также будут различаться только в порядке ε^{N+1}. Отсюда и из (18) следует, что в результате замены (15) равенство (13) преобразуется к виду

$$\xi=y_0(T_0\sigma)+\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k\xi_k(\sigma)+\varepsilon^{N+1}\Delta_4(\tau,\ \sigma,\ \varepsilon), \tag{19}$$

а уравнение (14) принимает вид

$$\frac{d\sigma}{d\tau}=\varepsilon[1/(T_0+\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k T_k)+\varepsilon^{N+1}\Delta_5(\tau,\ \sigma,\ \varepsilon)]. \tag{20}$$

Лемма 2. *При условии 2 система (12) имеет экспоненциально устойчивое инвариантное интегральное многообразие (13) с уравнением (14) на нем, причем асимптотику правых частей (13), (14) доставляют формулы (15), (19), (20).*

Возвращаясь к системе (4), из лемм 1 и 2 выводим следующее утверждение.

Теорема. *При выполнении условий 1, 2 система (4) имеет экспоненциально орбитально устойчивый двумерный инвариантный тор (6), (13), уравнения на котором — второе уравнение (7) и уравнение (14).*

Литература

1. Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В. // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 2. С. 255—258.
2. Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В. // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 3. С. 537—540.
3. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 169. С. 99—118.
4. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., 1973.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.

Ярославский государственный университет,
Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию 6 декабря 1988 г.

УДК 517.983.24

В. Л. КОЛЯДИН, В. Ф. КРАВЧЕНКО

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ КОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

1. Постановка задачи. Рассмотрим операторное уравнение

$$Lu+\xi=f,\quad u\in\mathcal{U};\quad \xi,\ f\in\mathcal{F}, \tag{1}$$

где $L:\mathcal{U}\to\mathcal{F}$ — линейный оператор полного ранга; $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ — сепарабельные гильбертовы пространства; ξ — элемент из $\mathcal{F}$, отражающий неточность знания правой части f. Наблюдаемой является ортогональная в $\mathcal{F}$ проекция f_n правой части уравнения (1) на n-мерное подпространство $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}$:

$$f_n=P_nf;\quad f_n\in\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}. \tag{2}$$

Здесь $P_n:\mathcal{F}\to\mathcal{F}_n$ — ортопроектор в $\mathcal{F}$. Соотношение (2) учитывает ограниченную наблюдаемость элементов $f\in\mathcal{F}$, имеющую место при решении обратных задач в силу специфики реальных измерительных процедур [1, с. 111].

Подстановка (1) в (2) приводит к результирующему уравнению

$$P_nLu+P_n\xi=f_n,\quad u\in\mathcal{U};\quad f_n\in\mathcal{F}_n, \tag{3}$$

которое даже при точно известной правой части $f_n (P_n \xi = 0)$ не имеет единственного решения. Требуется определить конечномерную линейную решающую процедуру (л. р. п.) $W_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$, обеспечивающую получение в некотором смысле оптимального приближенного решения уравнения (1).

Одним из наиболее распространенных способов получения приближенного решения уравнения (1) при заданном $\mathcal{F}_n$ служит [1—3] переход от (3) к конечномерному уравнению

$$P_n L u_n + P_n \xi = f_n, \quad u_n \in \mathcal{U}_n, \tag{4}$$

где последнее условие означает, что решение ищется на конечномерном подпространстве $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$. При таком подходе возникает проблема выбора подпространства $\mathcal{U}_n$, от которого существенно зависит решение u_n уравнения (4), используемое в качестве приближенного решения исходного операторного уравнения (1).

Таким образом, задача нахождения оптимальной линейной оценки $\hat{u} \in \mathcal{U}$ элемента $u \in \mathcal{U}$ при ограниченной наблюдаемости пространства $\mathcal{F}$ может быть редуцирована к задаче оптимального выбора подпространства $\mathcal{U}_n$ в приближенном уравнении (4).

2. Оптимальное согласование подпространств при точно известной правой части. Рассмотрим задачу решения результирующего уравнения (3) в детерминистской постановке, т. е. при $P_n \xi = 0$:

$$P_n L u_n = f_n, \quad u_n \in \mathcal{U}_n. \tag{5}$$

Уравнение (5) соответствует классической схеме проекционных методов в гильбертовых пространствах [2, 3], в которую укладываются различные конкретные численные методы решения операторных, дифференциальных, интегральных и т. д. уравнений [2].

