Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Д. Рюэль, О многообразиях, отвечающих сосуществованию фаз,
ТМФ, 1977, том 30, номер 1, 40–47

https://www.mathnet.ru/tmf2714

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
23 января 2026 г., 05:57:26

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 30, № 1
январь, 1977

О МНОГООБРАЗИЯХ, ОТВЕЧАЮЩИХ СОСУЩЕСТВОВАНИЮ ФАЗ

Д. Рюэль [1]

Используя одну теорему о выпуклых функциях, принадлежащую Р. Исраэлю, мы показываем, что точка сосуществования $n+1$ фаз не может быть изолированной в пространстве взаимодействий, а напротив, принадлежит некоторому «бесконечномерному многообразию».

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно Р. Б. Исраэль [1] предложил весьма эффективную технику доказательства существования фазовых переходов в решетчатых системах. В этой заметке мы покажем, опираясь на работу Исраэля, что точка сосуществования по меньшей мере $n+1$ фаз не может быть изолированной в пространстве взаимодействий, но напротив, лежит в некотором бесконечномерном множестве. Исходя из физических соображений (правило фаз Гиббса), можно ожидать, что это множество есть «многообразие коразмерности n». В частности, при $n=2$ можно было бы считать, что оно локально разделяет пространство потенциалов взаимодействия на две области, по крайней мере, в случае, когда это пространство выбрано надлежащим образом. Мы не доказываем в этой заметке столь сильные результаты, однако то, что в ней доказано, можно рассматривать как один из шагов в этом направлении [2)].

С чисто технической точки зрения мы делаем чуть больше, чем повторяем рассуждения Исраэля с небольшими видоизменениями. Мы изложим наши результаты на основе формализма классической статистической механики, который описывается в разделе 2. В разделе 3 излагается техника Исраэля. Наши новые результаты содержатся в разделах 4 и 5.

Наиболее законченный результат (в разделе 5) относится к случаю решетчатых газов с парным взаимодействием. Если значения потенциала взаимодействия зафиксированы на конечном множестве значений аргумента, то можно указать такое его продолжение и такое значение химического потенциала, для которых существуют две фазы с различными плотностями. Если заданы парный потенциал φ_0 и химический потенциал μ_0 такие, для которых существуют две фазы с различными плотностями, и если далее зафиксировано малое изменение потенциала φ_0 на конечном множестве значений аргумента, то подбирая малое возмущение потен-

---

[1)] D. Ruelle. Institut des hautes études scientifiques, Bures-sur-Yvette, France.

[2)] Близкие с физической точки зрения результаты, основанные на совершенно ином математическом аппарате, получены Пироговым и Синаем [2–4]. См. также [5].

 © Издательство «Наука»

циала на остальных значениях аргумента и малое изменение химического потенциала, можно снова получить потенциал парного взаимодействия, которому отвечают две фазы с различными плотностями.

2. РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ РЕШЕТЧАТОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ [3)]

Пусть F — конечное множество с дискретной топологией. Если $\xi=(\xi_x)\in F^{\mathbf{Z}^\nu}$ и $a\in\mathbf{Z}^\nu$, мы определим действие группы трансляций $\mathbf{Z}^\nu$ на $F^{\mathbf{Z}^\nu}$, полагая $(\tau^a\xi)_x=\xi_{x+a}$. Пространство $F^{\mathbf{Z}^\nu}$ компактно в топологии произведения. Пусть Ω — непустое замкнутое подмножество $F^{\mathbf{Z}^\nu}$, инвариантное относительно преобразований $\{\tau^a\}$. Преобразования τ^a (рассматриваемые на Ω) суть гомеоморфизмы. Для конечного $\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$ обозначим через Ω_Λ образ множества Ω при проектировании на F^Λ. Мы назовем *взаимодействием* вещественную функцию Φ на объединении множества Ω_Λ такую, что Φ обращается в нуль на $\Omega_\varnothing$, Φ инвариантна относительно группы трансляций $\mathbf{Z}^\nu$ и

$$|\Phi|=\sum_{X\ni 0}\frac{1}{\operatorname{card}X}\sup_{\xi_X\in\Omega_X}|\Phi(\xi_X)|<\infty.$$

Взаимодействия образуют банахово пространство $\mathfrak{A}$ с нормой $|\cdot|$.

