



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. A. Alpin, S. N. Il'in, Infinite extensions of Toeplitz matrices, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2003, Volume 296, 5–14

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

February 19, 2025, 06:09:27



Ю. А. Альпин, С. Н. Ильин

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

Конечная или бесконечная матрица $A = (a_{ij})$ с элементами из поля F называется теплицевой, если $a_{ij} = a_{kl}$ при $i - j = k - l$. Пусть T – прямоугольная теплицева матрица. Обозначим через $T_{\mathbb{N}}$ продолжение T – бесконечную теплицеву матрицу, строки и столбцы которой занумерованы натуральными числами и угловой блок которой совпадает с T . Алгебраическая теория продолжений ганкелевых и теплицевых матриц, ранг которых совпадает с рангом исходной матрицы, построена в [1]. При этом задача продолжения для теплицевых матриц оказалась сложнее, чем для ганкелевых, в особенности для прямоугольного случая (см. [2]). В этой заметке мы интересуемся теплицевыми продолжениями наименьшего возможного ранга и выводим формулу для наименьшего из рангов бесконечных теплицевых продолжений матрицы T . Следует отметить, что продолжения наименьшего ранга обобщенных ганкелевых матриц изучались в [3].

Обозначение $T_{\mathbb{N}}$ вместо T_{∞} , принятого в книге [1], используется по той причине, что мы дополнительно вводим в рассмотрение бесконечную теплицеву матрицу $T_{\mathbb{Z}}$, строки и столбцы которой занумерованы целыми числами. Матрица $T_{\mathbb{Z}}$ представляет собой таблицу чисел, заполняющую плоскость, она содержит $T_{\mathbb{N}}$ в качестве правого нижнего угла. В силу свойства теплицевости матрица $T_{\mathbb{N}}$ полностью определяет матрицу $T_{\mathbb{Z}}$, и ранги этих матриц совпадают.

Мы будем пользоваться тем свойством матрицы $T_{\mathbb{Z}}$, что она определяется любой своей строкой: каждая строка получается из предыдущей сдвигом на одну позицию вправо. Аналогичное замечание относится и к столбцам.

Рассмотрим теплицеву $l \times m$ -матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_l & t_{l+1} & \dots & t_{l+m-1} \\ t_{l-1} & t_l & \dots & t_{l+m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix}.$$

Обозначим наименьший из рангов бесконечных теплицевых продолжений матрицы T через $\text{rt}(T)$. Очевидно, $\text{rt}(T) = 0$, только если T – нулевая матрица. Исключим этот случай из рассмотрения.

Положим $n = l + m - 1$ и рассмотрим ряд теплицевых матриц

$$T_1 = (t_1, \dots, t_n), \quad T_2 = \begin{pmatrix} t_2 & t_3 & \dots & t_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad T_n = \begin{pmatrix} t_n \\ \vdots \\ t_1 \end{pmatrix},$$

содержащих один и тот же набор элементов t_1, \dots, t_n . В этом ряду матриц T_l совпадает с T . Нетрудно заметить, что матрицы T_k имеют одно и то же множество теплицевых продолжений. Точнее, всякое продолжение матрицы T_{k+1} получается из продолжения матрицы T_k сдвигом – заменой (i, j) -элемента на $(i, j+1)$ -элемент. Следовательно, в дальнейшем мы можем без потери общности считать, что матрица T имеет размеры $1 \times n$.

Лемма 1. Пусть $T = (t_1, \dots, t_n)$. Тогда $\text{rt}(T) \leq n$.

Доказательство. Любой минор порядка $n + 1$ продолжения $T_{\mathbb{Z}}$, задаваемого строкой $(\dots, t_1, \dots, t_n, t_1, \dots, t_n, \dots)$, содержит две одинаковых строки и, значит, равен 0. \square

Лемма 2. Если $\text{rank}(T_{\mathbb{Z}}) \geq r$, то любые r подряд идущих строк матрицы $T_{\mathbb{Z}}$ линейно независимы.

