



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. M. Pак, О нескольких теоремах Файна, об Эндрюсе, Дайсоне и об упущенных  
возможностях, *Mat. Pros.*, 2003, Issue 7, 136–148

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms  
of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 44.220.184.63

October 16, 2024, 11:26:17



О нескольких теоремах Файна,  
об Эндрюсе, Дайсоне  
и об упущенных возможностях<sup>†</sup>

И. Пак\*

ВВЕДЕНИЕ

История никогда не устроена в соответствии с нашими представлениями о том, как все должно было происходить, особенно если судить о событиях, покрытых пылью веков. То же самое верно и в математике. Известно много случаев, когда решение задачи не было найдено совершенно случайно, просто из-за неудачного стечения обстоятельств. В знаменитой статье [15] Фримен Дайсон описал некоторые «упущенные возможности»<sup>1)</sup>, в частности, историю того, как он не открыл тождества Макдональда для  $\eta$ -функции. В следующем далее тексте рассказана история теорем Файна о разбиениях и комбинаторных доказательствах этих теорем. Видно, что эти теоремы могли (и, возможно, должны были) быть доказаны значительно раньше, если бы не пресловутые «упущенные возможности».

Важнейшее событие, положившее начало всей нашей истории, — публикация заметки [18] Натаном Файном. Следуя [5], можно сказать, что Файн «анонсировал несколько элегантных и интригующих теорем о разбиениях. Результаты отличались сочетанием простоты формулировок и [...] глубины доказательств». Не посягая на глубину и красоту этих теорем, мы покажем, что многие из них имеют удивительно простые комбинаторные доказательства в стиле классических доказательств

---

\*Department of Mathematics, MIT, Cambridge, MA 02139

pak@math.mit.edu

Работа частично поддержана грантами NSA и NSF.

<sup>†</sup>Перевод В. В. Доценко.

<sup>1)</sup>Читатель может подумать, что держит в руках вторую статью, в названии которой встречаются слова «упущенные возможности». В действительности эта статья третья, ибо по следам статьи Дайсона в журнале «Квант» появилась статья [27], примечательная не только сходным броским названием, но и тем, что она содержит наряду с научно-популярным изложением истории тождеств Макдональда описание рассматриваемой ниже инволюции Франклина ... —Прим. перев.

теорем о разбиениях. Возможно, с важными результатами так и должно быть ...

Теоремы Файна можно разбить на две (перекрывающиеся) группы: имеющие дело с разбиениями на различные и нечетные слагаемые — в духе Эйлера — и имеющие дело с рангом разбиения — величиной, определенной Ф. Дайсоном немногим более полувека назад. Поскольку сходны эти сюжеты в основном тем, как развивались события, мы расскажем о них по отдельности.

В упоминавшейся заметке Файна не было доказательств и даже указаний к доказательству нетривиальных формул, использованных для вывода опубликованных там теорем. Заметка была напечатана в журнале Национальной Академии Наук США, посвященном сразу всем областям науки. Этого оказалось достаточно для того, чтобы результаты Файна не попадались на глаза практически никому в течение нескольких десятилетий после публикации. Хотя заметка Файна и содержала обещание опубликовать полностью доказательства в журнале, «посвященном лишь математике», это обещание никогда не было выполнено. Как жаль!

Дальнейшая история развития событий относится к шестидесятым годам, когда Джордж Эндрюс, в то время аспирант в университете Пенсильвании, прослушал курс Файна по базисным гипергеометрическим рядам. Как он пишет в автобиографическом очерке [7], «его [Файна — Перев.] курс был основан на рукописи, которую он совершенствовал десять лет, впоследствии изданной в виде [19]». Книга [19] вышла в 1988 году, ровно через сорок лет после заметки [18]. Она, в частности, содержит доказательства всех заявленных в заметке результатов. До публикации книги [19] Эндрюс хранил у себя рукопись и использовал ее от случая к случаю. Кроме прочего, он открыл новые аналитические доказательства ряда результатов, продемонстрировал связь результатов Файна с деятельностью в духе Роджерса–Рамануджана и, что для нас важно, обнаружил комбинаторные доказательства некоторых теорем. Многие не публиковавшиеся в течение долгого времени результаты Файна обязаны своей известностью усилиям Эндрюса.

В этом месте история делится на две. Оставшаяся часть статьи в меньшей степени научно-популярная. Ее основное содержание — новые комбинаторные доказательства теорем Файна. Имея в виду некую логику повествования, мы изменили порядок, в котором они обсуждаются в [18], и использовали немного другие обозначения. Завершается статья несколькими замечаниями общего характера.

Несколько общих слов про обозначения. То, что  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$  является разбиением числа  $n$ , обозначается  $\lambda \vdash n$  или  $|\lambda| = n$ . Наибольшее слагаемое  $\lambda_1$  разбиения  $\lambda$  и число слагаемых  $\ell$  в этом разбиении обозначаются  $a(\lambda)$  и  $\ell(\lambda)$  соответственно. Через  $\lambda'$  обозначается сопряженное

разбиение. Для изображения разбиений на плоскости мы используем диаграммы Юнга. Все стандартные ссылки, определения и детали можно найти в [2].