Пусть $\mathscr{E}$ — пространство вещественных непрерывных функций на Ω. Оно является банаховым пространством с равномерной нормой $\|\cdot\|$. Пространство $\mathscr{E}^*$, двойственное $\mathscr{E}$, есть пространство мер на Ω; мы выделим в $\mathscr{E}^*$ подмножество I трансляционно-инвариантных вероятностных мер, т. е. мер таких, что $\sigma(A)=\sigma(A\circ\tau^x)$ для любых $A\in\mathscr{E}$ и $x\in\mathbf{Z}^\nu$. Множество I выпукло и компактно в w^*-топологии на $\mathscr{E}$ (слабой топологии).

Если $\Phi\in\mathfrak{A}$, мы введем $A_\Phi\in\mathscr{E}$, полагая

$$A_\Phi(\xi)=\sum_X{}^*\Phi(\xi\restriction_X),$$

где суммирование распространяется на все X такие, что 0 является «центральной» точкой X (если $\mathbf{Z}^\nu$ упорядочено лексикографически, то 0 занимает положение $\operatorname{ent}[{}^1/_2(\operatorname{card}X+1)]$ в X). Можно дать и другие определения, которые приводят к одному и тому же значению для $\sigma(A_\Phi)$, когда $\sigma\in I$. Выбранное здесь определение удобно, поскольку образ $\mathfrak{A}$ при отображении $\Phi\to A_\Phi$ есть $\mathscr{E}$ и при этом $\|A\|=\inf\{|\Phi|:A=A_\Phi\}$. В частности, если A зависит только от сужения ξ на некоторое конечное $\Delta\subset\mathbf{Z}^\nu$, мы будем писать $A\in\mathscr{E}_\Delta$; в этом случае существует такое Φ, что $A=A_\Phi$, $\Phi(\xi\restriction_X)=0$ за исключением тех X, которые являются трансляциями некоторого конечного Λ, и $|\Phi|=\|A\|$. В зависимости от ситуации будет удобно использовать либо взаимодействия как элементы пространства $\mathfrak{A}$, либо непрерывные функции из $\mathscr{E}$.

Давление P^Φ для $\Phi\in\mathfrak{A}$ или $P(A)$ для $A\in\mathscr{E}$ определяется стандартным образом, и при этом $P^\Phi=P(A_\Phi)$. Функционал $P:\mathscr{E}\to\mathbf{R}$ является выпуклым и непрерывным. Энтропия меры $\sigma\in I$ обозначается $s(\sigma)$. Функционал s: $I\to\mathbf{R}$ является аффинным, полунепрерывен сверху и больше или равен

[3)] Теория, излагаемая здесь, есть обобщение хорошо известных результатов, относящихся к решетчатым газам (см. [6]).

нулю. Имеет место следующий вариационный принцип:

$$(1) \qquad P(A)=\max_{\sigma\in I}(s(\sigma)+\sigma(A)),$$

и обратно,

$$s(\sigma)=\inf_{A\in\mathscr{E}}(P(A)-\sigma(A)).$$

Множество I_A тех мер $\sigma\in I$, для которых правая часть (1) максимальна, есть множество равновесных состояний для A.

Пусть V — банахово пространство, V^* — пространство, двойственное V, и f: $V\to\mathbf{R}$ — непрерывный выпуклый функционал. Мы скажем, что $\sigma\in V^*$ является f-ограниченным, если существует $c\in\mathbf{R}$ такое, что $\sigma\leqslant f+c$. Будем говорить, что $\sigma\in V^*$ касательно к f в точке $x\in V$, если $f(x+y)\geqslant f(x)+\sigma(y)$ для всех $y\in V$.