Пусть u_p — точное решение уравнения (1), u_n — решение уравнения (5).

Определение. Пару подпространств $(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_n)$ назовем согласованной относительно оператора L (L-согласованной), если выполняется условие [4]

$$u_n = H_n u_p, \quad u_p \in \mathcal{U}, \quad u_n \in \mathcal{U}_n, \tag{6}$$

где $H_n : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_n$ — ортопроектор.

Таким образом, выбор подпространства $\mathcal{U}_n$ из условия L-согласованности пары $(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_n)$ обеспечивает совпадение приближенного решения u_n, полученного из (5), с ортогональной проекцией истинного решения u_p на выбранное подпространство.

Необходимое и достаточное для L-согласованности пары $(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_n)$ условие и явный вид связи подпространства определяются следующими теоремами [4].

Теорема 1. *Пара $(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_n)$ является L-согласованной в том и только том случае, когда выполняется условие*

$$\mathcal{U}_n = \Omega_n = (\ker (P_n L))^{\perp}, \tag{7}$$

где $(\ker (P_n L))^{\perp}$ — ортогональное в $\mathcal{U}$ дополнение к нуль-пространству оператора $P_n L : \mathcal{U} \to \mathcal{F}_n$.

Теорема 2. *Если $\Omega_n = (\ker (P_n L))^{\perp}$, $\mathcal{U}_n = \Omega_n$, то*

$$\mathcal{U}_n = L^* [\mathcal{F}_n], \tag{8}$$

где $L^* : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ — оператор, сопряженный с L.

Выбор $\mathcal{U}_n$ из условия L-согласованности пары $(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_n)$ обеспечивает наряду с (6) и другие полезные свойства приближенного решения u_n. Для дальнейшего рассмотрения нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть $\Omega_n = (\ker (P_n L))^{\perp}$, $\mathcal{U}_0 = \ker (P_n L)$, Θ — множество всех решений уравнения (3), т. е. $\Theta = \{u \in \mathcal{U} : P_n L u = f_n\}$. Тогда Θ может быть представлено в виде прямой суммы*

$$\Theta = u_{p\omega} \oplus \mathscr{U}_0, \tag{9}$$

где $u_{p\omega}$ — ортогональная в $\mathscr{U}$ проекция точного решения u_p уравнения (1) на подпространство Ω_n.

Доказательство. Пусть u — решение уравнения (3). Представим u в виде

$$u = u_\omega + u_0, \quad u_\omega \in \Omega_n; \quad u_0 \in \mathscr{U}_0, \tag{10}$$

где u_ω, u_0 — ортогональные в $\mathscr{U}$ проекции u на соответствующие подпространства. Подстановка (10) в (3) приводит к конечномерному уравнению $P_nLu_\omega = f_n$, $u_\omega \in \Omega_n$, которое в силу (6) и теоремы 1 имеет единственное решение $u_\omega = u_{p\omega}$. Поскольку $u_0 \in \ker(P_nL)$, то произвольный выбор второго слагаемого в (10) из подпространства $\mathscr{U}_0$ удовлетворяет (3). Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть u_n — решение уравнения (5), u' — нормальное решение уравнения (3), т. е.*

$$u' = \arg\min_u \{\|u\|^2 : P_nLu = f_n\}, \tag{11}$$

где $\|\cdot\|$ — гильбертова норма в $\mathscr{U}$. Тогда

$$u_n = u', \quad \forall f_n \in \mathscr{F}_n \tag{12}$$

в том и только том случае, когда пара $(\mathscr{U}_n, \mathscr{F}_n)$ является L-согласованной.

Доказательство. Поскольку в силу (11) $u' \in \Theta$, воспользуемся леммой 1 и представим $u \in \Theta$ в виде суммы ортогональных проекций на Ω_n и $\mathscr{U}_0$

$$u = u_{p\omega} + u_0, \quad u_{p\omega} \in \Omega_n; \quad u_0 \in \mathscr{U}_0,$$