## 1. РАЗБИЕНИЯ НА РАЗЛИЧНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ И ИНВОЛЮЦИЯ ФРАНКЛИНА

Начнем с формулировки одного из результатов [18].

**ТЕОРЕМА 1 (ФАЙН).** Пусть  $\mathcal{D}_n^0$  и  $\mathcal{D}_n^1$  — множества разбиений числа  $n$  на различные слагаемые с четным и нечетным наибольшим слагаемым соответственно. Тогда

$$|\mathcal{D}_n^0| - |\mathcal{D}_n^1| = \begin{cases} 1, & \text{если } n = \frac{k(3k+1)}{2} \\ -1, & \text{если } n = \frac{k(3k-1)}{2} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эту теорему естественно сопоставить с внешне похожей *пентагональной теоремой Эйлера*, которую мы для вящего сходства сформулируем так:

**ТЕОРЕМА 2 (ЭЙЛЕР).** Пусть  $\mathcal{Q}_n^0$  и  $\mathcal{Q}_n^1$  — множества разбиений числа  $n$  на различные слагаемые с четным и нечетным числом слагаемых соответственно. Тогда

$$|\mathcal{Q}_n^0| - |\mathcal{Q}_n^1| = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } n = \frac{k(3k \pm 1)}{2} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

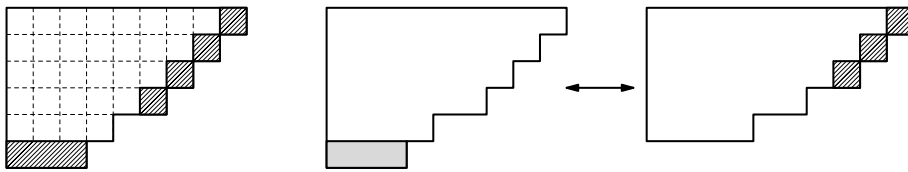
Конечно, это сходство не осталось без внимания. Файн отметил, что теорема 1 «внешне похожа на знаменитую пентагональную теорему Эйлера, но мы не смогли обнаружить никакой внутренней связи этих теорем». В обзоре [23] Лемер отмечает: «Этот результат параллелен известной теореме Эйлера».

Ниже мы продемонстрируем, что у теоремы 1 есть доказательство, которое практически идентично знаменитому доказательству Франклина теоремы 2. Франклин в период обучения в университете Джона Гопкинса был студентом Сильвестра и опубликовал свое доказательство в [20] незадолго до появления известного обзора Сильвестра [25]. Возможно, что эти два текста объясняют, почему «конструктивная теория разбиений» все еще существует.

Вряд ли можно винить Файна в том, что связь между этими теоремами не была тогда обнаружена. В те дни биекции мало использовались в доказательствах. Лишь в конце шестидесятых годов этот метод вновь

стал популярным, о чем свидетельствуют многие статьи, где теоремы о разбиениях доказываются с помощью построения явных биекций. Нашла новые применения и инволюция Франклина, использованная как для доказательства ряда уточнений пентагональной теоремы Эйлера [22], так и для доказательства нового комбинаторного тождества [11]. Жаль, что ее применение для доказательства теоремы Файна оставалось неизвестным так долго.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n^0 \cup \mathcal{D}_n^1$  множество разбиений числа  $n$  на различные слагаемые. Опишем инволюцию<sup>2)</sup> на множестве  $\mathcal{D}_n$ . Рассмотрим разбиение  $\lambda \in \mathcal{D}_n$ . Обозначим через  $s(\lambda)$  наименьшее слагаемое разбиения  $\lambda$ , а через  $b(\lambda)$  наибольшее  $b \leq \ell(\lambda)$ , для которого  $\lambda_b = \lambda_1 - b + 1$ . Геометрически  $s(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  — длины *нижнего основания* и *побочной диагонали* диаграммы Юнга разбиения  $\lambda$  (рис. 1). Мы опишем отображение как раз в терминах диаграммы Юнга. Если  $s(\lambda) \leq b(\lambda)$ , удалим нижнее основание и добавим побочную диагональ длины  $s(\lambda)$ . Если  $s(\lambda) > b(\lambda)$ , удалим побочную диагональ и добавим нижнее основание длины  $b(\lambda)$ . Если в одном из описанных случаев предписанные действия приводят не к диаграмме Юнга, то ничего делать не надо. Определенное нами отображение  $\alpha : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{D}_n$  называется инволюцией Франклина.



