Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Кузьминых, О восстановимости выпуклого тела по множеству его проекций,
Сиб. матем. журн., 1984, том 25, номер 2, 145–150

https://www.mathnet.ru/smj6835

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.88
20 июня 2025 г., 09:59:12

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXV, № 2 МАРТ — АПРЕЛЬ 1984

УДК 513.82

А. В. КУЗЬМИНЫХ

О ВОССТАНОВИМОСТИ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ПО МНОЖЕСТВУ ЕГО ПРОЕКЦИЙ

Пусть $M \subset E^n$ (где E^n — n-мерное евклидово пространство, $n \geqslant 2$) — выпуклое тело, т. е. выпуклый компакт с непустой внутренностью. Зафиксируем гиперплоскость $P_0 \subset E^n$ и, обозначая через p ортогональную проекцию $p: E^n \to P_0$, а через $O(n)$ — группу вращений E^n вокруг некоторой точки, рассмотрим множество

$$\Pi'(M) \overset{\text{def}}{=} \{F : F \subset P_0,\ \exists \mu \subset O(n),\ F \text{ изометрично } p(\mu(M))\}.$$

Стандартным образом введем на $\Pi'(M)$ отношение эквивалентности, считая A, $B \in \Pi'(M)$ эквивалентными, если A изометрично B. Через $\Pi(M)$ обозначим фактор множества $\Pi'(M)$ по этому отношению эквивалентности.

Таким образом, $\Pi(M)$ — это множество классов эквивалентности проекций тела M (разумеется, без указания того, при каком именно вращении μ получается данная проекция).

Определение. Выпуклое тело $M \subset E^n$ будем называть *восстановимым*, если из того, что для выпуклого тела $M' \subset E^n$ $\Pi(M') = \Pi(M)$, следует, что M' изометрично M.

Естественным образом возникает вопрос: насколько «велико» множество восстановимых выпуклых тел?

В связи с этим имеет место

Теорема. *Множество n-мерных ($n \geqslant 3$) восстановимых выпуклых тел всюду плотно в метрическом пространстве n-мерных выпуклых тел с метрикой Хаусдорфа.*

Напомним, что метрика Хаусдорфа определяется на множестве n-мерных выпуклых тел следующим образом:

$$d(A, B) = \inf\{a : (A, a) \supset B,\ (B, a) \supset A\},$$

где A, $B \subset E^n$ — выпуклые тела, (M, a) — a-окрестность множества M.

Замечание 1. При $n = 2$ не существует ни одного восстановимого выпуклого тела (т. е. выпуклой фигуры).

Замечание 2. Для каждого $n \geqslant 3$ существует n-мерное выпуклое тело, не являющееся восстановимым.

Замечание 3. Выпуклое тело может быть «довольно сильно не восстановимым». Точнее, существует континуум выпуклых тел $M_\alpha \subset E^3$, $\alpha \in (0, 1)$, таких, что для каждых различных $\alpha, \beta \in (0, 1)$ $\Pi(M_\alpha) = \Pi(M_\beta)$, но объемы тел M_α и M_β не равны (и, следовательно, M_α и M_β неизометричны).

Доказательство теоремы. Зафиксируем $n \geqslant 3$ и под выпуклым телом будем далее понимать выпуклое тело из E^n.

Диаметральным отрезком выпуклого тела N будем называть отрезок $[X, Y] \subset N$, длина которого равна диаметру N.

Пусть M_1 — некоторое выпуклое тело, $[A', B]$ — его диаметральный отрезок. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\varepsilon < {}^1/_2\rho(A', B)$, где ρ — метрика в E^n.

Обозначим через $[A, B]$ такой отрезок, что $A' \in [A, B]$, $\rho(A, A') = \varepsilon$. Положим $M_2 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{con}(M_1 \cup \{A\})$, где $\operatorname{con} X$ — выпуклая оболочка мно-

жества X. Покажем, что $[A, B]$ — единственный диаметральный отрезок M_2.