Доказательство. Так как любые две строки матрицы $T_{\mathbb{Z}}$ равноправны в том смысле, что одна получается из другой сдвигом на некоторое число позиций влево или вправо, то доказательство достаточно провести для строк с номерами $1, \dots, r$. Через $t^{(i)}$ обозначим i -ю строку матрицы $T_{\mathbb{Z}}$. Предположим, что $t^{(1)}, \dots, t^{(r)}$ линейно зависимы. Тогда существуют коэффициенты $(\mu_1, \dots, \mu_r) \neq (0, \dots, 0)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^r \mu_i t^{(i)} = 0. \quad (1)$$

Можно считать, что $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_r \neq 0$ (в противном случае удалим из системы $\{t^{(1)}, \dots, t^{(r)}\}$ первые и последние строки, входящие в равенство (1) с нулевыми коэффициентами, применим при необходимости сдвиг влево и получим аналогичное равенство $\sum_{j=1}^{r'} \nu_j t^{(j)} = 0$, где $r' < r$, $\nu_1 \neq 0$ и $\nu_{r'} \neq 0$).

С учетом равноправия строк равенство (1) справедливо для любых r идущих подряд строк матрицы $T_{\mathbb{Z}}$:

$$\sum_{i=1}^r \mu_i t^{(i+k)} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Поскольку $\mu_r \neq 0$, то из (2) при $k = 0$ выводим, что строка $t^{(r)}$ является линейной комбинацией строк $t^{(1)}, \dots, t^{(r-1)}$. Аналогично, полагая в (2) $k = 1$, получаем, что строка $t^{(r+1)}$ является линейной комбинацией строк $t^{(2)}, \dots, t^{(r)}$ и, следовательно, линейно выражается через строки $t^{(1)}, \dots, t^{(r-1)}$. Повторяя проведенные рассуждения, придем к тому, что любая строка $t^{(i)}$ при $i \geq 1$ является линейной комбинацией строк $t^{(1)}, \dots, t^{(r-1)}$. Используя подобным образом условие $\mu_1 \neq 0$, можно показать, что любая строка $t^{(j)}$ при $j \leq 0$ тоже является линейной комбинацией строк $t^{(1)}, \dots, t^{(r-1)}$. Но тогда ранг системы строк матрицы $T_{\mathbb{Z}}$ не превосходит $r - 1$, что противоречит предположению $\text{rank}(T_{\mathbb{Z}}) \geq r$. \square

Заметим, что лемму 2 можно получить как простое следствие теоремы 15.4 [1], утверждающей, что в матрице $T_{\mathbb{N}}$ ранга r угловой минор порядка r отличен от нуля. Но эта теорема доказана в рамках теории (r, k, l) -характеристик теплицевых матриц, развитой в книге [1], и мы сочли полезным привести короткое независимое доказательство.

Обозначим через T'_k и T''_k расширенные матрицы $(T_k | e_1)$ и $(T_k | e_k)$, где e_1 и e_k – первый и, соответственно, последний столбцы единичной матрицы порядка k . Положим $S = \{k \mid \text{rank}(T_k) < \min\{\text{rank}(T'_k), \text{rank}(T''_k)\}\}$.

Теорема 1.

$$\text{rt}(T) = \begin{cases} \min_{k \in S} k - 1, & S \neq \emptyset, \\ n, & S = \emptyset. \end{cases}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что условие $\text{rank}(T_k) < \text{rank}(T'_k)$ (соответственно, $\text{rank}(T_k) < \text{rank}(T''_k)$) означает, что первая (последняя) строка матрицы T_k является линейной комбинацией остальных ее строк, поэтому формулировка теоремы эквивалентна следующему утверждению: $\text{rt}(T)$ — это наибольшее значение $k \leq n$ такое, что в матрице T_k первая строка не является линейной комбинацией последующих строк или последняя строка не является линейной комбинацией предыдущих строк.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно установить справедливость двух утверждений:

1) Если существует теплицево продолжение $T_{\mathbb{Z}}$ ранга $r < n$, то $r + 1 \in S$.

2) Если $r + 1 \in S$, то существует теплицево продолжение $T_{\mathbb{Z}}$, ранг которого не превосходит r .

Докажем первое утверждение. Пусть $T_{\mathbb{Z}}$ — теплицево продолжение ранга $r < n$. Тогда в системе строк матрицы $T_{\mathbb{Z}}$ существует базис, состоящий из r строк. Ввиду леммы 2 его образуют любые r подряд идущих строк. Составим из строк $t^{(1)}, \dots, t^{(r+1)}$ матрицу с бесконечным числом столбцов. Она содержит в качестве подматрицы матрицу T_{r+1} . Строка $t^{(r+1)}$ является линейной комбинацией строк $t^{(1)}, \dots, t^{(r)}$, следовательно, последняя строка матрицы T_{r+1} линейно выражается через ее первые r строк, что, согласно замечанию к теореме, означает справедливость неравенства $\text{rank}(T_{r+1}) < \text{rank}(T''_{r+1})$. Аналогично, строка $t^{(1)}$ является линейной комбинацией строк $t^{(2)}, \dots, t^{(r+1)}$, так что первая строка матрицы T_{r+1} линейно выражается через ее последние r строк, что влечет выполнение неравенства $\text{rank}(T_{r+1}) < \text{rank}(T'_{r+1})$. Следовательно, $r + 1 \in S$.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Пусть $r + 1 \in S$. Тогда в матрице T_{r+1} первая строка линейно выражается через последние r строк, а последняя строка — через первые r строк. Следовательно, для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_2, \dots, \beta_{r+1} \in F$

