

ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В. И. Питербарг

ВВЕДЕНИЕ

За последнее время теория гауссовских процессов получила значительное развитие. В большой степени это связано с изучением свойств выборочных функций (траекторий) процессов. Настоящий обзор посвящен в основном работам, вышедшим в последние 3—5 лет и относящимся к локальным свойствам траекторий, поведению траекторий в равномерной метрике, свойствам множеств уровня гауссовских процессов и полей. В нем содержатся также некоторые новые результаты. Более ранним (в основном зарубежным) работам по этой тематике посвящен сборник [68]. Другие вопросы, так или иначе связанные с современным состоянием обширной в настоящее время теории гауссовских распределений, освещены в монографиях [8, 14, 59, 70, 78].

Выражаю благодарность В. Р. Фаталову за помощь в составлении библиографии.

Гауссовским процессом $X(t)$, $t \in T$, мы будем называть случайную функцию на произвольном параметрическом множестве T с гауссовскими конечномерными распределениями. В случае, когда $T \subseteq R_n$, $n \geq 2$, будем иногда употреблять термин «поле». Обозначим $m_x(t) = MX(t)$, $r_x(t, s) = \text{cov}(X(t), X(s))$, $d_x(t, s) = (M(X(t) - X(s))^2)^{1/2}$, $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ — ковариация. Через I_C будем обозначать индикаторную функцию множества (события).

§ 1. МЕТОД СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГАУССОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть в евклидовом пространстве R_n заданы две действительные гауссовские меры P_0 и P_1 с нулевыми средними и ковариационными матрицами $\mathcal{R}_0 = \|r_{ij0}\|$ и $\mathcal{R}_1 = \|r_{ij1}\|$ соответственно. Матрица $\mathcal{R}_h = h\mathcal{R}_1 + (1-h)\mathcal{R}_0 = \|r_{ijh}\|$, $0 \leq h \leq 1$, также является ковариационной. Действительно, если X_0 и X_1 — гауссовские независимые векторы с распределениями

P_0 и P_1 , то вектор $\sqrt{h}X_1 + \sqrt{1-h}X_0$ также гауссовский с ковариационной матрицей \mathcal{R}_h .

Тождество сравнения. Если для некоторой функции $f: R_n \rightarrow R_1$ существует константа C такая, что $M_\nu |\partial^2 f(X)/\partial x_i \partial x_j| < C$ и $M_\nu |f| < C$, $i, j = 1, \dots, n$, $\nu = 0, 1$, то

$$M_1 f(X) - M_0 f(X) = \frac{1}{2} \int_0^1 M_h \nabla^\top (\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_0) \nabla (f)(X) dh, \quad (1.1)$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, M_h — математическое ожидание относительно меры P_h , \top — знак транспонирования.

Это соотношение следует из формулы дифференцирования сложных функций и из факта, что гауссовская плотность удовлетворяет уравнению теплопроводности (В случае отсутствия плотности у P_ν необходимо приблизить ее распределением с плотностью). Подробные доказательства тождеств, аналогичных (1.1) имеются в нескольких работах. (Например, [73, 141]). Впервые же прием дифференцирования гауссовской плотности по ковариации с переходом затем к производной по пространственным переменным встречается, видимо, у Плэкета [133], при оценивании функции многомерного нормального распределения. Позднее появилось довольно много работ по оцениванию многомерных нормальных интегралов, использующих этот прием (см. обзор [39]).

Различные способы оценивания правой части (1.1) приводят к различным утверждениям относительно соотношения между $M_1 f$ и $M_0 f$.

Теорема 1.1. Пусть для функции $f: R_n \rightarrow R$ имеет место соотношение $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \geq 0$ для всех $x \in R_n$ и тех i, j , что $r_{i,j1} \geq r_{i,j0}$. Если $r_{i,j1} = r_{i,j0}$ для остальных i, j , то $M_1 f(X) \geq M_0 f(X)$.

Заметим, что в утверждении теоремы 1.1 не участвуют ни производные функции f , ни размерность n . Стандартными способами приближая множество $\{\inf_T x(t) \geq u\}$ функциями, для которых имеет место теорема 1.1, получаем следующее утверждение, носящее название теоремы Слепяна.

Теорема 1.2 [137]. Пусть $X_1(t)$ и $X_0(t)$ — гауссовские сепарабельные функции с нулевыми средними на некотором параметрическом множестве T . Тогда, если $MX_1(t)^2 \equiv MX_0(t)^2$, $t \in T$, и $r_1(t, s) \geq r_0(t, s)$, $(t, s) \in T \times T$, $r_\nu(t, s) = MX_\nu(t)X_\nu(s)$, то

$$P(\sup_T X_1(t) \leq u) \geq P(\sup_T X_0(t) \leq u).$$

Впервые факт монотонности вероятности выхода по корреляционной функции гауссовского процесса в одном частном слу-

чае заметил А. Д. Вентцель (см. Беляев Ю. К., Свойства выборочных функций гауссовских процессов. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, МИАН СССР, 1959).