Предположим противное, пусть $[C, C']$ — другой диаметральный отрезок M_2. Поскольку $C, C' \in \operatorname{con}(M_1 \cup \{A\})$, по теореме Каратеодори [1] существуют такие точки $T_1, \ldots, T_{n+1}, T'_1, \ldots, T'_{n+1} \in M_1 \cup \{A\}$, что $C \in \operatorname{con}(\{T_1, \ldots, T_{n+1}\})$, $C' \in \operatorname{con}(\{T'_1, \ldots, T'_{n+1}\})$, и, поскольку $\rho(C, C')$ — диаметр M_2,

$$C \in \{T_1, \ldots, T_{n+1}\},\ C' \in \{T'_1, \ldots, T'_{n+1}\}.$$

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $C = A$. По предположению $C' \neq B$. Если $C' \in [A, B]$, то $\rho(A, C') < \rho(A, B)$; противоречие.

Если же $C' \notin [A, B]$, то $\rho(A, C') < \rho(A, A') + \rho(A', C') \leqslant \rho(A, A') + \rho(A', B) = \rho(A, B)$; противоречие.

Итак, $[A, B]$ — единственный диаметральный отрезок M_2.

Очевидно, существует такой замкнутый конус вращения K ($\operatorname{int} K \neq \varnothing$) с вершиной A, ось которого проходит через B, что $M_2 \subset K$. Существует такая гиперплоскость P, что $P \perp [A, B]$, P строго разделяет A и B, причем для полупространства P', ограниченного P и содержащего A, имеем

$$\inf\{\angle BXA : X \in K \cap P'\} > \pi/2.$$

Пусть $\delta > 0$ такое число, что

$$\inf\{\angle B'XA : X \in K \cap P',\ \rho(B', B) < \delta\} > \pi/2.$$

Пусть $\delta' > 0$ таково, что для каждого отрезка $[X, Y]$, для которого $\rho(X, B) < \delta'$, $Y \in M_2 \backslash P'$, имеем $\rho(X, Y) < \rho(A, B)$.

Пусть $\delta'' > 0$ таково, что для каждой точки X, для которой $\rho(X, B) < \delta''$, и для каждой гиперплоскости G, проходящей через X и A, ортогональная проекция K на G — $(n-1)$-мерный конус вращения, причем супремум углов растворов всех таких проекций (супремум берется по всем таким X и всем таким G) меньше π (этот супремум обозначим через ω_0).

Пусть $\delta_0 = \min\{\varepsilon, \delta, \delta', \delta''\}$. Обозначим через S $(n-1)$-мерную сферу радиуса $\rho(A, B)$ с центром A, а через D — открытый шар радиуса δ_0 с центром B. Положим $S' \overset{\text{def}}{=} S \cap D$.

Пусть D_0 — такой замкнутый шар, касательный к S в точке B, что $D_0 \backslash \{B\} \subset \operatorname{int} \operatorname{con}(S' \cup \{A\})$ (его радиус обозначим через r_0).

Обозначим через Q такое счетное множество, содержащееся в $S' \backslash \{B\}$, что

1) для каждого открытого шара F с центром B $Q \backslash F$ конечно;

2) $\operatorname{con}(Q \cup \{A, B\}) \supset D_0$;

3) для каждой гиперплоскости $R \supset [A, B]$ и для каждого $\varepsilon' > 0$ существуют такие точки $A_1, \ldots, A_{n-1} \in Q$, что точки $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ находятся в общем положении, а угол между нормалями к R и к аффинной оболочке множества $\{A, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ меньше ε'.

Доказательство существования Q проводится стандартно и не представляет затруднений. Достаточно заметить, что для каждого натурального k существует такое конечное множество $Q_k \subset S' \backslash \{B\}$, что справедливо включение (через D_k обозначен замкнутый шар радиуса δ_0/k):

$$\operatorname{con}(Q_k \cup \{A\}) \supset D_0 \cap (D_k \backslash D_{k+1}),$$

причем для каждой точки $X \in Q_k$ $\rho(X, B) < 2\delta_0/k$.

Ограниченным конусом будем называть выпуклое тело, являющееся пересечением конуса вращения с замкнутым полупространством, содержащим его вершину, граничная гиперплоскость которого перпендикулярна оси конуса.

