

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.946

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ДАРБУ—ПУАССОНА

С. А. АЛДАШЕВ

Пусть  $\Omega$  — конечная односвязная область евклидова пространства  $E_{m+1}$  переменных  $(x, t)$ , где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , ограниченная тремя поверхностями  $|x| = t$ ,  $|x| = R - t$ ,  $t = 0$ .

Части этих поверхностей, образующих границу  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ , обозначим через  $S, S_R, S_0$  соответственно.

В области  $\Omega$  рассмотрим уравнение Эйлера—Дарбу—Пуассона

$$L_k(u) \equiv u_{tt} + \frac{k}{t} u_t - \sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} = 0, \quad (1)$$

где  $k$  — действительное число.

Через  $u^k$  будем обозначать решения уравнения (1) при данном  $k$ .

Известно, что если  $f$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то среднее значение

$$M(x, t, f) = \frac{1}{\omega_m} \int_{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2 = 1} f(x_1 + \alpha_1 t, \dots, x_m + \alpha_m t) d\omega_m \quad (2)$$

этой функции на сфере радиуса  $t$  с центром в точке  $x$  является решением уравнения  $L_{m-1}(u) = 0$ , удовлетворяющим начальным данным

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$\omega_m$  — площадь единичной сферической поверхности  $m$ -мерного пространства, равная  $\frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$ , где  $\Gamma$  — функция Эйлера.

При  $k > m - 1$  решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3), задается формулой [1—4]

$$u^k(x, t) = \frac{\omega_{k+1-m}}{\omega_{k+1}} \int_{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2 \leq 1} f(x_1 + \alpha_1 t, \dots, x_m + \alpha_m t) \times \\ \times \left(1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j^2\right)^{(k-m-1)/2} d\alpha_1 \dots d\alpha_m. \quad (4)$$

Пусть теперь  $k < m - 1$ ,  $k \neq -1, -3, -5, \dots$ . Выберем наименьшее целое  $p \geq 0$  так, чтобы  $k + 2p > m - 1$ . Хорошо известно [1—4], что если

$u^{k+2p}$  является решением задачи Коши для уравнения  $L_{k+2p}(u) = 0$  с начальными данными

$$u^{k+2p}(x, 0) = \frac{f(x)}{(k+1)(k+3) \dots (k+2p-1)}, \quad u_t^{k+2p}(x, 0) = 0,$$

то функция

$$u^k = t^{1-k} \left( \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^p (t^{k+2p-1} u^{k+2p}) \quad (5)$$

есть решение задачи Коши для уравнения (1) с данными  $u^k(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t^k(x, 0) = 0$ ,  $f(x) \in C^{p+2}$ .

В качестве многомерного аналога задачи Дарбу можно рассмотреть следующую задачу.

**Задача D.** Найти решение уравнения (1) в области  $\Omega$ , непрерывное в замкнутой области  $\bar{\Omega}$  и удовлетворяющее на  $S \cup S_0$  краевым условиям

$$u|_S = \sigma(x), \quad u|_{S_0} = \tau(x) \quad (6)$$

или

$$u|_S = \sigma(x), \quad u_t|_{S_0} = \nu(x). \quad (7)$$

Для гиперболических уравнений многомерный аналог задачи Дарбу рассматривался в работах А. В. Бицадзе [5] и А. М. Нахушева [6].

В дальнейшем задачи (1)–(6) и (1)–(7) будем называть первой и второй задачами Дарбу соответственно (задача  $D_1$  и  $D_2$ ).

В статье рассматривается случай  $m=2$ . При  $k > 1$  решение задачи Коши, согласно (4), примет вид

$$u^k(x, t) = \frac{k-1}{2\pi} t^{1-k} \int_{|\xi-x| \leq t} f(\xi) (t^2 - |x-\xi|^2)^{(k-3)/2} d\xi. \quad (8)$$

Пусть

$$f(x) = |x|^q \cos n\theta, \quad \theta = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (9)$$

здесь и в дальнейшем  $n$  — положительное целое число, а  $q > 0$  выбрано таким образом, чтобы  $f(x) \in C^2(|x| \leq R)$ .