**Рис. 1.** Диаграмма Юнга  $[\lambda]$ , соответствующая разбиению  $\lambda = (9, 8, 7, 6, 4, 3)$ . Для этого разбиения  $s(\lambda) = 3$ ,  $b(\lambda) = 4$  и  $\alpha(\lambda) = (10, 9, 8, 6, 4)$

Заметим, что если разбиение  $\lambda$  не является неподвижной точкой, то отображение  $\alpha$  изменяет четность числа слагаемых. Кроме того, неподвижные точки соответствуют диаграммам, у которых нижнее основание и побочная диагональ имеют общую клетку и  $s(\lambda) - b(\lambda)$  равно нулю или единице (рис. 2). Число квадратиков в такой диаграмме есть  $k(3k \pm 1)/2$  — «пентагональное число»<sup>3)</sup>. Поэтому  $|\mathcal{Q}_n^0| - |\mathcal{Q}_n^1| = 0$ , если  $n$  не является пентагональным числом, а иначе эта разность равна единице или минус

<sup>2)</sup> Инволюция на множестве  $A$  — это биекция  $f : A \rightarrow A$  с тем дополнительным условием, что  $f \circ f = \text{id}$ , т. е. отображение  $f$  совпадает со своим обратным. — *Прим. перев.*

<sup>3)</sup> Т. е. пятиугольное. Древние греки умели выкладывать правильный пятиугольник из такого количества камушков. — *Прим. перев.*

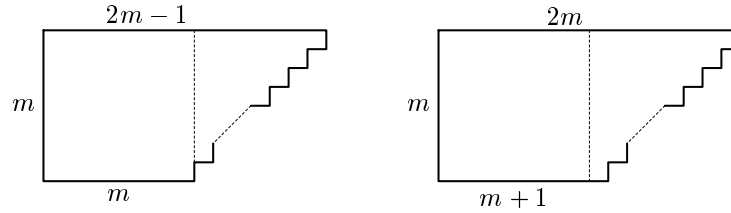


Рис. 2. Неподвижные точки инволюции Франклина

единице: с помощью построенной инволюции все разбиения, кроме неподвижных точек, группируются в пары, причем разбиения, входящие в одну пару, вносят одинаковый вклад — по единице — в  $|Q_0|$  и  $|Q_1|$ , вклад же неподвижных точек легко вычисляется. Это доказывает теорему 2.

Аналогично можно заметить, что отображение  $\alpha$  изменяет четность наибольшего слагаемого. Поэтому  $|D_n^0| - |D_n^1| = 0$ , если  $n$  не является пентагональным числом, а иначе эта разность равна единице или минус единице. Теорема 1 доказана.

## 2. РАЗБИЕНИЯ НА НЕЧЕТНЫЕ ЧАСТИ И БИЕКЦИЯ СИЛЬВЕСТРА

Другая теорема Эйлера гласит, что количество разбиений числа  $n$  на различные слагаемые равно количеству разбиений числа  $n$  на нечетные слагаемые. В [18] эта теорема уточнена так:

ТЕОРЕМА 3 (ФАЙН). Пусть  $\mathcal{O}_n^1$  и  $\mathcal{O}_n^3$  — множества разбиений числа  $n$  на нечетные слагаемые с  $a(\lambda) \equiv 1$  и  $3 \pmod{4}$  соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathcal{O}_n^1| &= |\mathcal{D}_n^0|, & |\mathcal{O}_n^3| &= |\mathcal{D}_n^1|, & \text{если } n \text{ четно,} \\ |\mathcal{O}_n^1| &= |\mathcal{D}_n^1|, & |\mathcal{O}_n^3| &= |\mathcal{D}_n^0|, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{aligned}$$

Как мы сейчас увидим, эта теорема следует из другого результата Файна [19]:

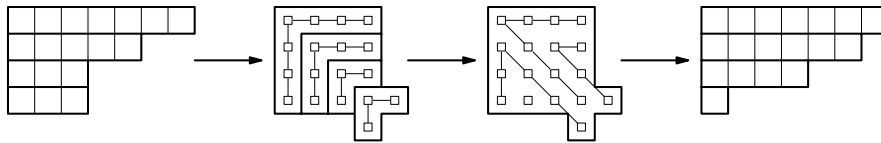
ТЕОРЕМА 4 (ФАЙН). Количество разбиений  $\mu \vdash n$  на различные слагаемые с  $a(\mu) = k$  равно количеству разбиений  $\lambda \vdash n$  на нечетные слагаемые с  $a(\lambda) + 2\ell(\lambda) = 2k + 1$ .

В одной из своих ранних статей [1] Эндрю опубликовал комбинаторное доказательство теоремы 4, но не заметил, что из нее следует теорема 3. Возможно, дело в том, что в [18] теорема 3 была объединена с теоремой 1, в то время как доказательства используют два совершенно разных классических комбинаторных рассуждения. Теоремы 3 и 4

можно доказать с помощью классического отображения «fish-hook construction»<sup>4)</sup>. Эта биекция между разбиениями на различные и нечетные слагаемые, доказывающая теорему Эйлера (см. [1, 2]), изобретена Сильвестром.

