А. К. Айламазян, М. М. Гилула, А. П. Столбоушкин, Г. Ф. Шварц, Редукция реляционной модели с бесконечными областями к случаю конечных областей, *Докл. АН СССР*, 1986, том 286, номер 2, 308–311

Доклады Академии наук СССР
1986. Том 286, № 2

УДК 681.327 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

А.К. АЙЛАМАЗЯН, М.М. ГИЛУЛА,
А.П. СТОЛБОУШКИН, Г.Ф. ШВАРЦ

РЕДУКЦИЯ РЕЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ОБЛАСТЯМИ К СЛУЧАЮ КОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком Г.С. Поспеловым 15 VII 1985)

В качестве языков запросов к базам данных широко используются языки, основанные на языке исчисления предикатов первого порядка и называемые в теории баз данных реляционными исчислениями (см. [1–3]). В этой теории разными авторами отмечалась следующая проблема. Исходные отношения, хранимые в базе данных, всегда конечны, однако область истинности формулы реляционного исчисления (т.е. ответ на запрос) может быть бесконечным множеством и, значит, не вычисляться на ЭВМ. Более того, даже если область истинности будет и конечным множеством, то при ее непосредственном вычислении могут появляться бесконечные множества на промежуточных шагах. В [1] такие формулы названы бессмысленными и их предлагается исключить из рассмотрения, ограничившись так называемыми "безопасными" формулами. При этом безопасными названы формулы, у которых область истинности конечна, и кроме того, выполнены некоторые дополнительные требования семантического характера. Тем самым из рассмотрения исключается широкий класс формул, в том числе имеющих конечную область истинности. В [3] запросы (т.е. формулы реляционного исчисления), допускающие перевод на алгоритмический язык и вычисление за конечное число шагов ответа в виде конечного отношения, названы конструктивными. Там же приводится простой пример неконструктивного запроса. Мы показываем, что множество запросов, конструктивных (в смысле работы [3]) при любом состоянии базы данных, неразрешимо. В то же время при некотором естественном расширении понятия конструктивного запроса всякий запрос является конструктивным.

Суть дела в том, что, хотя области могут быть и бесконечными, из того, что исходные отношения конечны, следует, что средствами реляционного языка нельзя различить элементы, не входящие в исходные отношения. Эти элементы можно "склеить" и свести вычисления к случаю конечных отношений. Если ответ на запрос конечен, то мы получим его за конечное число шагов, даже если при прямом вычислении на промежуточных шагах возникала бы бесконечность. Если же ответ – бесконечное отношение, то, как мы покажем, оно может быть естественно записано в конечном виде, допускающем простой алгоритм выяснения принадлежности этому отношению.

Перейдем к точным формулировкам. Мы будем пользоваться языком исчисления предикатов, называемым в теории баз данных реляционным исчислением с переменными на доменах [1]. Для простоты изложения ограничимся случаем, когда все атрибуты определены на одном бесконечном домене, и допускается только один оператор сравнения – равенство. Случай многосортного исчисления рассматривается совершенно аналогично.

Базой данных (БД) назовем совокупность $B = \langle D, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$ где D – счетное множество, R_i – имя для n_i-местного конечного отношения на

D, $i = 1, 2, \ldots, k$. Фиксируем счетный набор переменных $\{x_1, x_2, \ldots\}$, пробегающих область D.

Опишем реляционный язык базы данных B.

Термами называются перменные и элементы D (которые мы будем называть также константами).

Формулы определяются индуктивно. Атомарными формулами называются выражения вида $R_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, где R_i – имя m-местного отношения из B, $t_1, t_2, \ldots, t_m$ – термы, и выражения $t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 – термы. Все вхождения переменных в атомарные формулы считаются свободными. Если φ, ψ – формулы, то $(\varphi \wedge \psi)$ – формула. Вхождения переменных в φ и в ψ, свободные в этих формулах, остаются свободными в $(\varphi \wedge \psi)$. Если φ – формула, то $\neg\varphi$ – формула. Вхождение переменной в $\neg\varphi$ свободно, если оно свободно в φ. Если φ – формула, x – переменная, то $\exists x \varphi$ – формула. Свободными вхождениями переменных в $\exists x \varphi$ являются в точности свободные вхождения в φ переменных, отличных от x. Определение формул и свободных вхождений закончено.

Переменные, имеющие свободные вхождения в формулу φ, называеются параметрами φ. Параметр x формулы φ назовем специальным, если какое-либо его свободное вхождение в φ имеет вид $x = y$ или $y = x$, где y – переменная, отличная от x (при этом указанное вхождение переменной y может быть и связанным). Например, в формуле $R_1(x, y) \wedge \exists z (y = z)$ параметр y является специальным, параметр x – не является.