где $u_{p\omega}$ однозначно зависит от f_n. В силу ортогональности Ω_n и $\mathscr{U}_0$ имеем $\|u\|^2 = \|u_{p\omega}\|^2 + \|u_0\|^2$. Минимум последнего выражения на Θ достигается при $u_0 = O$, где O — нулевой элемент в $\mathscr{U}$, т. е. $u' = u_{p\omega}$, $\forall f_n \in \mathscr{F}_n$. Тогда необходимым и достаточным для справедливости (12) является условие $u_n = u_{p\omega}$, $\forall f_n \in \mathscr{F}_n$, которое в силу теоремы 1 эквивалентно условию L-согласованности пары $(\mathscr{U}_n, \mathscr{F}_n)$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть u_p — точное решение уравнения (1), u_n — решение уравнения (5), u'' — минимаксное решение уравнения (3), т. е.*

$$u'' = \arg\min_{u \in \Theta} \max_{u_p \in \Theta} \{\|u - u_p\| : \|u_p\| \leqslant c\}, \tag{13}$$

где c — произвольная положительная константа. Тогда $u_n = u''$, $\forall f_n \in \mathscr{F}_n$ в том и только том случае, когда пара $(\mathscr{U}_n, \mathscr{F}_n)$ является L-согласованной.

Доказательство использует теорему 3 и сводится к доказательству эквивалентности (11) и (13).

Таким образом, выбор подпространства $\mathscr{U}_n$ из доказанного условия (8) обеспечивает совпадение приближенного решения с проекцией точного решения на выбранное подпространство, а также с минимаксным и нормальным решением уравнения (3) при $P_n\xi = 0$.

Наиболее распространенные в теории проекционных методов способы согласования подпространств $\mathscr{U}_n$ и $\mathscr{F}_n$ определяются соотношениями

$$\mathscr{F}_n = L[\mathscr{U}_n], \tag{14}$$

$$\mathscr{U}_n = \mathscr{F}_n. \tag{15}$$

Очевидно, что в общем случае ни (14), ни (15) не эквиваленты условию (8), необходимому и достаточному для L-согласованности пары $(\mathscr{U}_n, F_n)$. Представляет интерес определить, в каких случаях (14), (15) равносильны (8).

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{F}_n = L[\mathscr{U}_n]$. Тогда пара $(\mathscr{U}_n, \mathscr{F}_n)$ является*

L-согласованной в том и только том случае, когда подпространство $\mathcal{U}_n$ инвариантно относительно оператора $L^*L : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

Доказательство. Поскольку L^* — оператор полного ранга в силу невырожденности L, то (14) эквивалентно соотношению $L^*[\mathcal{F}_n] = L^*L[\mathcal{U}_n]$. Подстановка необходимого и достаточного в силу теорем 1, 2 условия L-согласованности (8) в последнее выражение дает $\mathcal{U}_n = L^*L[\mathcal{U}_n]$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{F}_n = \mathcal{U}_n$. Тогда пара $(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}_n)$ является L-согласованной в том и только том случае, когда подпространство $\mathcal{F}_n$ инвариантно относительно оператора $L^* : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$.*

Теорема доказывается подстановкой (15) в (8).

Таким образом, традиционные методы согласования подпространств $\mathcal{U}_n$ и $\mathcal{F}_n$, определяемые соотношениями (14) и (15), в общем случае не могут обеспечить совпадение приближенного решения с проекцией точного решения на выбранное подпространство. Необходимым и достаточным для такого совпадения условием является (8).

3. Статистически оптимальное согласование подпространств при случайных ошибках в данных. Рассмотрим задачу оптимального решения уравнения (3) в статистической постановке. Будем считать элементы $u \in \mathcal{U}$ и $\xi \in \mathcal{F}$ слабыми случайными величинами [1, с. 20—23] в соответствующих гильбертовых пространствах, обладающими нулевым первым моментом и корреляционными операторами $R_u : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и $R_\xi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ соответственно.

Требуется определить конечномерную л. р. п. $W_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$, оптимальную в смысле минимума функционала ошибки

$$\Phi(W_n) = \mathrm{M}\|u - W_n f_n\|^2, \quad W_n \in \mathcal{W}_n, \tag{16}$$

где M — оператор математического ожидания, u — истинное решение, $\mathcal{W}_n$ — множество всех л. р. п. $W_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$ ранга не выше n. Преобразуем (16) с учетом (3) и сделанных предположений относительно u и ξ к виду

$$\Phi(W_n) = \mathrm{tr}\,(W_n P_n (R_\xi + L R_u L^*) P_n W_n^* - 2 W_n P_n L R_u + R_u), \tag{17}$$

где tr — след оператора, $*$ — знак сопряженного оператора.