P-ограниченные элементы пространства $\mathscr{E}^*$ суть в точности инвариантные вероятностные меры $\sigma\in I$. Элементы $\sigma\in\mathscr{E}^*$, касательные к P в точке A, образуют множество I_A равновесных состояний для A. Если f обозначает функционал $\Phi\to P^\Phi$ на $\mathfrak{A}$, то f-ограниченные элементы пространства $\mathfrak{A}^*$ имеют вид $\Psi\to\sigma(A_\Psi)$, где $\sigma\in I$, а элементы из $\mathfrak{A}$, касательные к f в точке Φ, имеют вид $\Psi\to\sigma(A_\Psi)$, где $\sigma\in I_{A_\Phi}$.

Выпуклое компактное множество I является симплексом Шоке. Это означает, что каждое $\rho\in I$ представляется как барицентр некоторой однозначно определенной меры m_ρ на I, которая сосредоточена на множестве экстремальных точек симплекса I. Экстремальные точки I называются *эргодическими состояниями*, и мера m_ρ дает эргодическое разложение состояния ρ. Для данного $A\in\mathscr{E}$ определим $\hat{A}$: $I\to\mathbf{R}$ формулой $\hat{A}(\sigma)=\sigma(A)$, тогда мера m_ρ будет задана равенством

$$(2) \qquad m_\rho\left(\sum_{i=1}^{l}\hat{A}_i\right)=\lim_{\Lambda\uparrow\infty}\rho\left[\prod_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{\operatorname{card}\Lambda}\sum_{x\in\Lambda}[A_i\circ\tau^x]\right)\right],$$

где $\Lambda\nearrow\infty$ обозначает «предел в смысле Ван-Хова», например Λ — куб, длина ребра которого стремится к бесконечности.

Множество I_A равновесных состояний для A выпукло, компактно и является симплексом Шоке. Его экстремальные точки суть эргодические состояния; отсюда следует, что однозначно определяемое разложение состояния ρ по экстремальным точкам I_A совпадает с эргодическим разложением ρ, даваемым m_ρ.

3. ТЕОРИЯ ИСРАЭЛЯ

Техника Исраэля состоит в аппроксимации инвариантных состояний равновесными состояниями на основе следующего общего результата о выпуклах функциях.

Теорема 1. *Пусть V — банахово пространство, f:$V\to\mathbf{R}$ — выпуклый непрерывный функционал и C — замкнутый выпуклый конус в V с вершиной 0. Если $\sigma_0\in V^*$ f-ограничено, $x\in V$ и $\varepsilon>0$, то существует $\sigma\in V^*$, касательное к f в точке x такое, что $x\in x_0+C$,*

$$\|x-x_0\|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}[f(x_0)-\sigma_0(x_0)-s(\sigma_0)],$$

и $\sigma(y)\geqslant\sigma_0(y)-\varepsilon\|y\|$ $(\forall y\in C)$, где обозначено $s(\sigma_0)=\inf\{f(y)-\sigma_0(y):\ y\in V\}$.

В применении к классической решетчатой статистической механике мы полагаем $V=\mathfrak{A}$ и f: $\Phi\to P^{\Phi}$. В результате мы получаем следующие утверждения.

Лемма. *Пусть* A_1, $A_2\in\mathscr{E}$ *и* $S\subset\mathbf{Z}^\nu$. *Определим выпуклый конус*

$$\mathscr{L}_S=\Big\{a_1A_1+a_2A_2+\frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^\nu}b_xA_1(A_2\circ\tau^x)+b_{-x}(A_1\circ\tau^x)A_2\colon a_1,a_2,b_x\in\mathbf{R},\ b_x\geqslant$$

$$\geqslant 0,\ b_x=0,\ \textit{если}\ x\notin S\ \textit{и}\ \sum_{x\in S}b_x<\infty\Big\}.$$

Допустим, что A_1, $A_2\in\mathscr{E}_\Delta$ *для некоторого конечного* $\Delta\subset\mathbf{Z}^\nu$. *Для данных* $\sigma_0\in I$, $B\in\mathscr{E}$ *и* $\varepsilon>0$ *найдутся* $B\in B_0+\mathscr{L}_S$ *и* $\sigma\in I_B$ *такие, что*

$$\|B-B_0\|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}[P(B_0)-\sigma_0(B_0)-s(\sigma_0)] \tag{3}$$

и

$$\sigma(A_1(A_2\circ\tau^x))-\sigma(A_1)\sigma(A_2)\geqslant\sigma_0(A_1(A_2\circ\tau^x))-$$

$$-\sigma_0(A_1)\sigma_0(A_2)-3\varepsilon\|A_1\|\cdot\|A_2\|$$

для всех $x\in S$.