Тогда из (8) при  $t = |x| = r$  имеем

$$u^k(x, r) = \frac{k-1}{2\pi} r^{1-k} \int_{|\xi-x| \leq r} |\xi|^q (t^2 - |x-\xi|^2)^{(k-3)/2} \cos n\varphi d\xi, \\ \varphi = \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1}. \quad (10)$$

Положив в (10)  $x = re^{i\theta}$ ,  $\xi = \rho e^{i\varphi}$ , с учетом того, что якобиан преобразования  $\frac{D(\xi_1, \xi_2)}{D(\rho, \varphi)} = \rho$  и

$$|x-\xi|^2 = (x-\xi)(\bar{x}-\bar{\xi}) = (re^{i\theta} - \rho e^{i\varphi})(re^{-i\theta} - \rho e^{-i\varphi}) = \\ = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta),$$

найдем

$$\sigma(x) = \frac{k-1}{2\pi} r^{1-k} \cos n\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos n\psi d\psi \int_0^{2r \cos \psi} \rho^{(2q+k-1)/2} (2r \cos \psi - \rho)^{(k-3)/2} d\rho -$$

$$-\frac{k-1}{2\pi} r^{1-k} \sin n\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin n\psi d\psi \int_0^{2r \cos \psi} \rho^{(2q+k-1)/2} (2r \cos \psi - \rho)^{(k-3)/2} d\rho \equiv \\ \equiv J_1 + J_2, \quad \psi = \varphi - \theta.$$

Так как подынтегральное выражение в  $J_2$ , как функция от  $\psi$  нечетная, то  $J_2 = 0$ . Интеграл  $J_1$  с учетом четности подынтегральной функции можно переписать в виде

$$J_1 = \frac{k-1}{\pi} r^{1-k} \cos n\theta \int_0^{\pi/2} \cos n\psi d\psi \int_0^{2r \cos \psi} \rho^{(2q+k-1)/2} (2r \cos \psi - \rho)^{(k-3)/2} d\rho = \\ = \frac{2^{q+k-1}(k-1)}{\pi} r^q \cos n\theta \int_0^{\pi/2} \cos n\psi \cos^{q+k-1} \psi d\psi \int_0^1 \eta^{(2q+k-1)/2} (1-\eta)^{(k-3)/2} d\eta,$$

где  $\rho = 2r \cos \psi \eta$ .

Справедливо тождество

$$\cos n\psi \cos^{q+k-1} \psi =$$

$$= 2^{-(q+k-1)} \sum_{l=0}^{q+k-1} \binom{q+k-1}{l} \cos(n-q-k+2l+1)\psi. \quad (11)$$

Пусть

$$n-q-k=2s-1, \quad s=1, 2, 3, \dots, \quad q+k-2 > 0, \quad (12)$$

тогда из (11) и (12) заключаем, что

$$\int_0^{\pi/2} \cos n\psi \cos^{q+k-1} \psi d\psi = \\ = 2^{-(q+k-1)} \sum_{l=0}^{q+k-1} \binom{q+k-1}{l} \frac{1}{2s+2l} \sin(2s+2l)\psi \Big|_0^{\pi/2} \equiv 0.$$

Стало быть, при выполнении условия (12)  $\sigma(x) \equiv 0$ .

