В. Н. Семенчук, Описание конечных разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной тотально локальной формации $\mathfrak{F}$,
Матем. заметки, 1988, том 43, выпуск 4, 452–459

https://www.mathnet.ru/mzm4354

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 43, № 4 (1988)

ОПИСАНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ МИНИМАЛЬНЫХ НЕ $\mathfrak{F}$-ГРУПП ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОТАЛЬНО ЛОКАЛЬНОЙ ФОРМАЦИИ $\mathfrak{F}$

В. Н. Семенчук

Пусть $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ — множество всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп, т. е. групп, не принадлежащих некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$. Будем описывать разрешимые группы из $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ для произвольной тотально локальной формации $\mathfrak{F}$. Оказалось, что все такие группы 2-порождены. Ранее изучались частные случаи этой задачи. В [1, 2, 3] исследовались минимальные ненильпотентные, минимальные не p-разложимые минимальные не p-нильпотентные группы соответственно. Некоторые результаты о разрешимых минимальных не $\mathfrak{N}^n$-группах ($\mathfrak{N}^n$ — формация всех разрешимых групп с нильпотентной длиной $\leqslant n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) получены в [4, 5]. Здесь рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в [6].

Напомним определение n-кратной локальной формации.

Всякая формация считается 0-*кратной локальной* формацией. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *n-кратно локальной* ($n \geqslant 1$), если она имеет такой локальный экран, все непустые значения которого являются (n — 1)-кратной локальной формацией.

Формацию назовем *тотально локальной*, если она n-кратно локальна для любого натурального числа n.

Доказательство следующей леммы осуществляется проверкой.

ЛЕММА 1. *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран тотально локальной формации $\mathfrak{F}$. Тогда для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$ формация $f(p)$ тотально локальна.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, f — ее максимальный внутренний локальный экран. Обозначим через $\sigma(\mathfrak{F})$ множество всех тех простых чисел p из $\pi(\mathfrak{F})$, для которых $f(p) \neq \mathfrak{F}$.

Нетрудно заметить, что $\sigma(\mathfrak{F}) = \varnothing$ тогда, и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$. ($\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$ — формация всех $\pi(\mathfrak{F})$-групп.)

Введем понятие ранга тотально локальной формации.

Определение 1. Всякую формацию $\mathfrak{F}$ с $\sigma(\mathfrak{F}) = \varnothing$ назовем *формацией нулевого ранга*. Натуральное число n называется *рангом* тотальной локальной формации $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F}$ имеет максимальный внутренний локальный экран f такой, что для любого p из $\sigma(\mathfrak{F})$ ранг $f(p)$ не более $n-1$, и найдется простое число q из $\sigma(\mathfrak{F})$ такое, что ранг $f(q)$ равен $n-1$.

Если такого натурального числа n не существует, то будем считать, что ранг тотально локальной формации $\mathfrak{F}$ равен бесконечности.

Обозначим через $r(\mathfrak{F})$ ранг тотально локальной формации $\mathfrak{F}$.

Пример 1. Формации всех нильпотентных, всех p-нильпотентных, p-замкнутых групп имеют ранг, равный 1. Ранг формации всех p-разрешимых групп с p-длиной $\leqslant 1$ равен 2. Ранг формации $\mathfrak{N}^n$ равен n.

Определение 2. Тотально локальная формация $\mathfrak{F}$ называется *изотропной*, если она имеет максимальный внутренний локальный экран f такой, что $r(f(p)) = r(f(q))$ для любых p и q из $\sigma(\mathfrak{F})$.

Формации, указанные в примере 1, являются изотропными.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, имеющая локальный экран такой, что $f(p) = \mathfrak{N}^p$ для любого простого числа p. Данная тотально локальная формация $\mathfrak{F}$ — формация бесконечного ранга и не является изотропной.

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация. Если $G/N \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ и $N \subseteq \Phi(G) \cap \mathbf{Z}_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$, то $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $G/N \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, где $N \subseteq \Phi(G) \cap \mathbf{Z}_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Очевидно, что $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть M —

произвольная максимальная подгруппа из G. Пусть L/K — G-главный фактор из N. Положим $C = C_G(L/K)$. Рассмотрим два случая.

