В. А. Зорич, В. С. Самовол, О некоторых условиях отображения пространства на цилиндрические области,
Матем. заметки, 1972, том 11, выпуск 4, 459–462

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 11, № 4 (1972), 459—462

УДК 513

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ

В. А. Зорич, В. С. Самовол

Дается критерий того, что локально гомеоморфное отображение пространства $f: R^n \to R^n$ в себя является гомеоморфным отображением R^n на слой.

В плоском случае это дает условие для того, чтобы f было преобразованием R^2 на полосу. Библ. 7 назв.

Здесь мы приводим один критерий того, что локально гомеоморфное отображение пространства $f: R^n \to R^n$ в себя является гомеоморфным отображением R^n на слой. В плоском случае это дает условие того, чтобы f было преобразованием R^2 на полосу.

Различные условия, гарантирующие глобальную гомеоморфность локального гомеоморфизма пространства, приводятся в работах М. Адамара [1], А. Картана [2], Н. В. Ефимова [3, 4], В. А. Зорича [5]. Вопрос о том, когда при таком отображении R^2 в качестве образа получается полоса, впервые исследовался в работах Н. В. Ефимова [3, 4], а затем в работах Б. В. Кантора [6], С. П. Гейсберга [7]. По-видимому, было бы интересно выяснить связь приведенного ниже результата с теоремой 3 работы Н. В. Ефимова [4].

Чтобы не загромождать доказательство техническими деталями, мы рассмотрим подробно лишь двумерный случай, а затем сделаем замечания относительно высших размерностей.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $f: R^2 \to R^2$ — *отображение, осуществляемое парой гладких функций* $y_1 = y_1(x_1, x_2)$ $y_2 = y_2(x_1, x_2)$ *с якобианом* $I \neq 0$.

Пусть в обоих направлениях каждой связной компоненты γ линии уровня $y_2 = \text{const}$

$$\int_\gamma \frac{I\,ds}{|\operatorname{grad} y_2|} = \infty. \tag{1}$$

Тогда f является гомеоморфизмом. Кроме того, условие (1) *является необходимым и достаточным для того, чтобы образом R^2 при отображении f была полоса, параллельная оси y_1.*

Доказательство. Пусть точка (y_1^0, y_2^0) принадлежит образу. Зафиксируем некоторый ее прообраз (x_1^0, x_2^0). Выберем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы интервал $y_1 = y_1^0\ |y_2 - y_2^0| < \varepsilon$ имел гомеоморфный прообраз ω в окрестности точки (x_1^0, x_2^0). Образом компоненты кривой $y_2(x_1, x_2) = c$, проходящей через произвольную точку $(x_1, x_2) \in \omega$, будет вся прямая $y_2 = c$, проходящая через образ точки (x_1, x_2). Действительно,

$$dy_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

вдоль $y_2(x_1, x_2) = c$, поэтому

$$\frac{dy_1}{ds} = \left(\operatorname{grad} y_1, \frac{\overline{\operatorname{grad} y_2}}{|\operatorname{grad} y_2|}\right) = \frac{I}{|\operatorname{grad} y_2|},$$

где $\overline{\operatorname{grad}}\, y_2 = \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}, -\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)$ и утверждение следует из расходимости интеграла $\int_\gamma \frac{I\,ds}{|\operatorname{grad} y_2|}$.

Итак, мы построили полосу $|y_2 - y_2^0| < \varepsilon$ в плоскости (y_1, y_2), имеющую гомеоморфный прообраз в плоскости (x_1, x_2). Будем раздвигать теперь стороны построенной полосы так, чтобы при этом компонента ее прообраза, содержащая (x_1^0, x_2^0), все еще гомеоморфно отображалась на эту полосу.