Теорема 7. *Минимум функционала ошибки $\Phi(\cdot)$ на множестве $\mathcal{W}_n$ достигается на элементе*

$$W_{n\,\mathrm{opt}} = R_u L^* P_n (P_n (R_\xi + L R_u L^*) P_n)^{-1}, \tag{18}$$

где $(\cdot)^{-1}$ — обратный оператор.

Доказательство. Воспользуемся известным из [1, с. 97] приемом. Введем обозначение $T_n = P_n (R_\xi + L R_u L^*) P_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$. В силу сделанных предположений T_n — положительный самосопряженный оператор. Определим линейный положительный самосопряженный оператор S_n, действующий в пространстве $\mathcal{L}_{HS}(\mathcal{F}_n, \mathcal{U})$ операторов Гильберта — Шмидта:

$$S_n(W_n) = W_n T_n \in \mathcal{L}_{HS}(\mathcal{F}_n, \mathcal{U}).$$

Тогда функционал (17) можно записать так:

$$\Phi(W_n) = [S_n W_n, W_n]_{HS} - 2[W_n, R_u L^* P_n]_{HS} + \mathrm{tr}\,(R_u), \tag{19}$$

где $[\cdot\ \cdot]_{HS}$ — скалярное произведение в $\mathcal{L}_{HS}(\mathcal{F}_n, \mathcal{U})$. Согласно [1, с. 97], точная нижняя грань функционала (19) достигается на элементе $S_n^{-1}(R_u L^* P_n) = R_u L^* P_n T_n^{-1}$, что с учетом определения T_n соответствует (18). Теорема доказана.

Пусть $W_o : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ — оптимальная по критерию минимума среднего значения нормы ошибки л. р. п. для уравнения (1). В [1] доказано, что

$$W_o = R_u L^* (R_\xi + L R_u L^*)^{-1}, \tag{20}$$

и введена конечномерная проекция W_{no} оптимальной л.р.п. $W_o: W_{no} = W_o P_n : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$.

Л.р.п. W_{no} можно рассматривать как конечномерную л.р.п. $W_{no}: \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$, поскольку $W_{no}: \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ совпадает со своим сужением на $\mathcal{F}_n$. Определим необходимое и достаточное для оптимальности W_{no} на множестве $\mathcal{W}_n$ условие. Для этого нам понадобятся две леммы.

Лемма 2. *Необходимым для оптимальности конечномерной л. р. п. $W_n: \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$ является условие*

$$\mathrm{Ran}\,(W_n) = R_u L^* [\mathcal{F}_n], \tag{21}$$

где Ran — *множество значений оператора.*

Лемма 3. *Достаточным условием оптимальности на множестве $\mathcal{W}_n$ проекции $W_{no}: \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$ оптимальной для уравнения (1) л. р. п. $W_o: \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ является инвариантность подпространства $\mathcal{F}_n$ относительно оператора $R_\xi + L R_u L^*: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.*

При доказательстве лемм 2 и 3 используется теорема 7.

Теорема 8. *Пусть $R_u: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — строго положительный оператор. Тогда конечномерная проекция $W_{no}: \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$ оптимальной для уравнения (1) л. р. п. $W_o: \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ определяет оптимальную в $\mathcal{W}_n$ конечномерную л. р. п. в том и только том случае, когда подпространство $\mathcal{F}_n$ инвариантно относительно оператора $R_\xi + L R_u L^*: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.*

Необходимость следует из леммы 2 и невырожденности оператора $R_u L^*: \mathcal{F} \to \mathcal{U}$, а достаточность — из леммы 3.

Таким образом, построение конечномерной л. р. п. $W_n: \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$ путем сужения оптимальной л. р. п. $W_o: \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ на подпространство $\mathcal{F}_n$ в общем случае не обеспечивает оптимальности полученной конечномерной л. р. п.

Конечномерным приближенным решением уравнения (1), порожденным подпространством $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$, следуя [1, с. 112], будем называть решение уравнения

$$L_n u_n + \xi_n = f_n, \quad u_n \in \mathcal{U}_n; \quad \xi_n = P_n \xi \in \mathcal{F}_n, \tag{22}$$

где $L_n = P_n L Q_n : \mathcal{U}_n \to \mathcal{F}_n$ — сужение оператора L на подпространства $\mathcal{U}_n$, $\mathcal{F}_n$, $Q_n: \mathcal{U} \to \mathcal{U}_n$ — ортопроектор на $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$.

