] Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д., *Регулярность граничной точки для* $p(x)$*-лапласиана*, Пробл. мат. анал. **92** (2018), 5–25.

[13] Алхутов Ю. А., *Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста,* Диффер. уравн. **33** (1997), №12, 1651–1660.

[14] Perron O., *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für* $\triangle u = 0$, Math. Z. **18** (1923), 42–54.

[15] Wiener N., *Certain notions in potential theory*, J. Math. Phys. **3** (1924), no. 1, 24–51.

[16] Wiener N., *The Dirichlet problem*, J. Math. Phys. **3** (1924), no. 3, 127–146.
[17] Wiener N., *Note on a paper of O. Perron*, J. Math. Phys. **4** (1925), no. 1–4, 21–32.
[18] Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O., *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1993.
[19] Кондратьев В. А., Ландис Е. М., *Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*, Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундам. направления, вып. 32, ВИНИТИ, М., 1988, с. 99–215.
[20] Lebesgue H. L., *Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet*, C. R. Soc. Math. France **41** (1913), 17.
[21] Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F., *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **17** (1963), 43–77.
[22] Мазья В. Г., *О модуле непрерывности решения задачи Дирихле вблизи нерегулярной границы*, Пробл. мат. анал., ЛГУ, Л., 1966, с. 45–58.
[23] Мазья В. Г., *О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме*, Мат. заметки **2** (1967), №2, 209–220.
[24] Мазья В. Г., *О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений*, Вестник Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех. астроном. **1970**, вып. 13, 42–55.
[25] Кроль И. Н., Мазья В. Г., *Об отсутствии непрерывности и непрерывности по Гёльдеру решений квазилинейных эллиптических уравнений вблизи нерегулярной границы*, Тр. Моск. мат. о-ва **26** (1972), 75–94.
[26] Gariepy R., Ziemer W. P., *A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **67** (1977), no. 1, 25–39.
[27] Lindqvist P., Martio O., *Two theorems of N. Wiener for solutions of quasilinear elliptic equations*, Acta Math. **155** (1985), no. 3–4, 153–171.
[28] Kilpeläinen T., Malý J., *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations*, Acta Math. **172** (1994), 137–161.
[29] Шарапудинов И. И., *Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем*, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, 2012.
[30] Trudinger N. S., *On the regularity of generalized solutions of linear, non-unformly elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **42** (1971), 50–62.

ВлГУ им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
ул. Горького, 87
600000, Владимир, Россия
E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

Поступило 31 октября 2018 г.

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
Миусская пл., 4
125047, Москва, Россия
E-mail: peitsche@yandex.ru