Нам понадобится следующая

Лемма. *Для каждой точки $X \in Q$ существует такой ограниченный конус K_X с вершиной X, ось которого проходит через A, что*

1) $(\bigcup_{X \in Q} K_X) \setminus Q \subset D \cap \operatorname{int} \operatorname{con} S$;

2) *для каждой точки* $X_0 \in Q$ $M_2 \cup \left(\bigcup_{X \in Q} K_X\right) \subset K'_{X_0}$, *где* K'_{X_0} — *тот (неограниченный) конус, из которого получен* K_{X_0};

3) *множество углов растворов конусов* K_X $(X \in Q)$ *дискретно и все эти углы больше* $\omega_0 + (\pi - \omega_0)/2$.

Доказательство. Занумеруем точки множества Q: $Q = \{U_k\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно существование такого K_{U_1}, ось которого проходит через A, что $K_{U_1} \setminus \{U_1\} \subset D \cap \operatorname{int} \operatorname{con} S$, $M_2 \cup (Q \setminus \{U_1\}) \subset \operatorname{int} K'_{U_1}$, а его угол раствора больше $\omega_0 + (\pi - \omega_0)/2$ (достаточно заметить, что вследствие единственности диаметрального отрезка $[A, B]$ в выпуклом теле M_2 и дискретности Q, для каждой точки $X \in Q$

$$\rho(X, M_2 \cup (Q \setminus \{X\})) > 0).$$

Предположим, что для некоторого $k \geqslant 1$ для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ построен такой конус K_{U_i}, ось которого проходит через A, что

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} K_{U_i}\right) \setminus \{U_1, \ldots, U_k\} \subset D \cap \operatorname{int} \operatorname{con} S,$$

при $i \neq j$ $(i, j \in \{1, \ldots, k\})$ $K_{U_i} \subset \operatorname{int} K'_{U_j}$, для каждого i

$$M_2 \cup (Q \setminus \{U_i\}) \subset \operatorname{int} K'_{U_i},$$

причем из $i < j$ следует, что угол раствора K_{U_i} меньше угла раствора K_{U_j}.

Из условий, которым удовлетворяют K_{U_i}, получаем, что

$$\rho\left(U_{k+1}, M_2 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} K_{U_i}\right)\right) > 0,$$

откуда и следует существование такого $K_{U_{k+1}}$, что ось его проходит через A,

$$K_{U_{k+1}} \setminus \{U_{k+1}\} \subset D \cap \operatorname{int} \operatorname{con} S,$$

$$K_{U_i} \subset \operatorname{int} K'_{U_{k+1}}, \quad K_{U_{k+1}} \subset \operatorname{int} K'_{U_i},$$

$$M_2 \cup (Q \setminus \{U_{k+1}\}) \subset \operatorname{int} K'_{U_{k+1}},$$

угол раствора $K_{U_{k+1}}$ больше углов растворов конусов K_{U_i} $(i \in \{1, \ldots, k\})$. Лемма доказана.

Обозначим через M тело $\operatorname{con}\left(M_2 \cup \left(\bigcup_{X \in Q} K_X\right)\right)$. Покажем, что если $[H_1, H_2]$ — диаметральный отрезок M, то одна из точек H_1, H_2 совпадает с A, а другая принадлежит $Q \cup \{B\}$.

Пусть $[H_1, H_2]$ — диаметральный отрезок M. Поскольку для каждого i $(i = 1, 2)$ H_i содержится в выпуклой оболочке $n+1$ точек из $M_2 \cup \left(\bigcup_{X \in Q} K_X\right)$ и вследствие диаметральности $[H_1, H_2]$ получаем, что $\{H_1, H_2\} \subset M_2 \cup \left(\bigcup_{X \in Q} K_X\right)$. Поскольку, очевидно, $\{H_1, H_2\} \not\subset \bigcup_{X \in Q} K_X$, без ограничения общности можно считать, что $H_1 \in M_2$.

Предположим, что $\{H_1, H_2\} \cap (K \cap P') = \varnothing$. Тогда (вследствие условия, которому удовлетворяет δ') $\rho(H_1, H_2) < \rho(A, B)$; противоречие.