Теорема 2. *Пусть* $A\in\mathscr{E}_\Delta$ *для некоторого конечного* $\Delta\subset\mathbf{Z}^\nu$; *определим выпуклый конус*

$$\mathscr{L}=\Big\{aA+\sum_{x\in\mathbf{Z}^\nu}b_xA(A\circ\tau^x)\colon a,\ b_x\in\mathbf{R},\ b_x\geqslant 0,\ \sum b_x<\infty\Big\}.$$

А. *Пусть* σ_0', $\sigma_0''\in I$ *таковы, что* $\sigma_0'(A)\neq\sigma_0''(A)$. *Для данного* $C\in\mathscr{E}$ *существуют* $B\in C+\mathscr{L}$ *и два равновесных состояния* σ', $\sigma''\in I_B$ *такие, что* $\sigma'(A)\neq\sigma''(A)$.

Б. *Пусть* σ_0', σ_0'' — *равновесные состояния для* $C\in\mathscr{E}$ *такие, что* $\sigma_0'(A)\neq\sigma_0''(A)$. *Для данного* $\varepsilon>0$ *можно выбрать* $\delta>0$ *такое, что если* $C'\in\mathscr{E}$ *и* $\|C'-C\|<\delta$, *то существуют* $B\in C'+\mathscr{L}$, *удовлетворяющее условию* $\|B-C'\|<\varepsilon$, *и два равновесных состояния* σ', $\sigma''\in I_B$, *для которых* $\sigma'(A)\neq\sigma''(A)$.

Покажем, для того чтобы воспользоваться этим в дальнейшем, каким образом теорема 2 получается из леммы. Запишем $\sigma_0={}^1/_2(\sigma_0'+\sigma_0'')$. Условие $\sigma_0'(A)\neq\sigma_0''(A)$ означает, что

$$m_{\sigma_0}(\hat{A}^2)=\lim_{\Lambda\nearrow\infty}\sigma_0\Big[\Big(|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda}A\circ\tau^x\Big)^2\Big]>\sigma_0(A)^2.$$

Выберем $\varepsilon>0$ таким, что

$$\lim_{\Lambda\nearrow\infty}\sigma_0\Big[\Big(|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda}A\circ\tau^x\Big)^2\Big]\geqslant\sigma_0(A)^2+4\varepsilon\|A\|^2.$$

Применим лемму для $A_1=A_2=A$ и $S=\mathbf{Z}^\nu$ (B_0 будет выбрано позже), в результате чего мы получим $B\in B_0+\mathscr{L}$ и $\sigma\in I_B$ такие, что

$$\|B-B_0\|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}[P(B_0)-\sigma_0(B_0)-s(\sigma_0)]$$

и

$$\sigma\left[\left(|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda}A\circ\tau^x\right)^2\right]-\sigma(A)^2\leqslant$$

$$\leqslant\sigma_0\left[\left(|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda}A\cdot\tau^x\right)^2\right]-\sigma_0(A)^2-3\varepsilon\|A\|^2.$$

Следовательно,

$$m_\sigma(\hat{A}^2)=\lim_{\Lambda\nearrow\infty}\sigma\left[\left(|\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda}A\circ\tau^x\right)^2\right]-\sigma(A)^2\geqslant\varepsilon\|A\|^2.$$

Из этого вытекает, что можно выбрать σ' и σ'', принадлежащие носителю меры m_σ, для которых $\sigma'(A)\neq\sigma''(A)$. Взяв $B_0=C$, мы получим утверждение A.

Допустим теперь, что σ_0', $\sigma_0''\in I_C$. Выберем $\delta>0$ таким образом, чтобы при $C'\in\mathscr{E}$ и $\|C'-C\|<\delta$ мы имели $P(C')-\sigma_0(C')-s(\sigma_0)<\varepsilon^2$. Взяв $B_0=C'$, мы получим $B\in C'+\mathscr{L}$, а неравенство (3) дает $\|B-C'\|<\varepsilon$, что доказывает утверждение Б.