Лемма 4. *Статистически оптимальной для уравнения (22) конечномерной л. р. п. из множества $\{W_n: \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}_n\}$ является л. р. п. вида*

$$W_n(\mathcal{F}_n, \mathcal{U}_n) = R_{un} L_n^* (R_{\xi n} + L_n R_{un} L_n^*)^{-1}, \tag{23}$$

где $R_{\xi n}: \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$ и $R_{un}: \mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n$ — сужения операторов R_ξ, R_u на подпространства $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{U}_n$ соответственно.

Лемма доказывается аналогично теореме 7 с заменой пространства операторов Гильберта — Шмидта $\mathcal{L}_{HS}(\mathcal{F}_n, \mathcal{U})$ на его подпространство $\mathcal{L}'_{HS}(\mathcal{F}_n, \mathcal{U}_n)$.

Переход от уравнения (3) к приближенному конечномерному уравнению (22) — наиболее распространенный конструктивный метод решения операторных уравнений. При таком подходе возникает неопределенность относительно выбора подпространства $\mathcal{U}_n$, существенно влияющего на вид приближенного решения. Необходимое и достаточное для оптимальности л. р. п. $W_n(\mathcal{F}_n, \mathcal{U}_n)$ на множестве $\{W_n: \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}\}$ условие определяется следующей теоремой.

Теорема 9. *Конечномерная л. р. п. $W_n(\mathcal{F}_n, \mathcal{U}_n)$, задаваемая соотношением (23), статистически оптимальна на множестве $\mathcal{W}_n = \{W_n: \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}\}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\mathcal{U}_n = R_u L^* [\mathcal{F}_n]. \tag{24}$$

Необходимость следует непосредственно из леммы 2. Достаточность доказывается сопоставлением $W_n(\mathcal{F}_n, \mathcal{U}_n)$ при $\mathcal{U}_n$, удовлетворяющем (24), с оптимальной для уравнения (3) конечномерной л. р. п. $W_{n\,\mathrm{opt}}: \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$, определяемой теоремой 7.

Обычно в (22) полагают [1, с. 112]

$$\mathcal{F}_n = L[\mathcal{U}_n]. \tag{25}$$

Теорема 10. *Пусть пара ($\mathcal{U}_n$, $\mathcal{F}_n$) удовлетворяет (25). Тогда оптимальная для конечномерного приближенного уравнения (22) л. р. п. $W_n(\mathcal{F}_n, \mathcal{U}_n)$ является оптимальной для уравнения (3) конечномерной л. р. п. в том и только том случае, когда подпространство $\mathcal{F}_n$ инвариантно относительно оператора $LR_uL^* : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.*

Доказательство проводится с использованием теоремы 9 подстановкой (24) в (25).

Таким образом, традиционный способ согласования подпространств $\mathcal{U}_n$ и $\mathcal{F}_n$ при решении приближенного уравнения (22) в общем случае не позволяет получить статистически оптимальное решение уравнения (3). К тому же при заданном подпространстве $\mathcal{F}_n$ (25) не определяет конструктивную процедуру выбора подпространства $\mathcal{U}_n$, поскольку требует обращения оператора $L : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$. Статистически оптимальным является выбор подпространства $\mathcal{U}_n$ из доказанного выше условия (24). Заметим, что в случае $R_u = E$, где E — тождественный оператор в $\mathcal{U}$, условие (24) совпадает с необходимым и достаточным условием L-согласованности пары ($\mathcal{U}_n$, $\mathcal{F}_n$), которое определяется соотношением (8).

Использование функционала ошибки (16) при анализе качества л. р. п. затруднительно в силу следующего обстоятельства.

Утверждение 1. *Необходимым условием существования конечномерной л.р.п. $W_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$ с конечным значением функционала ошибки $\Phi(\cdot)$ является ядерность (конечность следа) корреляционного оператора априорного распределения R_u.*

Справедливость утверждения следует из (17).

Введем в рассмотрение функционал качества л. р. п. вида

$$G(W_n) = \Phi(Z) - \Phi(W_n), \tag{26}$$

где $Z : \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$ — тривиальная л. р. п.: $Z = O$. Здесь O — нулевой элемент в $\mathcal{U}$.