Биекция Сильвестра, как и инволюция Франклина, является хрестоматийным примером доказательства из конструктивной теории разбиений. Она была переформулирована многими способами (в том числе для координат Фробениуса на множестве разбиений и модулярного представления разбиений по модулю 2) в [5, 10, 24] и была использована для доказательства других уточнений теоремы Эйлера [21]. Если бы о теореме 3 было вовремя рассказано широкой общественности (например, в [23] она не упомянута), приводимое доказательство могло быть давно обнаружено.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_n^1 \cup \mathcal{O}_n^3$  множество разбиений числа  $n$  на нечетные слагаемые. Определим биекцию Сильвестра  $\varphi: \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{D}_n$ , как показано на рис. 3. Заметим, что если  $\mu = \varphi(\lambda)$ , то  $a(\mu) = (a(\lambda) - 1)/2 + \ell(\lambda)$ . Поскольку это можно переписать в виде  $a(\lambda) + 2\ell(\lambda) = 2a(\mu) + 1$ , теорема 4 доказана.



**Рис. 3.** Биекция Сильвестра  $\varphi: (7, 5, 3, 3) \rightarrow (7, 6, 4, 1)$

Заметим, что при  $\lambda \in \mathcal{O}_n$  выполнено сравнение  $\ell(\lambda) \equiv n \pmod{2}$ . Отсюда видно, что  $\varphi$  в действительности осуществляет биекцию между множествами из теоремы 3, что доказывает эту теорему.

### 3. РАНГ РАЗБИЕНИЯ И ОТОБРАЖЕНИЕ ДАЙСОНА

Эта история началась с публикации статьи Дайсона [12] в сборнике работ студентов Кембриджа. В этой работе Дайсон определил ранг разбиения и сформулировал несколько гипотез о количестве разбиений с заданным рангом. Их непосредственным следствием являются, в частности, теоремы Рамануджана о делимости функции разбиений, не имевшие до этого комбинаторной интерпретации. Дайсон тогда не смог доказать свои гипотезы. Их доказали Аткин и Суиннертон-Дайер [8] десять лет спустя.

<sup>4)</sup> Иначе говоря, конструкция с рыболовными крючками. В русскоязычной литературе это эффектное название пока не встречалось. — *Прим. перев.*

К счастью, Дайсон, переехав в США, опубликовал свои гипотезы в виде задачи в журнале «American Mathematical Monthly» [13]. Этой задачей заинтересовался Натан Файн, доказавший в [18] три теоремы о перечислении разбиений с заданным рангом (см. ниже). Тогда эти результаты представлялись совершенно загадочными. Из книги [19] стали известны идеи, стоявшие за доказательством Файна (ватсоновские [26] тождества на фальшивые тета-функции<sup>5)</sup>, использованные и в [8]). Здесь же мы приводим комбинаторные доказательства теорем Файна с помощью отображения, описанного Дайсоном в [14]. Эта статья Дайсона (см. также [17]) содержала простое доказательство формулы для производящей функции чисел разбиений с заданным рангом. Эта формула, впервые опубликованная в упоминавшейся студенческой работе Дайсона, была доказана (неэлементарно) в [8]. Не зная о деятельности Файна, Дайсон пероткрыл одну из его (тогда неопубликованных) теорем и дал ей биективное доказательство. Это помогло ему доказать формулу для производящей функции и получить новое доказательство пентагональной теоремы Эйлера. Мы отсылаем читателя к рассказу самого Дайсона [16] об этих событиях.

К сожалению, то, что отображение Дайсона, иногда называемое «дайсоновское присоединенное разбиение» [9], позволяет получить биективное доказательство результатов Файна, было использовано лишь в заметке Эндрюса [4]. Мы еще скажем про это в следующем разделе. Однако даже Эндрюс, по-видимому, не заметил, что отображение Дайсона доказывает сразу три теоремы Файна о рангах.

Определим *ранг* разбиения  $\lambda$  равенством  $r(\lambda) = a(\lambda) - \ell(\lambda)$ . Пусть  $\mathcal{P}_{n,r}$  — множество всех разбиений  $\lambda \vdash n$  с  $r(\lambda) = r$ , а  $p(n, r) = |\mathcal{P}_{n,r}|$ . Еще нам понадобятся множества  $\mathcal{H}_{n,r}$  ( $\mathcal{G}_{n,r}$ ) разбиений  $\lambda \vdash n$  с  $r(\lambda) \leq r$  ( $r(\lambda) \geq r$ ). Пусть  $h(n, r) = |\mathcal{H}_{n,r}|$ ,  $g(n, r) = |\mathcal{G}_{n,r}|$ . Ясно, что  $p(n, r) = h(n, r) - h(n, r-1)$  и  $g(n, r) = h(n, -r)$ . Кроме того,  $h(n, r) + g(n, r+1) = p(n)$ , где  $p(n) = h(n, n-1) = \sum_r p(n, r)$  — количество всех разбиений числа  $n$ .