В результате мы получим полосу D_1' максимальной ширины, обладающую этим свойством. Рассматриваемая компонента D_1 прообраза максимальной полосы D_1' не может иметь конечной граничной точки. Действительно, иначе мы могли бы построить полосу D_2' для окрестности образа этой граничной точки и получить области D_1 и

D_2 с непустым пересечением, каждую из которых наше отображение f гомеоморфно преобразует в полосы D_1' и D_2' соответственно, причем $D_1' \cap D_2'$ — связно (полоса), поэтому f гомеоморфно на $D_1 \cup D_2$ (см. замечание 2 работы [5]). Тогда полоса D_1' не была бы максимальной.

Итак, прообраз D_1' совпадает с R^2, что завершает доказательство.

Замечание. Если вместо расходимости $\int_\gamma \frac{Ids}{|\operatorname{grad} y_2|}$ потребовать расходимость интеграла $\int_\gamma \frac{Ids}{|\operatorname{grad}(\alpha y_1 + \beta y_2)|}$ вдоль связных компонент γ линий уровня $\alpha y_1 + \beta y_2 = \mathrm{const}$, то f гомеоморфно преобразует R^2 на полосу, вытянутую в направлении $(\beta, -\alpha)$.

Сформулируем теперь результат для R^n $n \geqslant 2$. Для простоты мы приведем формулировку критерия для отображения на слой, параллельный одной из координатных гиперплоскостей.

ТЕОРЕМА. *Пусть $f : R_x^n \to R_y^n$ отображение класса C^1 с якобианом $I \neq 0$. Положим*

$$y_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}; \qquad I_{kl} = \| y_{ij} \| \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, \ldots, n \\ i \neq k, \ j \neq l \end{pmatrix},$$

$$I_k = (I_{k1}, \ldots, I_{kn}).$$

Если при этом интеграл $\int_\gamma \frac{Ids}{|I_k|}$ расходится в обоих направлениях любой связной компоненты γ множества $\{y_i = c_i \ i = 1, \ldots, n \ i \neq k\}$, то вместе с любой точкой $(y_1, \ldots, y_n)$ образ содержит прямую, проходящую через эту точку параллельно оси y_k.

Итак, образом является цилиндр, вытянутый вдоль оси y_k. Однако, как легко показать на примере, при этом еще нельзя гарантировать гомеоморфности отображения f.

Если же потребовать расходимость $(n-1)$-го интеграла $\int \frac{Ids}{|I_k|}$ $k = 1, \ldots, n-1$, то f будет гомеоморфным отображением R^n на слой, параллельный гиперплоскости $y_n = 0$.

Если же все интегралы $\int \frac{Ids}{|I_k|}$ $k = 1, \ldots, n$ расходятся, то в качестве образа мы получим все R^n.

Последнее замечание можно рассматривать как некоторое ослабление условий Картана [2]. Из этого замечания вытекает также следующая

ТЕОРЕМА. *Если* $f: R_x^n \to R_y^n$ — *гладкое отображение, причем*

$$|I| \geqslant C_1 > 0 \quad и \quad \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)\right| \leqslant C_2 |x|,$$

$$i, j = 1, \ldots, n, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_n^2},$$

то f — *автоморфизм* R^n.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 5.IV.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Hadamard M., Sur les transformations fonctuelles, Bull. soc. math. France, **34** (1906), 71—84.
[2] Cartan H., Sur les transformations localement topologiques, Acta Litter **6**, № 2—3 (1933), 85—104.
[3] Ефимов Н. В., Возникновение особенностей на поверхности отрицательной кривизны, Матем. сб., **64**, № 2 (1964), 286—320.
[4] Ефимов Н. В., Дифференциальные признаки гомеоморфности некоторых отображений с применением в теории поверхностей, Матем. сб., **76**, № 4 (1968) 499—512.
[5] Зорич В. А., Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства, Матем. сб., **74**, № 3 (1967), 417—433.
[6] Кантор Б. Е., К вопросу о нормальном образе полной поверхности отрицательной кривизны, Матем. сб., **82**, № 2 (1970), 220—223.
[7] Гейсберг С. П., О свойствах нормального отображения, порождаемого уравнением $rt - s^2 = -f^2(x, y)$, Матем. сб., **82**, № 2 (1970), 224—232.