$$\begin{cases} \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_r t_r - t_{r+1} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_1 t_{n-r} + \dots + \alpha_r t_{n-1} - t_n = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 - \beta_2 t_2 - \dots - \beta_{r+1} t_{r+1} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ t_{n-r} - \beta_2 t_2 - \dots - \beta_{r+1} t_n = 0. \end{cases}$$

Тогда существуют μ_1, \dots, μ_{r+1} такие, что $\mu_1 \neq 0, \mu_{r+1} \neq 0$ и

$$\begin{cases} \mu_1 t_1 + \dots + \mu_{r+1} t_{r+1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \mu_1 t_{n-r} + \dots + \mu_{r+1} t_n = 0 \end{cases}$$

(указанным условиям будет, очевидно, удовлетворять по крайней мере один из наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, -1), (1, -\beta_2, \dots, -\beta_{r+1}), (\alpha_1 + 1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_r - \beta_r, -1 - \beta_{r+1})$). Используя условия $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_{r+1} \neq 0$, зададим рекуррентные соотношения:

$$t_{m+1} = -\frac{\mu_1}{\mu_{r+1}} t_{m-r+1} - \dots - \frac{\mu_r}{\mu_{r+1}} t_m, \quad m \geq n,$$

$$t_{m-1} = -\frac{\mu_2}{\mu_1} t_m - \dots - \frac{\mu_{r+1}}{\mu_1} t_{m+r-1}, \quad m \leq 1,$$

по которым найдем строку $(\dots, t_{-n}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots)$, определяющую бесконечное теплицево продолжение $T_{\mathbb{Z}}$. По построению любые $r+1$ идущих подряд строк матрицы $T_{\mathbb{Z}}$ линейно зависимы, откуда, ввиду леммы 2, $\text{rank}(T_{\mathbb{Z}}) \leq r$. \square

В лемме 1 было доказано, что $\text{rt}(T)$ всегда не превосходит длины строки $T = (t_1, \dots, t_n)$. Из замечания к теореме 1 легко следует условие равенства этих величин.

Следствие. *Равенство $\text{rt}(T) = n$ справедливо тогда и только тогда, когда $T = (\alpha, 0, \dots, 0)$ или $T = (0, \dots, 0, \alpha)$, где $\alpha \neq 0$.*

Допустим теперь, что элементами матриц могут быть не только элементы поля F , но и полиномы от многих переменных с коэффициентами из F . Как и в [3], назовем рангом полиномиальной матрицы наибольший из порядков ее миноров, равных ненулевому элементу поля F .

Пусть, как и прежде, $T = (t_1, \dots, t_n)$. Рассмотрим полиномиальную матрицу

$$T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\}) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n & x_{n+1}^{(1)} & x_{n+2}^{(1)} & \dots \\ x_0^{(2)} & t_1 & \dots & t_{n-1} & t_n & x_{n+1}^{(2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{-n+3}^{(n-1)} & x_{-n+4}^{(n-1)} & \dots & t_1 & t_2 & t_3 & \dots \\ x_{-n+2}^{(n)} & x_{-n+3}^{(n)} & \dots & x_0^{(n)} & t_1 & t_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где верхний индекс при переменной обозначает номер строки, в которой она расположена. Если в этой матрице положить $x_k^{(i)} = x_k^{(j)}$ для всех i, j, k , то получим полиномиальную теплицеву матрицу $T_{\mathbb{N}}(\{x_j\})$, являющуюся продолжением матрицы T . Обозначим через $\text{rltp}(T)$ и $\text{rtp}(T)$, соответственно, ранги матриц $T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\})$ и $T_{\mathbb{N}}(\{x_j\})$. Очевидно, любое теплицево продолжение $T_{\mathbb{N}}$ матрицы T можно получить из $T_{\mathbb{N}}(\{x_j\})$, придав соответствующие значения переменным $\{x_j\}$. Продолжения матрицы T , полученные аналогичным образом из матрицы $T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\})$ (и не являющиеся, вообще говоря, теплицевыми), будем называть ограниченно-теплицевыми. Наименьший из рангов всевозможных ограниченно-теплицевых продолжений матрицы T обозначим через $\text{rlt}(T)$.