Через $S(\varphi)$ обозначаем количество специальных параметров формулы φ. Индуктивно определяем степень формулы φ $d(\varphi)$. Если φ имеет вид $x = y$, где x, y – различные переменные, то положим $d(\varphi) = 2$; для всех остальных атомарных φ $d(\varphi) = 1$. Далее, $d(\neg\varphi) = d(\exists x \varphi) = d(\varphi)$, $d(\varphi \wedge \psi) = \max(d(\varphi), d(\psi), S(\varphi \wedge \psi))$. Очевидно, что для всех φ $S(\varphi) \leqslant d(\varphi)$.

Состоянием БД $\langle D, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$ назовем набор $r = \langle r_1, r_2, \ldots \ldots, r_k \rangle$, где каждое r_i – конечное отношение на D той же местности, что и его имя R_i. Актуальной областью D^r данного состояния назовем множество элементов D, встречающихся на каком-либо месте в каком-либо r_i. Ясно, что D^r конечно.

Через $D^r(\psi)$ обозначаем объединение D^r и множества всех констант, входящих в ψ.

Пусть $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – формула, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – список констант. Через $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ обозначаем, как обычно, результат подстановки в формулу φ констант $a_1, a_2, \ldots, a_m$ вместо свободных вхождений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ соответственно. Пусть $D^r \subseteq E \subseteq D$. Индукцией по сложности замкнутой формулы φ, содержащей константы лишь из E, определим понятие "формула φ истинна в E при состоянии БД r" (обозначение: $(E, r) \models \varphi$):

1) $(E, r) \models R_i(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, где $c_1, c_2, \ldots, c_m \in E$, тогда и только тогда, когда $\langle c_1, c_2, \ldots, c_m \rangle \in r_i$;

2) $(E, r) \models c_1 = c_2$ тогда и только тогда, когда c_1 совпадает с c_2;

3) $(E, r) \models \neg\varphi$ тогда и только тогда, когда неверно, что $(E, r) \models \varphi$;

4) $(E, r) \models (\varphi \wedge \psi)$ тогда и только тогда, когда $(E, r) \models \varphi$ и $(E, r) \models \psi$;

5) $(E, r) \models \exists x \varphi(x)$ тогда и только тогда, когда найдется $c \in E$, для которого $(E, r) \models \varphi(c)$.

Формулы, истинные в D, назовем истинными. Пишем $r \models \varphi$ вместо $(D, r) \models \varphi$. Ясно, что если E – конечное множество, то можно за конечное число шагов узнать, истинно ли φ в E при состоянии БД r.

Запросом называется выражение вида $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon \varphi(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)\}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – полный список параметров φ, а ответом на запрос является множество всех кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, для которых истинно $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется безопасной относительно состояния r, если конечно множество всех таких кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, для которых $r \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Формула называется абсолютно безопасной, если она безопасна относительно любого состояния БД.

Определение. Пусть в формуле $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ все параметры содержатся среди $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $E \supseteq D^r(\varphi)$, мощность множества $E \setminus D^r(\varphi)$ не меньше $d(\varphi)$. Будем говорить, что кортеж $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ E-согласован с $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ относительно $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если выполнены следующие условия: а) $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in E^n$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D^n$; б) если $a_i \in D^r(\varphi)$, то $b_i = a_i$; в) если $a_i \notin D^r(\varphi)$, то $b_i \in E \setminus D^r(\varphi)$; г) если x_i и x_j – специальные параметры φ, то $b_i \neq b_j$ тогда и только тогда, когда $a_i = a_j$.

Теорема. *Пусть все параметры формулы φ содержатся среди $x_1, x_2, \ldots, x_n$, E – конечное множество, $E \supseteq D^r(\varphi)$, мощность $E \setminus D^r(\varphi)$ не меньше $d(\varphi)$. Тогда для всякого кортежа $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D^n$ и для всякого кортежа $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, E-согласованного с $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ относительно $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следующие три условия эквивалентны:* а) $r \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; б) $r \models \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n)$; в) $(E, r) \models \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Таким образом, проверка истинности на бесконечном домене D сводится к проверке истинности на конечном домене E (так как по каждому кортежу можно эффективно найти E-согласованный с ним).