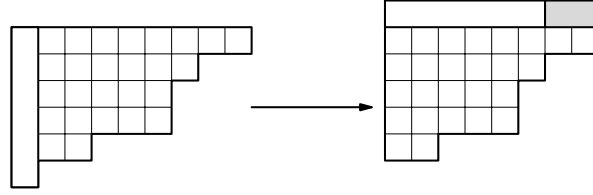
**ТЕОРЕМА 5 (ФАЙН).** *Для всех  $n > 0$  верно равенство  $h(n, r) = h(n+r, 1-r)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно построить биекцию  $\psi: \mathcal{H}_{n,r+1} \rightarrow \mathcal{G}_{n+r,r-1}$ . Рассмотрим диаграмму Юнга разбиения  $\lambda$ . Удалим первый столбец (состоящий из  $\ell = \ell(\lambda)$  клеточек) и добавим верхний ряд из  $\ell + r$  клеточек. Получившееся разбиение обозначим  $\mu$  (см. рис. 4). Отображение  $\psi = \psi_r: \lambda \mapsto \mu$  называется *отображением Дайсона*.

По предположению разбиение  $\lambda$  таково, что  $r(\lambda) = a(\lambda) - \ell \leq r + 1$ , поэтому  $\ell + r \geq a(\lambda) - 1$  и верхний ряд действительно самый длинный,

<sup>5)</sup> Иногда используется более высокопарный перевод «тета-подобные функции», но он представляется недостаточно адекватным английскому слову “*mock*”. — Прим. перев.





**Рис. 4.** Отображение Дайсона  $\psi: \lambda \rightarrow \mu$  для  $\lambda = (9, 7, 6, 3, 1) \in \mathcal{H}_{32, r+1}$ ,  $\mu = (8, 8, 6, 5, 2)$

т. е. получилась диаграмма Юнга. Кроме того,  $|\mu| = |\lambda| - \ell + (\ell + r) = n + r$ . Наконец,  $r(\mu) = a(\mu) - \ell(\mu) = \ell(\lambda) + r - (\lambda'_2 + 1) \geq r - 1$ . Поэтому  $\psi_r(\lambda) \in \mathcal{G}_{n+r, r-1}$ . Теорема доказана.

Следующие четыре соотношения объединены в одну теорему и в [18].

**ТЕОРЕМА 6 (ФАЙН).** *Имеют место равенства:*

- 1)  $p(n + 1, 0) + p(n, 0) + 2p(n - 1, 3) = p(n + 1) - p(n)$  при  $n > 1$ ,
- 2)  $p(n - 1, 0) - p(n, 1) + p(n - 2, 3) - p(n - 3, 4) = 0$  при  $n > 3$ ,
- 3)  $p(n, 0) - p(n - 1, 1) - p(n - 1, 2) + p(n - 2, 3) = 0$  при  $n > 2$ ,
- 4)  $p(n, r + 1) - p(n - 1, r) - p(n - r - 2, r + 3) + p(n - r - 3, r + 4) = 0$  при  $n > r + 3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Полагая  $r = 0$  и  $r = -1$  в последнем равенстве и используя соотношение  $p(m, r) = p(m, -r)$ , мы без труда убеждаемся в справедливости второго и третьего равенств. Первое из равенств легко вывести из теоремы 5 с помощью нескольких очевидных переходов:

$$\begin{aligned} p(n + 1) - p(n) &= \\ &= (h(n + 1, 0) + g(n + 1, 1)) - (h(n, 0) + g(n, 1)) = (h(n + 1, 0) + h(n + 1, -1)) - \\ &- (h(n, 0) + h(n, -1)) = (h(n + 1, 0) - h(n + 1, -1)) + (h(n, 0) - h(n, -1)) + \\ &+ 2(h(n + 1, -1) - h(n, 0)) = p(n + 1, 0) + p(n, 0) + 2(h(n - 1, 3) - h(n - 1, 2)) = \\ &= p(n + 1, 0) + p(n, 0) + 2p(n - 1, 3). \end{aligned}$$

Тем же способом мы без труда докажем и последнее равенство:

$$\begin{aligned} p(n - r - 3, r + 4) - p(n - r - 2, r + 3) &= \\ &= (h(n - r - 3, r + 4) - h(n - r - 3, r + 3)) - (h(n - r - 2, r + 3) - h(n - r - 2, r + 2)) = \\ &= h(n, -r - 2) - h(n - 1, -r - 1) - h(n, -r - 1) + h(n - 1, -r) = \\ &= p(n - 1, -r) - p(n, -r - 1), \end{aligned}$$

откуда  $p(n, r + 1) - p(n - 1, r) - p(n - r - 2, r + 3) + p(n - r - 3, r + 4) = 0$ , что и требовалось.

Отметим, что доказанные равенства немедленно следуют из соотношений на числа  $h(n, r)$ . Поэтому нетрудно получить и комбинаторные доказательства, перенеся слагаемые из одной части в другую так, чтобы надо было доказывать равенство двух неотрицательных чисел, и применяя отображение Дайсона к подходящим множествам разбиений. Мы приведем здесь такое доказательство для другой теоремы из [18].