4. СОСУЩЕСТВОВАНИЕ ФАЗ

В предыдущих лемме и теореме мы можем ограничиться случаем взаимодействии Φ таких, что $\Phi(\xi\restriction_X)=0$, если $\operatorname{card}X>2\operatorname{card}\Delta$ (или же соответствующими элементами пространства $\mathscr{E}$). Теорема 2 относится к той ситуации, когда имеется по меньшей мере два различных равновесных состояния. Физически это соответствует сосуществованию как минимум двух фаз. Часть Б теоремы 2 показывает, что взаимодействие Ψ_0 (либо функция C), для которого сосуществует несколько фаз, не может быть изолированным: оно лежит в «бесконечномерном многообразии» таких же взаимодействий. Естественно было бы ожидать, что не все эти взаимодействия физически эквивалентны» (Φ и Ψ являются физически эквивалентными, если существует такое $c\in\mathbf{R}$, что $\sigma(A_\Phi)=\sigma(A_\Psi)+c$ для каждого $\sigma\in I$), и что это «многообразие» не является плотным. Это будет доказано в одном частном случае, рассматриваемом в следующем разделе.

Сосуществование по меньшей мере $n+1$ фаз трактуется аналогичным образом. Пусть $A_1,\ldots,A_n\in\mathscr{E}_\Delta$ и $A=\sum a_iA_i$, где $\sum a_i^2=1$. Предположим, что $\sigma_0^{(0)},\sigma_0^{(1)},\ldots,\sigma_0^{(n)}\in I$ таковы, что равенство $\sigma_0^{(0)}(A)=\sigma_0^{(1)}(A)=\ldots=\sigma_0^{(n)}(A)$ невыполнимо ни при каком выборе чисел $a_1,\ldots,a_n$. Полагая

$$\sigma_0=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sigma_0^{(i)},$$

мы имеем $m_{\sigma_0}(\hat{A}^2)-\sigma_0(A)^2\geqslant4\varepsilon\|A\|^2$, где $\varepsilon>0$ не зависит от $a_1,\ldots,a_n$. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство, порожденное элементами A_i и $A_i(A_j\circ\circ\tau^x)$, и пусть $B_0\in\mathscr{E}$. Несложная модификация леммы показывает, что существует $B\in B_0+\mathscr{L}$ такое, что

$$\|B-B_0\|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}[P(B_0)-\sigma_0(B_0)-s(\sigma_0)],$$

а также $\sigma \in I_B$ такое, что

$$|\sigma(A\cdot(A\circ\tau^x))-\sigma(A)^2-[\sigma_0(A(A\circ\tau^x))-\sigma_0(A)^2]|\leqslant 3\varepsilon\|A\|^2$$

при всех $a_1,\ldots,a_n$ и всех $x\in\mathbf{Z}^\nu$. Следовательно, $m_\sigma(\hat{A}^2)-\sigma(A)^2\geqslant\varepsilon\|A\|^2$, это доказывает, что размерность множества I_B не меньше $n+1$, т. е. для $B\in\mathscr{E}$ сосуществует не менее $n+1$ фаз. Таким образом, так же как и в случае двух фаз, взаимодействие, которому отвечает сосуществование $n+1$ фаз, не может быть изолированным.

5. РЕШЕТЧАТЫЕ ГАЗЫ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрим систему с $F=\{0,1\}$ и $\Omega=\{0,1\}^{\mathbf{Z}^\nu}$. Определим $A\in\mathscr{E}_{\{0\}}$, полагая $A(\xi)=\xi_0$ (A принимает, таким образом, значения 0 и 1). Мы рассмотрим «парные» взаимодействия Φ, для которых $\Phi(\xi\restriction_X)=0$, если $|X|>2$, и $\Phi(\xi\restriction_{\{0\}})=-\mu A(\xi)$, $\Phi(\xi\restriction_{\{0,x\}})=\varphi(x)A(\xi)A(\tau^x\xi)$ при $x\neq 0$. Здесь $\mu\in\mathbf{R}$, и функция $\varphi(x)=\varphi(-x)\in\mathbf{R}$ определена при $x\neq 0$. Заметим, что

$$|\Phi|=\mu+\frac{1}{2}\sum_{x\neq 0}|\varphi(x)|.$$

Имеют место следующие утверждения.