Пусть $H_1 \in K \cap P'$. Тогда $H_2 \in D$ (вследствие единственности диаметрального отрезка $[A, B]$ в выпуклом теле M_2) и $H_1 = A$ (вследствие условия, которому удовлетворяет δ). Тогда $H_2 \in Q \cup \{B\}$, что и требовалось.

Покажем теперь, что выпуклое тело M восстановимо. Пусть выпуклое тело M' таково, что $\Pi(M')=\Pi(M)$. Очевидно, диаметры M и M' равны. Далее, любые два диаметральных отрезка a и b тела M' имеют общий конец. В самом деле, пусть $\mu\in O(n)$ таково, что $\mu(a)/\!/P_0$, $\mu(b)/\!/P_0$. Существует такой поворот $\mu'\in O(n)$, что $p(\mu'(M))$ изометрично $p(\mu(M'))$, а поскольку любые два диаметральных отрезка $p(\mu'(M))$ имеют общий конец (это следует из построения M и из того, что диаметры M и $p(\mu'(M))$ равны), то $p(\mu(a))$ и $p(\mu(b))$ имеют общий конец, откуда непосредственно получаем, что a и b имеют общий конец.

Отсюда следует, что существует точка $W\in M'$, являющаяся концом всех диаметральных отрезков тела M'.

Пусть $[X, Y]$ — некоторый диаметральный отрезок M'. Пусть $\mu_0\in O(n)$ таково, что $\mu_0([X, Y])/\!/P_0$, пусть O'_X — подгруппа группы $O(n)$, состоящая из вращений E^n вокруг прямой $l\supset\mu_0([X, Y])$. Обозначим через Ω множество углов растворов конусов K_Z $(Z\in Q)$. Определим отображение $\varphi_X: O'_X\to\Omega\cup\{\omega_0, \pi\}$ следующим образом.

Из построения M следует, что если $\mu\in O(n)$ таково, что $[V_1, V_2]$ — диаметральный отрезок $p(\mu(M))$, длина которого равна диаметру M, то справедливо одно и только одно из следующих трех утверждений:

1) $p(\mu(M))$ содержит замкнутый $(n-1)$-мерный шар радиуса r_0 с центром на $[V_1, V_2]$, границе которого принадлежит точка V_1;

2) $p(\mu(M))$ содержит такой ограниченный круговой $(n-1)$-мерный конус $\tilde{K}$ с вершиной V_1, ось которого проходит через V_2, угол раствора которого принадлежит Ω (обозначим этот угол через ω), а круговой $(n-1)$-мерный конус $\tilde{K}'$, из которого получен $\tilde{K}$, содержит $p(\mu(M))$;

3) M содержится в круговом $(n-1)$-мерном конусе с вершиной V_1, угол раствора которого не превосходит ω_0.

Пусть $\mu\in O'_X$; пусть $\nu\in O(n)$ таково, что $p\mu\mu_0(M')$ изометрично $p\nu(M)$; пусть $\tau: p\mu\mu_0(M')\to p\nu(M)$ — соответствующая изометрия.

Обозначим $\tau p\mu\mu_0(X)$ через V_1, $\tau p\mu\mu_0(Y)$ — через V_2. Если для V_1 имеет место 1-я из перечисленных выше возможностей, полагаем $\varphi_X(\mu)=\pi$, если 2-я — полагаем $\varphi_X(\mu)=\omega$, если 3-я — полагаем $\varphi_X(\mu)=\omega_0$.

Легко видеть из построения M, что если $\varphi_X(O'_X)\cap\Omega\neq\varnothing$, то $\varphi_X(O'_X)$ одноточечно (достаточно воспользоваться непрерывностью отображения $\psi_X: O'_X\to\chi$ (где χ — метрическое пространство $(n-1)$-мерных выпуклых тел с метрикой Хаусдорфа), для которого $\psi_X(\mu)=p\mu(M')$, где $\mu\in O'_X$, а на O'_X введена стандартная метрика).