**ТЕОРЕМА 7 (Файн).** *При  $r \geq n - 3$  верно равенство  $p(n) - p(n - 1) = p(n + r + 1, r)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $\mathcal{F}_n$  множество разбиений  $\lambda \vdash n$  с наименьшей частью  $s(\lambda) \geq 2$ . Заметим, что  $|\mathcal{F}_n| = p(n) - p(n - 1)$ . Действительно, в разбиение числа  $n$  единица либо не входит (и тогда это разбиение из  $\mathcal{F}_n$ ), либо входит (и тогда можно ее выбросить, получив разбиение числа  $n - 1$ ).

Возьмем произвольное разбиение  $\lambda \in \mathcal{F}_n$  и применим к нему отображение Дайсона  $\psi_{r+1}$  (соответствующее рангу  $r + 1$ ), результат обозначим за  $\mu$ . Видно, что  $\mu_1 = \ell(\lambda) + r + 1 \geq 1 + n - 3 + 1 = n - 1$ . С другой стороны,  $\mu_2 = \lambda_1 - 1 \leq n - 1$ , поскольку  $\lambda \vdash n$ . Поэтому  $\mu_1 \geq \mu_2$ , т. е. получилось разбиение. Поскольку  $\lambda \in \mathcal{F}_n$ , мы можем вычислить  $r(\mu)$ :  $r(\mu) = (\ell(\lambda) + r + 1) - (\ell(\lambda) + 1) = r$ . Поэтому  $\mu \in \mathcal{P}_{n+r+1, r}$ . Наше отображение, конечно, обратимо, поэтому теорема доказана.

#### 4. ИТЕРАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ДАЙСОНА

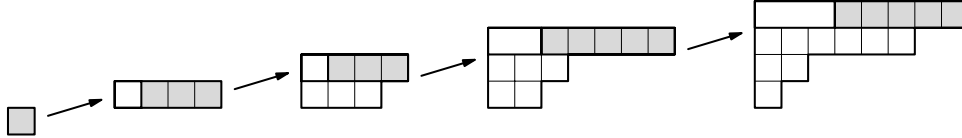
В заметке [4] Эндрюс опубликовал комбинаторное доказательство следующего утверждения, доказанного в [18].

**ТЕОРЕМА 8 (Файн).** *Пусть  $\mathcal{D}_{n,r}$  — множество разбиений числа  $n$  на различные части, имеющих ранг  $r$  (т. е.  $\mathcal{D}_{n,r} = \mathcal{D}_n \cap \mathcal{P}_{n,r}$ ),  $\mathcal{O}_{n,2k+1}$  — множество разбиений числа  $n$  на нечетные части с наибольшей частью  $2k + 1$ . Тогда*

$$|\mathcal{O}_{n,2r+1}| = |\mathcal{D}_{n,2r+1}| + |\mathcal{D}_{n,2r}|.$$

Эту теорему можно рассматривать как очередное уточнение теоремы Эйлера о разбиениях на различные и нечетные слагаемые. Доказательство основано на изучении свойств отображения Дайсона  $\psi_r$ . Жаль, что доказательство Эндрюса было опубликовано в малоизвестном журнале и, по-видимому, было оставлено без внимания. Предъявленное ниже отображение — биекция между  $\mathcal{O}_n$  и  $\mathcal{D}_n$ , отличная как от биекции Сильвестра, описанной выше, так и от биекции Глэшера [2]. Ее преимущество в том, что она доказывает теорему 8. Естественно, наша конструкция мотивирована заметкой [4].

Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell) \in \mathcal{O}_n$  — разбиение на нечетные слагаемые. Рассмотрим последовательность разбиений  $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^\ell$ , где  $\nu^\ell$  состоит из одной части  $\lambda_\ell$ , а при  $i < \ell$  разбиение  $\nu^i$  получается из  $\nu^{i+1}$  применением отображения Дайсона  $\psi_{\lambda_i}$ . Положим  $\mu = \nu^1$ . Назовем отображение  $\xi: \lambda \mapsto \mu$  итерацией отображения Дайсона (рис. 5).



**Рис. 5.** Итерация отображения Дайсона  $\xi: \lambda \rightarrow \mu$  для  $\lambda = (5, 5, 3, 3, 1) \in \mathcal{O}_{17,5}$ ,  $\mu = (8, 6, 2, 1) \in \mathcal{O}_{17,4}$

**ТЕОРЕМА 9.** Итерация отображения Дайсона  $\xi$  — биекция между множествами  $\mathcal{O}_n$  и  $\mathcal{D}_n$ . Более того,  $\xi(\mathcal{O}_{n,2r+1}) = \mathcal{D}_{n,2r} \cup \mathcal{D}_{n,2r+1}$ .