I. Пусть $0\in M\subset\mathbf{Z}^\nu$, где M конечно и $M=-M$. Предположим, что задана функция $\tilde{\varphi}$: $M\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ такая, что $\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\varphi}(-x)$. Тогда можно продолжить $\tilde{\varphi}$ до функции φ: $\mathbf{Z}^\nu\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ таким образом, что

$$\sum_{x\neq 0}|\varphi(x)|<\infty,$$

и найти такое μ, что для взаимодействия Φ существуют два равновесных состояния σ' и σ'', удовлетворяющих следующему условию.

II. Пусть μ_0 и φ_0 определяют парное взаимодействие Φ_0. Предположим, что σ_0' и σ_0'' являются равновесными состояниями для Φ_0 и что $\sigma_0'(A)\neq\sigma_0''(A)$. Для данного $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, обладающее следующим свойством. Пусть $0\in M\subset\mathbf{Z}^\nu$, где M конечно и $M=-M$. Предположим, что функция $\tilde{\varphi}$: $M\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ удовлетворяет условию $\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\varphi}(-x)$ и

$$\frac{1}{2}\sum_{x\in M\setminus\{0\}}|\tilde{\varphi}(x)-\varphi_0(x)|<\delta.$$

Тогда можно продолжить $\tilde{\varphi}$ до функции φ: $\mathbf{Z}^\nu\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ и найти такое μ, что $\varphi(x)=\varphi(-x)$, $\varphi(x)\leqslant\varphi_0(x)$ при $x\notin M$,

$$|\mu-\mu_0|+\frac{1}{2}\sum_{x\in M}|\varphi(x)-\varphi_0(x)|<\varepsilon,$$

и для взаимодействия Φ, отвечающего μ и φ, существуют два равновесных состояния σ' и σ'', удовлетворяющих условию $\sigma'(A)\neq\sigma''(A)$.

Для того чтобы доказать утверждения I и II, достаточно повторить доказательство теоремы 2, воспользовавшись утверждением леммы для $S=\mathbf{Z}^\nu\setminus M$. Отметим, что

$$m_\sigma(\hat{A})^2=\lim_{\Lambda\nearrow\infty}\rho\left[|\Lambda|^{-2}\sum_{\substack{x,\,y\in\Lambda,\\ x-y\notin M}}(A\circ\tau^x)(A\circ\tau^y)\right].$$

6. ЗАМЕЧАНИЯ

Утверждение I предыдущего раздела показывает, что если парному взаимодействию Φ_0 отвечают два равновесных состояния с различными плотностями, то вблизи Φ_0 имеется бесконечномерное семейство парных взаимодействий Φ, которым также отвечают два равновесных состояния с различными плотностями.

Как отмечалось в разделе 4, можно проверить, что эти взаимодействия Φ не являются физически эквивалентными. Это вытекает из [7]: парные взаимодействия Φ_0 и Φ физически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mu_0=\mu$ и $\varphi_0=\varphi$.

Можно показать также, что парные взаимодействия, которым отвечают два равновесных состояния с различными плотностями, образуют множество, не являющееся плотным в $\mathfrak{A}$. Этот результат вытекает из сходимости разложения по степеням активности в окрестности нуля (см., например, [6, раздел 4.2.6]).

7. ЭВРИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

В теории фазовых переходов хотелось бы иметь утверждение о том, что если для взаимодействия Φ_0 существуют ровно $n+1$ фаз, то (в соответствующим образом выбранном пространстве взаимодействий) через точку Φ_0 проходит многообразие коразмерности n, где также существуют $n+1$ фаз. Равновесные состояния для Φ_0 отвечают некоторым элементам $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ пространства V^*, которые совпадают на некотором подпространстве $X\subset V$ коразмерности n с фиксированным линейным функционалом w. Сужение $P\restriction_{(\Phi_0+X)}$ функционала (давления) на подпространство Φ_0+X имеет единственный касательный вектор в точке Φ_0 (теорема Хана — Банаха).