Таким образом, доказано, что однородная задача, соответствующая задаче  $D_2(k > 1)$ , имеет в качестве нетривиальных (регулярных) решений функции вида

$$u^h(x, t) = \frac{k-1}{2\pi} t^{1-k} \int_{|\xi-x| \leq t} |\xi|^q (t^2 - |x-\xi|^2)^{(h-3)/2} \cos n \left( \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) d\xi.$$

Для  $-1 < k < 1$  в силу (5) решение задачи Коши представимо в виде

$$u^h(x, t) = \frac{1}{2\pi} t^{-k} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{|\xi-x| \leq t} f(\xi) (t^2 - |x-\xi|^2)^{(h-1)/2} d\xi \right]. \quad (13)$$

Пусть

$$f(x) = |x|^q \cos n\theta, \quad \theta = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (14)$$

где  $q > 0$ , и такова, что  $f(x) \in C^3(|x| \leq R)$ . С учетом (14), переходя в (13) к сферическим координатам  $x = r e^{i\theta}$ ,  $\xi = \rho e^{i\varphi}$ , сделав замену переменной  $\rho - r \cos(\varphi - \theta) = \eta(t^2 - r^2 \sin^2(\varphi - \theta))^{1/2}$  и продифференцировав по  $t$ ,  $u^h(x, t)$  при  $t = |x| = r$ , найдем

$$\sigma(x) = \frac{q+1}{2\pi} r^{-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2r \cos \psi} \rho^q \left[ 1 - \frac{(\rho - r \cos \psi)^2}{r^2 \cos^2 \psi} \right]^{(h-1)/2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \cos n(\psi + \theta) \cos^{h-3}\psi (\rho - r \cos \psi) d\rho d\psi + \\ & + \frac{k}{2\pi} r^{-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2r \cos \psi} \rho^{q+1} \left[ 1 - \frac{(\rho - r \cos \psi)^2}{r^2 \cos^2 \psi} \right]^{(h-1)/2} \times \\ & \times \cos^{h-3}\psi \cos n(\psi + \theta) d\rho d\psi, \quad \psi = \varphi - \theta. \end{aligned}$$

Производя замену переменной  $\rho = 2r \cos \psi \eta$  во внутреннем интеграле, получим

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 2M \cos n\theta \int_0^{\pi/2} \cos n\psi \cos^{q+h-1}\psi d\psi - M \sin n\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin n\psi \cos^{q+h-1}\psi d\psi \equiv \\ & \equiv J_1 + J_2, \end{aligned}$$

где

$$M = \frac{2^{q+1} r^q}{\pi} \int_0^1 \eta^q [2\eta(q+k+1) - (q+1)] [1 - (2\eta-1)^2]^{(h-1)/2} d\eta.$$

Очевидно, что  $J_2 \equiv 0$ , а при  $n - q - k = 2s - 1$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$ ;  $q + k - 2 > 0$  из (11) следует, что  $J_1 \equiv 0$ .

Это означает, что функции вида

$$\begin{aligned} u^h(x, t) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} t^{-k} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{|\xi-x| \leq t} |\xi|^q (t^2 - |x-\xi|^2)^{(h-1)/2} \cos n \left( \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) d\xi \right] \end{aligned}$$

являются нетривиальными (регулярными) решениями однородной задачи, соответствующей задаче  $D_2(-1 < k < 1)$ .

При  $k = 1$ , используя (2), аналогично можно доказать, что однородная задача, соответствующая задаче  $D_2$ , имеет в качестве нетривиальных (регулярных) решений функции вида

$$u^h(x, t) = \frac{1}{2\pi} t^{-2} \int_{|\xi-x|=t} |\xi|^q \cos n \left( \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) d\xi,$$

где  $q \geq 5$ ,  $n - q = 2s + 1$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$

Для  $k < -1$ ,  $k \neq -3, -5, \dots$ , также можно построить функции, которые являются нетривиальными решениями однородной задачи, соответствующей задаче  $D_2$ .

Теперь остановимся на одной корректной постановке задачи Коши для уравнения (1), которая непосредственно следует из результатов Вайнштейна [1-3] (см. также [7]). Для этого сформулируем некоторые свойства ([1]) уравнения (1).

I. Если  $u^h$  является решением уравнения  $L_h(u) = 0$ , то функция

$$u^{2-h} = t^{h-1} u^h$$

будет решением уравнения  $L_{2-h}(u) = 0$ .