Ясно, что из этой теоремы следует теорема 8. Было бы интересно обнаружить какие-либо другие применения отображения  $\xi$  в теории разбиений.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Во-первых,  $|\nu^i| = \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_\ell$ , откуда  $|\mu| = |\nu^1| = |\lambda| = n$ . Докажем теперь индукцией по  $i$  следующее утверждение:

Все слагаемые разбиения  $\nu^i$  различны, а его ранг равен  $\lambda_i$  или  $\lambda_i - 1$ .

База индукции:  $i = \ell$ . Утверждение очевидно из определения  $\nu^\ell$ .

Пусть наше утверждение выполнено для  $\nu_{i+1}$ , т. е.  $a(\nu^{i+1}) - \ell(\nu^{i+1})$  равно либо  $\lambda_{i+1}$ , либо  $\lambda_{i+1} - 1$ . Поскольку  $a(\nu^i) = \ell(\nu^{i+1}) + \lambda_i$ , имеет место цепочка неравенств

$$(\nu^i)_1 = a(\nu^i) \geq (a(\nu^{i+1}) - \lambda_{i+1}) + \lambda_i > a(\nu^{i+1}) - 1 = (\nu^i)_2,$$

откуда следует, что  $\nu^i$  — разбиение на различные слагаемые. Понятно, что величина  $\ell(\nu^i)$  равна  $\ell(\nu^{i+1})$  или  $\ell(\nu^{i+1}) - 1$ . Значит,

$$r(\nu^i) = a(\nu^i) - \ell(\nu^i) = (\ell(\nu^{i+1}) + \lambda_i) - \ell(\nu^i) \in \{\lambda_i, \lambda_i - 1\},$$

что доказывает возможность индуктивного перехода.

Пока мы не использовали то, что  $\lambda$  — разбиение на нечетные слагаемые. Это важно при построении обратного отображения. Определим отображение  $\xi^{-1}$  индуктивно, начиная с  $\mu = \nu^1$  и применяя каждый раз отображение, обратное к отображению Дайсона  $\psi_r$ . Для того, чтобы конструкция была определена, надо оговорить, как именно мы выбираем  $r$ . Но поскольку должно выполняться одно из равенств  $r = a(\nu^i) - \ell(\nu^i)$ ,

$r = a(\nu^i) - \ell(\nu^i) + 1$ , и  $r$  должно быть нечетным,  $r$  можно выбрать единственным способом. Поэтому наше определение корректно, и отображение  $\xi$  является биекцией. Второе утверждение теоремы тоже моментально следует из доказанного выше. Теорема 9 доказана полностью.

## 5. ЗАМЕЧАНИЯ

Одна теорема Файна из [18] еще не получила простого комбинаторного доказательства. А именно, обозначим через  $\mathcal{L}_n$  множество разбиений  $\lambda$  числа  $n$  с нечетной наименьшей частью  $s(\lambda)$ . Теорема гласит, что  $|\mathcal{L}_n|$  четно для всех  $n$ , не являющихся полными квадратами, и нечетно иначе. Мы предполагаем, что существует инволюция, доказывающая это утверждение<sup>6)</sup>.

Формулировки теорем 6, 7 слегка изменены по сравнению с исходными формулировками Файна с целью их уточнения и упрощения (например, чтобы не определять  $p(n, r)$  при  $n \leq 0$ ). Традиционное отображение Дайсона получается из нашего сопряжением. Эта незначительная модификация представляется более удобной для наших целей.

Итерация отображения Дайсона, судя по всему, является новой сущностью. В основном, это материализация рекуррентного соотношения Эндрюса на числа  $|\mathcal{O}_{n,2k+1}|$  и  $|\mathcal{D}_{n,r}|$  (см. [4]). Вне зависимости от того, найдется ли отображение  $\xi$  применения в теории разбиений или нет, это отображение дает столь же естественное доказательство теоремы 8, сколь естественно доказательство теоремы 5 с помощью отображения Дайсона. К сожалению, отображение  $\xi$ , по-видимому, по своей природе итеративно и не допускает более простого описания. Как сказал однажды Ксавье Вьенно автору этого текста, «иногда рекурсивная биекция — наибольшее, чего можно достичь».

В недавней статье [9] была определена модулярная версия по модулю 2 отображения Дайсона. Используя дайсоновский метод доказательства пентагональной теоремы Эйлера (см. [14, 17]), авторы статьи применили построенное отображение для комбинаторного доказательства тождества Гаусса. Любопытно изучить свойства итерации этого отображения и выяснить, какие теоремы о разбиениях можно доказать таким образом.

Мотивировкой для этого текста послужило замечание из статьи [9]: «По-видимому, единственное известное применение преобразования Дайсона содержится в [4]». Возможно, что если бы препринт [9] не был

<sup>6)</sup>Верно даже более точное утверждение, напоминающее теоремы 1, 2. А именно, пусть  $\mathcal{L}_n^0$  и  $\mathcal{L}_n^1$  — множества таких разбиений на четное и нечетное число частей соответственно. Теорема утверждает, что если  $n$  не является полным квадратом, то  $|\mathcal{L}_n^0| - |\mathcal{L}_n^1| = 0$ , а иначе эта разность равна  $(-1)^n$ . — *Прим. перев.*

помещен в Интернет, этот текст не был бы написан. Это стало бы очередной «упущенной возможностью» ...