Определим отображение $\xi:\Omega\to M'$ следующим образом. Положим $\xi(\omega)=X$ (где $\omega\in\Omega$), если существует такая точка $Y_X\in M'$, что $[X, Y_X]$ — диаметральный отрезок тела M' и $\varphi_X(O'_X)=\omega$.

Из того, что $\Pi(M')=\Pi(M)$, и из построения M следует, что для каждого $\omega\in\Omega$ существует и притом единственная точка $X=\xi(\omega)$ и для каждой точки $X\in\xi(\Omega)$ $Y_X=W$.

Определим отображение $\eta:\Omega\to Q$ очевидным образом: $\eta(\omega)=X$ (где $\omega\in\Omega$), если угол раствора конуса K_X равен ω. Пусть $\omega_1, \omega_2\in\Omega$, $\omega_1\neq\omega_2$. Тогда $\rho(\xi(\omega_1), \xi(\omega_2))=\rho(\eta(\omega_1), \eta(\omega_2))$ (это непосредственно следует из рассмотрения проекции M' на гиперплоскость, параллельную диаметральным отрезкам с концами $\xi(\omega_i)$ $(i=1, 2)$ и изометричной ей проекции тела M). Следовательно, $\xi\circ\eta^{-1}: Q\to\xi(\Omega)$ — изометрия. Поскольку Q не лежит в гиперплоскости, существует единственная изометрия $\beta: E^n\to E^n$, сужение которой на Q совпадает с $\xi\circ\eta^{-1}$.

Рассмотрим выпуклые тела $\beta(M)$ и M'. Очевидно, $\beta(A)=W$. Кроме того, для любых точек $A_1, \ldots, A_{n-1}\in Q$, таких, что точки $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ находятся в общем положении, проекции $\beta(M)$ и M' на аффинную оболочку множества $\{A, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ совпадают.

Из свойства 3 множества Q теперь непосредственно следует, что $\beta(M)=M'$.

Теперь достаточно заметить, что для каждой точки $Y \in M$ $\rho(Y, M_1) \leqslant \leqslant \varepsilon$; следовательно, $d(M, M_1) \leqslant \varepsilon$. Теорема доказана.

Доказательство утверждения замечания 1 непосредственно следует из того, что для каждых a, b $(a \geqslant b > 0)$ существуют неизометричные выпуклые фигуры M, M', каждая из которых имеет диаметр a и ширину b (при $a = b$ это неизометричные выпуклые фигуры постоянной ширины a, при $a > b$, например, M — выпуклая оболочка эллипса о осями a, b, $M' \overset{\text{def}}{=} \operatorname{con}(K \cup \{A\})$, где $K \subset E^2$ — замкнутый круг диаметра b, $A \in E^2$ — такая точка, что $\rho(A, K) = a - b$).

Докажем утверждение замечания 2. Зафиксируем $n \geqslant 3$ и некоторую точку $O \in E^n$. Через $D^n(X, r)$ будем обозначать замкнутый n-мерный шар радиуса r с центром в точке X. Пусть S — граница шара $D^n(O, 1)$, а точки $A_1, \ldots, A_n \in S$ являются вершинами правильного $(n-1)$-мерного симплекса с ребром 1.

Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что справедливы следующие утверждения (через B_i обозначим $S \cap D^n(A_i, \varepsilon)$):

1) для каждой гиперплоскости P (на протяжении этого доказательства рассматриваются только гиперплоскости, проходящие через Q) существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $P \cap B_i = \varnothing$;

2) если гиперплоскость P такова, что для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots \ldots, n-1\}$ для каждого $i \in \{1, \ldots, k, n\}$ при $k > 0$ и для $i = n$ в случае $k = 0$ $P \cap B_i \neq \varnothing$, а для каждого j $(k < j < n)$ $P \cap B_j = \varnothing$, то существует такое вращение μ пространства E^n вокруг аффинной оболочки множества $\{O, A_1, \ldots, A_k\}$, что $\mu(P) \cap B_n = \varnothing$ и для каждого j $(k < j < n)$ $\mu(P) \cap \cap B_j = \varnothing$.