Утверждение 2.

$$\arg \min_{W_n \in \mathcal{W}_n} \Phi(W_n) = \arg \max_{W_n \in \mathcal{W}_n} G(W_n).$$

Справедливость утверждения следует из (17), поскольку

$$\Phi(Z) = \mathrm{tr}\,(R_u). \tag{27}$$

Определим явный вид функционала качества $G(\cdot)$ путем подстановки (17), (27) в (26):

$$G(W_n) = \mathrm{tr}\,(2W_nP_nLR_u - W_nP_u(R_\xi + LR_uL^*)P_nW_n^*). \tag{28}$$

Поскольку оба слагаемых в круглых скобках соотношения (28) — операторы конечного ранга, справедливо следующее

Утверждение 3. *Для любой конечномерной л. р. п. $W_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$ функционал качества $G(\cdot)$ имеет конечное значение независимо от вида оператора R_u.*

Утверждение 4. *Пусть $W_{n\,\mathrm{opt}}$ — оптимальная для уравнения (3) конечномерная л. р. п. Тогда*

$$G(W_{n\,\mathrm{opt}}) = \mathrm{tr}\,(W_{n\,\mathrm{opt}}P_nLR_u) = \mathrm{tr}\,(R_uL^*P_n(P_n(R_\xi + LR_uL^*)P_n)^{-1}P_nLR_u).$$

Утверждение доказывается прямой подстановкой (18) в (28).

Величина потерь в смысле уменьшения значения функционала качества $G(\cdot)$ при использовании произвольной конечномерной л. р. п. определяется следующей теоремой.

Теорема 11. *Пусть $W_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{U}$ — произвольная конечномерная л. р. п. Тогда*

$$G(W_{n\,\mathrm{opt}})-G(W_n)=\mathrm{tr}\,(D_nP_n(R_\xi+LR_uL^*)P_nD_n^*),$$

где $D_n=W_n-W_{n\,\mathrm{opt}}:\mathcal{F}_n\to\mathcal{U}$.

При доказательстве теоремы используется утверждение 4 и соотношение (28).

4. Заключение. 1. Использование проекционных методов для решения операторных уравнений при конечной размерности данных требует оптимального согласования подпространства решений $\mathcal{U}_n$ с подпространством наблюдений $\mathcal{F}_n$. В детерминистской постановке, соответствующей случаю точно известной проекции правой части исходного уравнения на подпространство наблюдений, оптимальным является выбор подпространства $\mathcal{U}_n$ из соотношения $\mathcal{U}_n=L^*[\mathcal{F}_n]$. Доказано, что в этом и только в этом случае приближенное решение совпадает с проекцией точного решения на выбранное подпространство и является нормальным и минимаксным решением результирующего уравнения (3).

2. Традиционные способы согласования подпространств $\mathcal{U}_n$ и $\mathcal{F}_n$ из соотношений $\mathcal{F}_n=L[\mathcal{U}_n]$, $\mathcal{F}_n=\mathcal{U}_n$ в общем случае указанными свойствами оптимальности не обладают. Определены необходимые и достаточные для их оптимальности условия.

3. При статистической постановке задачи оптимальным по критерию минимума среднего квадрата нормы ошибки является согласование подпространств согласно соотношению $\mathcal{U}_n=R_uL^*[\mathcal{F}_n]$. При этом доказано, что используемое в литературе условие согласования $\mathcal{F}_n=L[\mathcal{U}_n]$ в общем случае статистически не оптимально.

4. Найденные условия оптимального в детерминистской и статистической постановках задачи согласования подпространств в отличие от традиционно используемого условия согласования $\mathcal{F}_n=L[\mathcal{U}_n]$ определяют соответствующие конструктивные процедуры выбора $\mathcal{U}_n$ при заданном $\mathcal{F}_n$, поскольку не требуют обращения оператора L.

5. Построение конечномерной л. р. п. путем сужения статистически оптимальной для исходного уравнения (1) л. р. п. на подпространство $\mathcal{F}_n$ в общем случае не позволяет получить статистически оптимальную конечномерную л. р. п. для результирующего уравнения (3).

Литература

1. Федотов А. М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск, 1982.
2. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.
3. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
4. Колядин В. Л., Кравченко В. Ф. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296, № 5. С. 1050—1052.

Харьковский авиационный институт им. Н. Е. Жуковского

Поступила в редакцию 10 ноября 1988 г.

УДК 517.929

Р. Г. КОПЛАТАДЗЕ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВАМИ A И B

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u^n(t)+f(t,\ u(\tau_1(t)),\ \ldots,\ u(\tau_m(t)))=0, \tag{0.1}$$

где $n\geqslant 2$, функции $\tau_i:R_+\to R$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$ непрерывны и $\lim\limits_{t\to+\infty}\tau_i(t)=$