Пусть $C \not\subseteq M$. Тогда $MC = G$ и $G/C \simeq M/M \cap C$. Отсюда делаем вывод, что L/K — $\mathfrak{F}$-централен в M.

Пусть $C \subseteq M$. Тогда $C = C_M(L/K)$. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Согласно теореме 4.7 из [6] $f(p)$ — наследственная формация для любого простого p. Из того, что $G/G_M(L/K) \in f(L/K)$, следует $M/C_M(L/K) \in f(L/K)$. Следовательно, фактор L/K $\mathfrak{F}$-централен в M. Таким образом, N является $\mathfrak{F}$-гиперцентральным в M. Отсюда и из $M/N \in \mathfrak{F}$ получаем, что $M \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$.

Для произвольной группы G построим подгруппы $F_i(G)$ и $\Phi_i(G)$ следующим образом:

$$F_0(G) = \Phi_0(G) = 1,$$

$$F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G)),$$

$$\Phi_i(G)/F_{i-1}(G) = \Phi(G/F_{i-1}(G)).$$

В частности,

$$F_1(G) = F(G),\ \Phi_1(G) = \Phi(G).$$

Подгруппу T группы G назовем *подгруппой шмидтовского типа* в G, если T является неединичной p-подгруппой для некоторого простого p и справедливы следующие утверждения:

1) если T — неабелева группа, то $\Phi(T) = T' = \mathbf{Z}(T)$ — подгруппа экспоненты p;

2) если T — абелева группа, то она элементарна;

3) если $p > 2$, то $\exp(T) = p$ при $p = 2$ $\exp(T) \leqslant 4$;

4) если T нормальна в G, то $T/\Phi(T)$ — G-главный фактор и $\Phi(T) = T \cap \Phi(G) \subseteq \mathbf{Z}(T)$.

ЛЕММА 3. *Пусть G — разрешимая группа из $\mathscr{M}(\mathfrak{N}^n)$. Тогда $G/F_i(G) \in \mathscr{M}(\mathfrak{N}^{n-i})$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство проведем индукцией по i. Пусть $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{N}^n)$. По следствию 1.6.1 из [5] $G/F(G) \in \mathscr{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$. По индукции $G/F_{i-1}(G) \in \mathscr{M}(\mathfrak{N}^{n-i+1})$. Так как

$$G/F_{i-1}(G)/F_i(G)/F_{i-1}(G) \simeq G/F_i(G)$$

и

$$F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G)/F_{i-1}(G)),$$

то, применяя следствие 1.6.1 из [5], получаем, что $G/F_i(G) \in \mathscr{M}(\mathfrak{N}^{n-i})$.

ТЕОРЕМА 1. *Разрешимая группа G является минимальной не $\mathfrak{N}^n$-группой ($n = 0, 1, 2, \ldots$) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $F_i(G)/\Phi_i(G)$ — *главные факторы группы G для любого $i = 1, 2, \ldots, n+1$;*

2) $F_i(G) = G^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}\Phi_i(G)$, *причем* $G^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}F_{i-1}(G)/F_{i-1}(G)$ — *подгруппа шмидтовского типа в $G/F_{i-1}(G)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n+1$;*

3) *группа G имеет точно $n+1$ классов максимальных сопряженных подгрупп. Причем если $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ — представители этих классов, то:*

$$M_1/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1}),$$

$$M_2/\Phi_2(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-2}), \ldots, M_n/\Phi_n(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^0),$$

$$M_{n+1} = F_n(G);$$

4) $G/G_G(H/K) \in \mathfrak{N}^{n-i}$ *для любого G-главного фактора H/K из $\Phi_i(G)/F_{i-1}(G)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Доказательство. Необходимость.

1) Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$. Очевидно, что $l(G) = n+1$. Ввиду леммы 3 $G/F_{i-1}(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i+1})$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n+1$. По лемме 1.3 из [5] получаем, что $F(G/F_{i-1}(G))/\Phi(G/F_{i-1}(G))$ — главный фактор группы $G/F_{i-1}(G)$. Так как $F(G/F_{i-1}(G)) = F_i(G)/F_{i-1}(G)$ и $\Phi(G/F_{i-1}(G)) = \Phi_i(G)/F_{i-1}(G)$, то очевидно, что $F_i(G)/\Phi_i(G)$ — главный фактор группы G для любого $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

2) По лемме 3 $G/F_{i-1}(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i+1})$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Используя лемму 1.9 [5] и теорему 1.1 из [5], получаем, что $F(G/F_{i-1}(G)) = (G/F_{i-1}(G))^{\mathfrak{N}^{n-i+1}} \cdot \Phi(G/F_{i-1}(G))$ и $(G/F_{i-1}(G))^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}$ — подгруппа шмидтовского типа. Учитывая, что $F(G/F_{i-1}(G)) = F_i(G)/F_{i-1}(G)$,

$$(G/F_{i-1}(G))^{\mathfrak{N}^{n-i+1}} = G^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}F_{i-1}(G)/F_{i-1}(G),$$

$\Phi(G/F_{i-1}(G)) = \Phi_i(G)/F_{i-1}(G)$, получаем утверждение из п. 2).

3) Покажем, что существует только один класс максимальных сопряженных подгрупп, дополняющих главный фактор $F_i(G)/\Phi_i(G)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Так как $F_i(G) = G^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}\Phi_i(G)$, то любая максимальная подгруппа, дополняющая главный фактор $F_i(G)/\Phi_i(G)$, является $\mathfrak{N}^{n-i+1}$-абнормальной подгруппой в G. Теперь сопряженность любых двух максимальных $\mathfrak{N}^{n-i+1}$-абнор-

мальных подгрупп из G следует из теоремы 1.1 [5] и $G/F_{i-1}(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i+1})$. Так как любая максимальная подгруппа группы G должна дополнять один из главных факторов $F_i(G)/\Phi_i(G)$, то G имеет точно $n+1$ классов максимальных сопряженных подгрупп. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ — представители этих классов и пусть M_i дополняет главный фактор $F_i(G)/\Phi_i(G)$. Отсюда $G/F_i(G) = M_iF_i(G)/F_i(G) \simeq M_i/M_i \cap F_i(G) = M_i/\Phi_i(G)$. По лемме 3 $G/F_i(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i})$. Следовательно, $M_i/\Phi_i(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i})$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $G/F_n(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^0)$, то $G/F_n(G)$ — группа простого порядка. Отсюда $M_{n+1} = F_n(G)$.

4) По лемме 3 $G/F_{i-1}(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i+1})$. По лемме 1.9 из [5] $\Phi(G/F_{i-1}(G)) = \mathbf{Z}_\infty^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}(G/F_{i-1}(G))$. Пусть H/K — G-главный фактор из $\Phi(G/F_{i-1}(G)) = \Phi_i(G)/F_{i-1}(G)$. Тогда H/K — $\mathfrak{N}^{n-i+1}$-центральный главный фактор группы G. Следовательно, $G/G_G(H/K) \in \mathfrak{N}^{n-i}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет требованиям 1—4. Так как $F_i(G)/\Phi_i(G)$ — главный фактор группы G для любого $i = 1, 2, \ldots, n+1$, то $l(G) = n+1$. Следовательно, $G \notin \mathfrak{N}^n$. Пусть M — максимальная подгруппа, дополняющая G-главный фактор $F(G)/\Phi(G)$. Тогда $M/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$. Так как $G/F(G) \simeq M/\Phi(G)$, то $G/F(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$. Покажем, что $G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$. Пусть H — произвольная максимальная подгруппа из G. Если $F(G) \subseteq H$, то $H/F(G) \in \mathfrak{N}^{n-1}$. Отсюда $H \in \mathfrak{N}^n$. Пусть $F(G) \not\subseteq H$. Тогда, как показано выше, $H/\Phi(H) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$. Отсюда $H/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^n$. Итак, $G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$. Из п. 4 следует, что $\Phi(G) \subseteq \mathbf{Z}_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Применяя лемму 2, получаем, что $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$.

Следующая лемма представляет самостоятельный интерес.