Положим

$$N_1' \overset{\text{def}}{=} D^n(O, 1) \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{con} B_i,$$

$$N_2' \overset{\text{def}}{=} D^n(O, 1) \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} \operatorname{con} B_i.$$

Через N_m $(m = 1, 2)$ будем обозначать замыкание N_m'.

Покажем, что $\Pi(N_1) = \Pi(N_2)$.

Пусть P — гиперплоскость. Если $P \cap B_n = \varnothing$, то, очевидно, проекции N_1 и N_2 на P совпадают.

Предположим, что $P \cap B_n \neq \varnothing$. На основании свойства 1, которому удовлетворяет ε, существует такое $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, что $P \cap B_i = \varnothing$. Пусть τ — такое вращение E^n вокруг O, что $\tau(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $\tau(A_i) = A_n$. Тогда проекция N_1 на P изометрична проекции N_2 на $\tau(P)$ (поскольку $N_1 \cap P$ изометрично $N_2 \cap \tau(P)$). На основании свойства 2 аналогично получаем, что проекция N_2 на P изометрична проекции N_1 на $\mu(P)$ (где μ — вращение, фигурирующее в формулировке свойства 2).

Таким образом, $\Pi(N_1) = \Pi(N_2)$, но N_1 не изометрично N_2, поскольку объемы их не равны.

Докажем утверждение замечания 3. Пусть S — сфера радиуса 1, $\gamma \subset S$ — окружность, радиус которой меньше 1; через γ_0 обозначим дугу окружности γ длины $2\pi r/3$, где r — радиус γ; через O, O' обозначим центры S и γ соответственно; через φ обозначим поворот пространства вокруг прямой, проходящей через O, O', на угол $2\pi/3$.

Легко показать существование таких последовательностей $\{A_i\}_{i=1}$, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, что для каждого i $A_i \in \gamma_0$, $\varepsilon_i > 0$, причем справедливы следующие утверждения:

1) каждая плоскость P (на протяжении этого доказательства рассматриваются только плоскости, проходящие через O) пересекает не более двух шаров из множества

$$D \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=0}^{2} \{\varphi^k(D^3(A_i, \varepsilon_i)) : i = 1, 2, \ldots\};$$

2) для каждого шара $F \in D$ существует плоскость, строго разделяющая F и $\bigcup_{G \in D \setminus \{F\}} G$;

3) для каждого i (обозначая через VU объем выпуклого тела U)

$$V \operatorname{con}(S \cap D^3(A_i, \varepsilon_i)) > 2V \operatorname{con}(S \cap D^3(A_{i+1}, \varepsilon_{i+1})).$$

Пусть $\alpha \in (0, 1)$, тогда α представляется двоичной дробью вида $0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, где $\alpha_i = 0$ или $\alpha_i = 1$, причем количество единиц в этом представлении бесконечно.

Определим M'_α следующим образом. Пусть Ω — множество всех натуральных j, для каждого из которых $\alpha_j = 1$. Положим

$$H_1 \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{con}(S \cap D^3(\varphi(A_i), \varepsilon_i)),$$

$$H_2 \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{con}(S \cap D^3(\varphi^2(A_i), \varepsilon_i)),$$

$$H_3 \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in \Omega} \operatorname{con}(S \cap D^3(A_j, \varepsilon_j)),$$

$$M'_\alpha \overset{\text{def}}{=} \operatorname{con} S \setminus (H_0 \cup H_1 \cup H_2).$$

Обозначим теперь через M_α замыкание M'_α.

Пусть $\alpha \neq \beta$ ($\alpha, \beta \in (0, 1)$). Прежде всего заметим, что $VM_\alpha \neq VM_\beta$ (это следует из свойства 3). Для того чтобы убедиться в справедливости равенства $\Pi(M_\alpha) = \Pi(M_\beta)$, достаточно заметить, что для каждой плоскости P существует такая плоскость P', что $M_\alpha \cap P$ изометрично $M_\beta \cap P'$ (это следует из свойств 1 и 2).

В заключение автор выражает благодарность А. Д. Александрову за ряд ценных замечаний.

Статья поступила 30 ноября 1981 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли. М.: Мир, 1968.