Некоторые соотношения между введенными выше четырьмя характеристиками теплицевой матрицы T усматриваются без труда. Действительно, легко видеть, что $\text{rlt}(T) \leq \text{rt}(T)$ и $\text{rltp}(T) \leq \text{rtp}(T)$. Если некоторый минор в матрице $T_{\mathbb{N}}(\{x_j\})$ равен отличному от нуля элементу поля, то в любом теплицевом продолжении $T_{\mathbb{N}}$ этот минор тоже отличен от нуля, откуда $\text{rtp}(T) \leq \text{rt}(T)$. Аналогично, $\text{rltp}(T) \leq \text{rlt}(T)$. Таким образом, выполнены неравенства $\text{rltp}(T) \leq \text{rtp}(T) \leq \text{rt}(T)$ и $\text{rltp}(T) \leq \text{rlt}(T) \leq \text{rt}(T)$. Однако, оказывается справедливым более сильное утверждение, а именно верна

Теорема 2.

$$\text{rt}(T) = \text{rlt}(T) = \text{rtp}(T) = \text{rltp}(T).$$

Доказательство. Достаточно установить справедливость неравенства $\text{rt}(T) \leq \text{rltp}(T)$. Пусть $\text{rt}(T) = r$. Докажем несколько вспомогательных лемм. Обозначим через J_p перестановочную матрицу порядка p , элементы побочной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы равны 0. Непосредственно проверяется

Лемма 3. Пусть $1 \leq k \leq n$. Тогда $T_{n-k+1} = J_{n-k+1} T_k^t J_k$.

Лемма 4. Пусть $T = (t_1, \dots, t_n)$, $\text{rt}(T) = r$ и $r \leq k \leq n$. Тогда ранг матрицы T_k совпадает с рангом ее подматрицы, образованной r первыми или r последними строками.

Доказательство. Утверждение тривиально, если $k = r$, поскольку все три указанные в условии матрицы в этом случае совпа-

$\text{rank}(T_r) = \text{rank}(T_r'')$ означает, что последняя строка матрицы T_r не является линейной комбинацией первых $r-1$ строк, поэтому ранг подматрицы, образованной первыми $r-1$ строками матрицы T_r , строго меньше $r-1$. Но первые r столбцов этой подматрицы совпадают с первыми r столбцами матрицы T_{r-1} , откуда с учетом леммы 5 выводим $\text{rank}(T_{r-1}) < r-1$. Поскольку для матрицы T_{r-1} выполняется равенство $\text{rank}(T_{r-1}) = \text{rank}(T_{r-1}'')$, то, повторяя приведенные выше рассуждения применительно к матрице T_{r-1} , получим $\text{rank}(T_{r-2}) < r-2$ и так далее, и, наконец, получим $\text{rank}(T_1) < 1$. Но последнее неравенство противоречит условию $\text{rank}(T_1) = \text{rank}(T_1'')$.

2. $n-r+1 < r$. В этом случае в силу леммы 3 получаем $\text{rank}(T_{n-r+1}) = \text{rank}(T_r) < n-r+1$ и $\text{rank}(T_{n-r+1}) = \text{rank}(T_{n-r+1}'')$. Повторяя рассуждения п. 1 применительно к матрицам $T_{n-r+1}, T_{n-r}, \dots, T_1$, вновь приходим к противоречащим друг другу условиям $\text{rank}(T_1) < 1$ и $\text{rank}(T_1) = \text{rank}(T_1'')$. \square

Завершим доказательство теоремы. Как и в доказательстве леммы 6, рассмотрим два случая.

1. $r \leq n-r+1$. Тогда, согласно лемме 6, $\text{rank}(T_r) = r$, следовательно, в матрице T_r есть минор порядка r , равный отличному от нуля элементу поля, так что $\text{rltp}(T) \geq r = \text{rt}(T)$. (Используя лемму 5, такой минор можно указать явно – им, например, будет минор $\begin{vmatrix} t_r & \dots & t_{2r-1} \\ & \dots & \\ t_1 & \dots & t_r \end{vmatrix}$.)