II. Если  $u^h$  — решение задачи Коши для уравнения  $L_h(u) = 0$  с начальными данными

$$u^h(x, 0) = f(x), \quad u^h_t(x, 0) = 0,$$

то функция

$$\frac{1}{t} \frac{\partial u^h}{\partial t} = u^{h+2}$$

является решением задачи Коши для уравнения  $L_{h+2}(u) = 0$  при условии

$$u^{k+2}(x, 0) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^m u^k_{x_i x_i}(x, 0), \quad u_t^{k+2}(x, 0) = 0, \quad k \neq -1.$$

Пусть  $p \geq 0$  — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству  $2-k+2p > m-1$ ,  $k=1, 3, 5, \dots$ , и  $u^{2-h+2p}$  — решение уравнения  $L_{2-h+2p}(u) = 0$ , удовлетворяющее условию

$$u^{2-h+2p}(x, 0) = \frac{\varphi(x)}{(1-k)(3-k) \dots (2p+1-k)}, \quad u_t^{2-h+2p}(x, 0) = 0.$$

Тогда в силу (5)

$$u^{2-h} = t^{h-1} \left( \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^p (t^{1-h+2p} u^{2-h+2p}) \quad (15)$$

есть решение задачи Коши с данными

$$u^{2-h}(x, 0) = \frac{\varphi(x)}{1-k}, \quad u_t^{2-h}(x, 0) = 0, \quad \varphi(x) \in C^{p+2}.$$

Производя в (15) дифференцирование и используя свойства II, получим

$$u^{2-h} = \gamma_0 u^{2-h+2p} + c_0 t u_t^{2-h+2p} + O(t^2),$$

$$\gamma_0 = (3-k)(5-k) \dots (2p+1-k), \quad c_0 = \text{const.}$$

Отсюда в силу свойства 1 легко видеть, что  $u^k$  есть решение задачи Коши для уравнения  $L_h(u) = 0$  при  $k < 1$  с начальными данными

$$u^k(x, 0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^k u_t^k = \varphi(x).$$

Из корректности постановки приведенной задачи Коши и примера неединственности решений задачи  $D_2$  следует неединственность решения задачи  $D_1$  ( $k < 1$ ).

Функции вида

$$u^k(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi-x| \leq t} |\xi|^q (t^2 - |x-\xi|^2)^{-(k+1)/2} \cos n \left( \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) d\xi,$$

где  $q$  таковы что  $|x|^q \cos n \left( \arctg \frac{x_2}{x_1} \right) \in C^2(|x| \leq R)$  и  $n - (q-k) = 2S + 1$ ,  $s=1, 2, 3, \dots$

В заключение отметим, что на неединственность решения задачи  $D_1$  для двумерного волнового уравнения впервые обратил внимание Дон-Гуан-Чанг [8].

Приношу глубокую благодарность научному руководителю А. М. Нахушеву за руководство данной работой.

### Литература

1. Weinstein A. C. R. Acad. Sci. Paris, vol., 234, 1952, 2584—2585.
2. Wienstein A. Communs Pure and Appl. Math., vol., 8, 1954, 105—116.
3. Weinstein A. The Fifth Symposium in applied Math. Mc Graw-Hill, New-York, 1954, 137—147.
4. Diaz J. B., Weinberger H. F. Proc. Amer. Math. Soc., vol., 4, 1953, 703—715.
5. Бицадзе А. В. ДАН СССР, 110, № 6, 1956.
6. Нахушев А. М. ДАН СССР, 194, № 1, 1970.
7. Weinstein A. Instituto Brasileiro de Educaçao, Cienciae Cultura, 1955, 126—146.
8. Tong-Kwang-Cheing. Science Record, New ver, 1, 5, 1957.

Поступила в редакцию  
18 мая 1974 г.

Кабардино-Балкарский государственный университет