Следствие 1. *В обозначениях теоремы формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ безопасна относительно r тогда и только тогда, когда множество всех кортежей $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ таких, что $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in E^n$ и $(E, r) \models \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, включено в множество $(D^r(\varphi))^n$.*

Следствие 2. *По всякой формуле φ и по всякому состоянию БД можно эффективно выяснить, является ли φ безопасной относительно данного состояния БД.*

Отметим важный частный случай. Если φ не содержит знаков равенства, то $d(\varphi) = 1$, и если все константы формулы φ из D^r, то мощность области E не зависит от φ и можно положить $E = D^r \cup \{d\}$, где d – произвольный элемент из $D \setminus D^r(\varphi)$.

Следствие 3. *Если БД B содержит хотя бы одно отношение местности не меньшей 2, то проблема распознавания абсолютной безопасности формул неразрешима (даже для формул, не содержащих знаков равенства).*

Доказательство этого следствия опирается на результаты работ [4, 5] о неразрешимости множества формул исчисления предикатов, общезначимых на всех конечных областях.

Легко заметить, что множество всех кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, что данный кортеж $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in E^n$ E-согласован относительно $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, разрешимо, причем разрешающий алгоритм весьма прост. Отсюда ответ на любой запрос $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ будет разрешимым множеством, допускающим явную финитную запись. Действительно, возьмем $E = D^r(\varphi) \cup \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, где $k = d(\varphi)$ и $d_i \notin D^r(\varphi)$ для всех i. Найдем область истинности M формулы φ относительно E. Искомым ответом на запрос будет множество всех кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, с которыми согласован некоторый кортеж из M. Это множество, ввиду конечности M и предыдущего замечания разрешимо, причем если $M \subseteq (D^r(\varphi))^n$ (что легко проверяется), то оно совпадает с M, в противном случае это множество бесконечно.

Таким образом, так называемые "опасные" формулы не доставляют дополнительных трудностей, так как встречающиеся при их обработке бесконечные множества естественно записываются в конечном виде, позволяющим эффективно находить область истинности таких формул, т.е. все запросы являются конструктивными в естественном смысле. Результаты настоящей работы легко обобщаются на случай, когда для домена, являющегося натуральным рядом, наряду с равенством допускается предикат "меньше".

Идеи настоящей работы могут быть применены также для реализации языков запросов над конечными, но очень большими доменами, когда актуальная область не исчерпывает всего домена.

Филиал Института проблем кибернетики
Академии наук СССР
Переславль-Залесский, Ярославской обл.

Поступило
29 VII 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ульман Дж.* Основы систем баз данных. М.: Финансы и статистика, 1983, 334 с. 2. *Mayer D.* The theory of relational data bases. Computer Science Press, 1983, 613 p. 3. *Борщев В.Е.* – Семиотика и информатика, 1981, вып. 16, с. 78–122. 4. *Трахтенброт Б.А.* – ДАН, 1950, т. 70, № 4. с. 569–572. 5. *Vaught R.* – J. symbolic logic, 1959, v. 24, p. 1–15.

УДК 62–50

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Академик С.В. ЕМЕЛЬЯНОВ, С.К. КОРОВИН, И.Г. МАМЕДОВ

МЕТОД КВАЗИРАСЩЕПЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. При синтезе систем автоматического управления (САУ) объектами высокой размерности широкое применение находят методы, основанные на понижении порядка динамических систем (ДС). К настоящему времени разработано значительное число таких методов с различными областями наиболее эффективного применения. При определенной специфике объекта весьма полезными оказываются методы сравнения и векторных функций Ляпунова [1], интегральных многообразий [3], точечных отображений [4], агрегирования и декомпозиции [5], сингулярных возмущений [2].

В заметке описывается метод квазирасщепления (МКР), относящийся к упомянутой выше группе методов. Особенность МКР в том, что он применим к регулируемой ДС еще до выбора функции управления и при ограниченной информации о характеристиках объекта, допускает наглядную геометрическую интерпретацию и позволяет детально исследовать свойства всех решений в замкнутой САУ.

Содержание МКР определяет преобразование исходной ДС к совокупности связанных ДС меньшей размерности и условий, при которых взаимовлияние ДС в надлежащем смысле мало. Это позволяет свести исследование ДС к рассмотрению совокупности независимых ДС меньшей размерности. Синтез САУ в рамках МКР состоит в выборе управления из класса допустимых управлений, при котором упомянутые выше условия выполняются.

2. Описание МКР. Суть МКР поясним на примере регулируемой ДС вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t, x), \quad t \in \mathfrak{I}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{I} = [t_0, \infty)$, t_0 – начальный момент времени; $x: \mathfrak{I} \to Q \subseteq \mathbf{R}^n$, Q – область, содержащая точку O_n – начало $\mathbf{R}^n$; $A: \mathfrak{I} \to \mathbf{R}^{n \times n}$, $B: \mathfrak{I} \to \mathbf{R}^{n \times m}$ – равномерно ограниченные