Пусть Y — подпространство размерности n в V, трансверсальное к X, и $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n\in Y^*$ суть сужения на Y функционалов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Следуя идеям, развитым в разделе 4, нетрудно показать, что существуют $\bar\beta_0, \bar\beta_1, \ldots, \bar\beta_n\in Y^*$, как угодно близкие соответственно к $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, а также $\delta>0$ и $\varkappa>0$, для которых справедливо следующее

Утверждение. *Для каждого $\Phi\in X$ можно указать $\psi(\Phi)\in V$ такое, что*

$$\|\psi(\Phi)\|\leqslant\varkappa[P(\Phi_0+\Phi)-P(\Phi_0)-w(\Phi)], \tag{4}$$

и для взаимодействия $\Phi_0+\Phi+\psi(\Phi)$ существуют $n+1$ фаз; более точно, если $\|\Phi\|<\delta$, то

$$P\restriction_{(\Phi+\psi(\Phi)+Y)}\geqslant P(\Phi+\psi(\Phi))+\bar\beta_i, \qquad i=0,1,\ldots,n. \tag{5}$$

Для каждого $\Phi\in X$ мы имеем равенство

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[P(\Phi_0+\lambda\Phi)-P(\Phi_0)-w(\lambda\Phi)]=0, \tag{6}$$

поскольку $P\restriction_{(\Phi_0+X)}$ имеет единственный касательный вектор в точке Φ_0. Было бы заманчиво предполагать, что справедливо соотношение

$$\frac{P(\Phi_0+\Phi)-P(\Phi_0)-w(\Phi)}{\|\Phi\|}\to 0, \quad \text{если } \Phi\in X,\ \|\Phi\|\to 0.$$

В этом случае можно выбрать δ и упомянутую выше функцию ψ таким образом, что $\psi(\Phi)\in Y$ при $\|\Phi\|<\delta$. Более того такое ψ будет единственным, для которого справедливо (4) и (5), и будет непрерывно зависеть от Φ (это утверждение представляет собой вариант теоремы о неявной функции). Образ $\psi(\{\Phi\in X:\|\Phi\|<\delta\})$ и будет искомым многообразием сосуществования фаз. Можно показать, что это многообразие касается X и является пересечением многообразий, которым отвечает сосуществование менее чем $n+1$ фаз и которые геометрически располагаются, как и следовало ожидать, симплициально. Доказательство этих результатов будет опубликовано отдельно.

К несчастью, соотношение (6), вообще говоря, неверно. В самом деле, в случае одномерного решетчатого газа, если для данного парного потенциала φ_0 существуют две фазы с различными плотностями, то тем не менее можно всегда указать финитные парные потенциалы, как угодно близкие к φ_0, для которых фазовые переходы отсутствуют. В настоящий момент неизвестно, выполняется ли соотношение (6) при каких-либо достаточно общих условиях.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Ю. Сухова за перевод текста.

Институт высших научных исследований
г. Бюр-сюр-Иветт, Франция

Поступила в редакцию
4 июня 1976 г.

Литература

[1] R. B. Israel. Commun. Math. Phys., **43**, 59, 1975.
[2] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай. Функц. анализ и его прилож., **8**, № 1, 25, 1974.
[3] С. А. Пирогов. Изв. АН СССР, сер. матем., **39**, № 3, 1404, 1975.
[4] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай. ТМФ, **25**, 358, 1975; **26**, 61, 1976.
[5] M. Cassandro, A. da Fano, E. Olivieri. Commun. Math. Phys., **44**, 45, 1975.
[6] Д. Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты, «Мир», 1971.
[7] R. B. Griffiths, D. Ruelle. Commun. Math. Phys., **23**, 169, 1971.

ON MANIFOLDS OF PHASE COEXISTENCE

D. Ruelle

Using a theorem on convex functions due to Israel, it is shown that a point of coexistence of $n+1$ phases cannot be isolated in the space of interactions, but lies on some «infinite dimensional manifold».