ЛЕММА 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация. Если G — разрешимая группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ и $G/K \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, где $K \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. По теореме 1.1 из [5] $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Очевидно, что $G^{\mathfrak{H}}K/K \subseteq G^{\mathfrak{F}}K/K$. По лемме 4.4 из [6] $G^{\mathfrak{H}} = P \times Q$, где P — p-группа, Q — p-группа и $Q \subseteq \Phi(G)$. Так как $PQ/P \subseteq \Phi(G/P)$ и $G/P/PQ/P \in \mathfrak{H}$, то $G/P \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа. Пусть L/N — G-главный фактор из K. Если L/N — p'-группа, то L/N — $\mathfrak{H}$-централен.

Пусть L/N — p-группа. По лемме 1.9 из [5] $F(G) = G^{\mathfrak{H}}\Phi(G)$. Пусть $C = C_G(L/N)$ и M — произвольная $\mathfrak{H}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда $G = MC$. Так как $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то по лемме 1.9 из [5] $\Phi(G) = \mathbf{Z}_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, $G/C \in f(p)$. Так как $G/C = MC/C \simeq M/M \cap C$, то $M/C_M(L/K) \in f(p)$. Учитывая, что $G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ по теореме 1.2 из [5] получаем $M/\Phi(G) \in \mathcal{M}(f(p)) \cap \mathcal{M}(h(p))$, где f, h — максимальные внутренние локальные экраны, соответственно $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Если $\Phi(G) \not\subseteq \Phi(M)$, то $C_M(L/N) \not\subseteq \Phi(M)$. Отсюда и из того, что $M/C_M(L/N) \in f(p)$, $M/\Phi(G) \in \mathcal{M}(f(p)) \cap \mathcal{M}(h(p))$, следует $M/C_M(L/N) \in h(p)$. А это значит, что L/N — $\mathfrak{H}$-централен.

Пусть $\Phi(G) \subseteq \Phi(M)$. Так как $M/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$, то $M \in \mathfrak{H}$. Следовательно, M — $\mathfrak{H}$-нормализатор группы G. Так как M покрывает L/N, то L/N — $\mathfrak{H}$-централен. Итак, $K \subseteq \mathbf{Z}_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. По лемме 2 $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально локальная формация. Если G — разрешимая группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$, где $n = l(G) - 1$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(G) \neq 1$. По индукции $G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$. По лемме 4 $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$.

Пусть $\Phi(G) = 1$. По теореме 1.5 из [5] $G = F(G)\lambda M$, где $F(G)$ — p-группа, $M \in \mathcal{M}(f(p))$ (f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$). Так как $l(G) = n$ и по лемме 1 $f(p)$ — тотально локальная формация, то по индукции $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$. Следовательно, $G/F(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$. Пусть H — произвольная максимальная подгруппа группы G. Если $F(G) \not\subseteq H$, то $G/F(G) \simeq H$. Тогда $H \in \mathfrak{N}^n$. Пусть $F(G) \subseteq H$. Так как $G/F(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$, то $H/F(G) \in \mathfrak{N}^{n-1}$. Отсюда $H \in \mathfrak{N}^n$. Ввиду того, что $G \notin \mathfrak{N}^n$, получаем $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$.

Следствие 1. (Картер, Фишер, Хоукс [4]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех разрешимых групп с p-длиной $\leqslant n$. Тогда $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{2n})$. ($\mathfrak{S}$ — формация всех разрешимых групп.)*

Доказательство. Пусть G — произвольная разрешимая группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Нетрудно показать, что $l(G) = 2n + 1$. Так как формация всех разрешимых групп с p-длиной $\leqslant n$ является тотально локальной, то требуемый результат следует из теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально локальная формация. Тогда $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{M}(\mathfrak{N}^i_{\pi(\mathfrak{F})})$, $n = r(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{F}$ — тотально локальная формация ранга n. Покажем, что $l(G) \leqslant n+1$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по индукции $l(G/\Phi(G)) \leqslant n+1$. Отсюда $l(G) \leqslant n+1$. Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда по теореме 1.5 из [5] $G = F(G)\lambda M$, где $F(G)$ — p-группа $M \in \mathscr{M}(f(p))$ (f — максимальный внутренний локальный экран). По лемме 1 $f(p)$ — тотально локальная формация. Ясно, что ранг формации $f(p)$ равен $n-1$. По индукции $l(M) \leqslant n$. Отсюда $l(G) \leqslant n+1$. Теперь требуемый результат следует из теоремы 2.