2. $n-r+1 < r$. Как и в доказательстве леммы 6, можно считать, что $\text{rank}(T_r) = \text{rank}(T_r'')$. Рассмотрим следующий минор порядка r матрицы $T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\})$

$$M = \begin{vmatrix} t_{n-r+1} & t_{n-r+2} & \dots & t_r & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{2r-n} & \dots & t_r \\ x_0^{(n-r+2)} & t_1 & \dots & t_{2r-n-1} & \dots & t_{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{2r-n-2}^{(r)} & x_{2r-n-3}^{(r)} & \dots & t_1 & \dots & t_{n-r+1} \end{vmatrix}.$$

Разлагая последовательно каждый из первых $2r-n-1$ столбцов в

сумму вида $(a_1 \dots a_{r-1} a_r)^t = (a_1 \dots a_{r-1} 0)^t + (0 \dots 0 a_r)^t$, получим

$$M = \sum_{s=0}^{2r-n-2} \begin{vmatrix} t_{n-r+1} & \dots & 0 & \dots & t_r & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(n-r+2)} & \dots & 0 & \dots & t_{2r-n-1} & \dots & t_{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & x_s^{(r)} & \dots & t_1 & \dots & t_{n-r+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{n-r+1} & \dots & t_r & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(n-r+2)} & \dots & t_{2r-n-1} & \dots & t_{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & t_1 & \dots & t_{n-r+1} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что последние $n - r + 1$ столбцов минора M образуют матрицу T_r . Поскольку $\text{rank}(T_r) = \text{rank}(T_r'')$, то столбец $(0 \dots 0 1)^t$ является линейной комбинацией столбцов матрицы T_r . Следовательно, все определители, находящиеся под знаком суммы, равны 0, поэтому M не зависит от переменных, входящих в его r -ю строку. Положим их равными 0. Теперь разложим последовательно каждый из первых $2r - n - 2$ столбцов получившегося определителя в сумму вида $(a_1 \dots a_{r-2} a_{r-1} 0)^t = (a_1 \dots a_{r-2} 0 0)^t + (0 \dots 0 a_{r-1} 0)^t$ и представим определитель в виде суммы определителей, последний из которых не содержит переменных, входящих в $(r - 1)$ -ю строку минора M . Заметим, что если из M вычеркнуть последнюю строку, то последние $n - r + 2$ столбцов получившейся матрицы образуют матрицу T_{r-1} . Так как $\text{rank}(T_{r-1}) = \text{rank}(T_{r-1}'')$ и $\text{rank}(T_r) = \text{rank}(T_r'')$, то столбец $(0 \dots 0 1 0)^t$ является линейной комбинацией последних $n - r + 2$ столбцов минора M , поэтому первые $2r - n - 2$ определителей в последней сумме равны 0, так что M не зависит от переменных, входящих в его $(r - 1)$ -ю строку. Полагаем их равными 0. Аналогично доказывается, что M не зависит от переменных, входящих в его $(r - 2)$ -ю, \dots , $(n - r + 2)$ -ю строки. Следовательно, M равен некоторому элементу поля.

В процессе доказательства было установлено, что линейными комбинациями столбцов минора M являются последние $2r - n - 1$ столбцов единичной матрицы порядка r . Кроме того, первые $n - r + 1$ строк минора M образуют матрицу T_{n-r+1} , причем они линейно независимы, так как в силу лемм 3 и 6 $\text{rank}(T_{n-r+1}) = \text{rank}(T_r) = n - r + 1$. Следовательно, линейными комбинациями

столбцов минора M являются также первые $n - r + 1$ столбцов единичной матрицы порядка r . Но это означает, что $M \neq 0$. Таким образом, в матрице $T_{\mathbb{N}}(\{x_j^{(i)}\})$ есть минор порядка r , равный отличному от нуля элементу поля, откуда $\text{rltp}(T) \geq r = \text{rt}(T)$. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Иохвидов, *Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы*. — М., Наука (1974).
2. И. С. Иохвидов, О. Д. Толстых, *Об (r, k, l) -характеристиках прямоугольных теплицевых матриц*. — Укр. мат. журнал, **32** (1980), 477–482.
3. Ю. А. Альпин, Н. З. Габбасов, *Продолжение обобщенных ганкелевых матриц*. — Изв. вузов, Математика, N 5 (1981), 35–39.

Al'pin Yu. A., Il'in S. N. Infinite extensions of Toeplitz matrices.

A formula for the minimal rank of infinite Toeplitz extensions of a finite rectangular Toeplitz matrix is derived.

Казанский государственный
университет

Поступило 15 марта 2003 г.