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Andrews G. E. *On basic hypergeometric series, mock theta functions, and partitions* (II) // *Quart. J. Math.*, 1966. Vol. 17. P. 132–143.
- [2] Andrews G. E. *The theory of partitions*. Addison–Wesley, Reading, MA, 1976. (Имеется русский перевод: Эндрюс Г. Теория разбиений, М.:Наука, 1982.)
- [3] Andrews G. E. *Ramanujan’s “Lost” Notebook. I. Partial  $\theta$ -functions* // *Adv. Math.*, 1981. Vol. 41. P. 137–172.
- [4] Andrews G. E. *On a partition theorem of N. J. Fine* // *J. Nat. Acad. Math India*, 1983. Vol. 1. P. 105–107.
- [5] Andrews G. E. *Use and extension of Frobenius’ representation of partitions* // *Enumeration and design*. Academic Press, Toronto, ON, 1984. P. 51–65.
- [6] Andrews G. E. Предисловие к книге [19], 1988.
- [7] Andrews G. E. *Some debts I owe* // *Sém. Lothar. Combin.*, 1999. V. 42. Art. B42a.
- [8] Atkin A. O. L., Swinnerton-Dyer H. P. F. *Some properties of partitions* // *Proc. London Math. Soc.*, 1954. Vol. (3) 4. P. 84–106.
- [9] Berkovich A., Garvan F. G. *Some observations on Dyson’s new symmetries of partitions*, 2002. Preprint. <http://www.math.ufl.edu/~frank>.
- [10] Bessenrodt C. *A bijection for Lebesgue’s partition identity in spirit of Sylvester* // *Discrete Math.*, 1994. Vol. 132. P. 1–10.
- [11] Chapman R.<sup>7)</sup>, *Franklin’s argument proves an identity of Zagier* // *El. J. Comb.*, 2000. Vol. 7. RP54.
- [12] Dyson F. J. *Some guesses in the theory of partitions* // *Eureka* (Cambridge), 1944. Vol. 8. P. 10–15.
- [13] Dyson F. J. Problem 4261 // *Amer. Math. Monthly*, 1947. Vol. 54. P. 418.
- [14] Dyson F. J. *A new symmetry of partitions* // *J. Combin. Theory*, 1969. Vol. 7. P. 56–61.

---

<sup>7)</sup>См. также R. Chapman, Combinatorial proofs of  $q$ -series identities, [math.CO/0109010](http://math.CO/0109010) — Прим. перев.

- [15] Dyson F. J. *Missed opportunities* // Bull. Amer. Math. Soc., 1972. Vol. 78. P. 635–652. (Имеется русский перевод: Дайсон Ф. *Упущенные возможности* // УМН, 1980. Т. 35. Вып. 1. С. 171–191.)
- [16] Dyson F. J. *A walk through Ramanujan's garden* // Ramanujan revisited. Academic Press, Boston, 1988. P. 7–28.
- [17] Dyson F. J. *Mappings and symmetries of partitions* // J. Combin. Theory Ser. A, 1989. Vol. 51. P. 169–180.
- [18] Fine N. J. *Some new results on partitions* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1948. Vol. 34. P. 616–618.
- [19] Fine N. J. *Basic hypergeometric series and applications*. Math. Surveys and Monographs. No 27. AMS, Providence, 1988.
- [20] Franklin F. *Sure le développement du produit infini  $(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots$*  // C. R. Acad. Paris Ser. A 1881. V. 92. P. 448–450.
- [21] Kim D., Yee A. J. *A note on partitions into distinct parts and odd parts* // Ramanujan J., 1999. Vol. 3. P. 227–231.
- [22] Knuth D. E., Paterson M. S. *Identities from partition involutions* // Fibonacci Quart., 1978. Vol. 16. P. 198–212.
- [23] Lehmer D. H. Math. Review 10, 356d и Errata 10, 856.
- [24] Pak I., Postnikov A. *A generalization of Sylvester's identity* // Discrete Math., 1998. Vol. 178. P. 277–281.
- [25] Sylvester J. J., with insertions by F. Franklin. *A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and exodion* // Amer. J. Math., 1882. Vol. 5. P. 251–330, 334–336. (См. также The collected mathematical papers of J. J. Sylvester. Vol. 4. Chelsea, New York, 1974. P. 1–83.)
- [26] Watson G. N. *The final problem: An account of the mock theta-functions* // J. London. Math. Soc., 1936. Vol. 11. P. 55–80.
- [27] Фукс Д. Б. *О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях* // Квант, 1981. №8. С. 12–20.