Выясним, в каком случае тотально локальная формация является изотропной.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая тотально локальная формация ранга n. Тогда, и только тогда, $\mathfrak{F}$ — изотропная формация, когда $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathscr{M}(\mathfrak{N}^n_{\pi(\mathfrak{F})})$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально локальная формация ранга n. Возьмем произвольную группу G из $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$. По лемме 3 $G/F(G) \in \mathscr{M}(f(p))$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. По лемме 1 $f(p)$ — тотально локальная формация. Очевидно, что $r(f(p)) = n-1$. По индукции $G/F(G) \in \mathscr{M}(\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi(f(p))})$. Отсюда $l(G) = n+1$. По теореме 2 $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{N}^n_{\pi(\mathfrak{F})})$.

Достаточность. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$ и пусть $r(\mathfrak{F}) = n$. Предположим, что $r(f(p)) < n-1$ для некоторого p из $\sigma(\mathfrak{F})$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus f(p)$. Очевидно, что $G \in \mathscr{M}(f(p))$, $O_p(G) = 1$ и G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. По следствию 2 $l(G) < n$. Тогда существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль, где F_p — поле из p элементов. Пусть $\Gamma = N\lambda G$. Нетрудно показать, что $\Gamma \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. По теореме 2 $\Gamma \in \mathscr{M}(\mathfrak{N}^k)$, где $k < n$. Противоречие. Итак, $r(f(p)) = n-1$ для любого $p \in \sigma(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — изотропная формация.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая тотально локальная формация. Каждая группа из $\mathscr{M}(\mathfrak{F})$ 2-порождена.*

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\Phi(G) = 1$. Если G неразрешима, то G — минимальная неразрешимая группа. По теореме Томпсона из [7] G 2-порождена. Пусть G разрешима. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме 1.5 из [5] $G = G^{\mathfrak{F}}\lambda M$, где $G^{\mathfrak{F}}$ —

единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $M \in \mathfrak{M}(f(p))$. Если $f(p) = \varnothing$, то M — единичная группа. Следовательно, G 2-порождена. Пусть $p \in \pi(\mathfrak{F})$. По лемме 1 $f(p)$ — тотально локальная формация. По индукции M 2-порождена, т. е. $M = \langle a, b \rangle$, $a \neq 1$. Пусть $G^{\mathfrak{F}} = \langle n_1 = 1, n_2, \ldots, n_s \rangle$, где $s = |G^{\mathfrak{F}}|$. Построим подгруппы $M_i = \langle a, bn_i \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Предположим, что M_i отличны от G. Очевидно, что M_i являются дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. По теореме 1.1 из [5] M_i сопряжены в G $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Если $M_i \neq M_j$ для $i \neq j$, то подгруппы M_i составляют полный класс сопряженных подгрупп в G. Но тогда элемент a попадает в каждую из этих подгрупп, т. е. $a \in M_G = 1$. Противоречие. Значит, $M_i = M_j$ для некоторых $i \neq j$. Но тогда M_i содержит неединичный элемент $(an_i)(an_j)^{-1} = an_in_j^{-1}a^{-1} \in G^{\mathfrak{F}}$. Последнее противоречит равенству $M_i \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. Итак, $M_i = G$ для некоторых i. Следовательно, G 2-порождена.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая тотально локальная формация. Если каждая 2-порожденная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Гомельский государственный университет

Поступило 20.03.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 336—372.

[2] Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964.

[3] Ito N. Note on (LM)-groups of finite orders // Kodai Math. Sem. Rep. 1951. V. 1—2. P. 1—6.

[4] Carter R., Fisher B., Hawkes T. Extreme classes of a finite soluble groups // J. Algebra. 1968. V. 17, № 3. P. 285—313.

[5] Семенчук В. Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 348—382.

[6] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[7] Thompson T. G. Nonsolvable Finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 383—437.