Применяя теорему 1.1 для вогнутой (вначале гладкой) возрастающей функции $g: R_+ \rightarrow R_+$, $f = g(\max_{i,j} (x_i - x_j))$, и группируя в правой части (1.1) (j, j) -й, (i, j) -й, (i, i) -й и (j, i) -й члены, после некоторых преобразований получаем следующее утверждение:

Теорема 1.3. (Ферник [73]). Если для всех i, j $d_0(i, j) \leq d_1(i, j)$, то для любой вогнутой возрастающей функции $g: R_+ \rightarrow R_+$

$$M_0 g(\max_{i,j} (X_i - X_j)) \leq M_1 g(\max_{i,j} (X_i - X_j)).$$

Нетрудно показать, что отсюда следует, что в условиях теоремы $M_0(\max_i X_i) \leq M_1(\max_i X_i)$.

Естественно попытаться использовать соотношение (1.1) для оценки близости распределений P_1 и P_0 в том или ином смысле. Первым результатом в этом направлении является неравенство Бермана [81]:

Теорема 1.4. Пусть $r_{ii} \equiv r_{i0} \equiv 1$, $r_{ij0} = 0$, $i \neq j$, $|r_{ij1}| < 1$, $i \neq j$. Тогда для любого u

$$\begin{aligned} & |P_1(\max_k X_k \leq u) - P_0(\max_k X_k \leq u)| \leq \\ & \leq \sum_{i>j} |r_{ij1}| \int_0^1 \varphi(u, u, hr_{ij1}) dh, \end{aligned}$$

где $\varphi(x, y, r)$ — двумерная гауссовская плотность с нулевыми средними, единичными дисперсиями и ковариацией r .

Это неравенство можно доказать и непосредственно, так же, как и (1.1) (такое доказательство содержится в [81]), однако оно также является следствием (1.1).

Более точное использование тождества (1.1) позволяет обобщить неравенство теоремы 1.4 на весьма широкий класс событий. Пусть имеется последовательность чисел u_{ik} , $i=1, 2, \dots$, $k=1, \dots, n$, и A — произвольное событие из σ -алгебры \mathfrak{A} , порожденной событиями вида $\{X_i \leq u_{ik}\}$. Обозначим через \bar{A} событие $AU(U\{X_i = u_{ik}\})$. Очевидно, оно имеет ту же вероятность (но не обязательно принадлежит \mathfrak{A}).

Теорема 1.5 [52, 53]. Если $r_{kkl} \equiv r_{kko} = 1$, то

$$P_1(A) - P_0(A) = \sum_{k>l, k, l=1, \dots, n} (r_{kkl} - r_{klo}) \sum_{i, j=1, 2, \dots, n} \int_0^1 \varphi(u_{lk}, u_{jl}, r_{kln}) \times$$

$$\times \sum_{\nu=1, \mu=1}^{22} (-1)^{\nu+\mu} P_h(\bar{A} \cap ((-1)^\nu (X_h - u_{ih}) \geq 0, (-1)^\mu (X_l - u_{jl}) \geq 0) | X_h = u_{ih}, X_l = u_{jl}) dh.$$

В то время как в теоремах 1.2 и 1.3 переход к непрерывному времени, и вообще к произвольному параметрическому множеству не составляет труда, с теоремами 1.4 и 1.5 дело обстоит иначе. Неравенство из теоремы 1.4 для этой цели подходит плохо, так как при увеличении размерности вектора X и возрастании зависимости между его соседними координатами трудно ожидать ограниченности правой части этого неравенства. Несмотря на это, неравенство Бермана с успехом применялось различными авторами и в непрерывном времени. Более точные оценки можно извлечь из теоремы 1.5, правда, требуя гладкость исходного процесса (или поля). Такие оценки получены в [53, 54]. Рассмотрим один из результатов.

Пусть $X_1(t)$, $X_0(t)$, $t \in R_n$, — гауссовские случайные поля с нулевыми средними и ковариационными функциями $r_\nu(t, s)$, $\nu=1, 0$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(1) $r_1(t, t) \equiv r_0(t, t) \equiv 1$, $M \nabla X_\nu (\nabla X_\nu)^T \equiv n^{-1} \Lambda_2$, Λ_2 — унитарная, не зависящая от t , матрица;

(2) Поля $X_\nu(t)$, $\nu=0, 1$, трижды дифференцируемы в среднем квадратическом;

(3) Все конечномерные распределения полей $X_\nu(t)$, $\nu=0, 1$, имеют плотность.

Не ограничивая общности, нам удобно будет считать, что поля X_1 и X_0 независимы. Обозначим $X_h = \sqrt{h} X_1 + \sqrt{1-h} X_0$, $0 \leq h \leq 1$. Очевидно, что для X_h выполнены условия (1), (2), (3). Пусть $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \zeta_n$ — независимые гауссовские величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Положим

$$\zeta_n(t) = \zeta(t_1, \dots, t_n) = n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \zeta_k \cos t_k + \eta_k \sin t_k.$$

Если $X_0(t) = \zeta_n(t)$ и $\Lambda_2 = I$ — единичная матрица, то для $X_h(t)$ выполнены условия (1)–(2), а условие (3) выполнено при $h > 0$. Индекс h у X_h будем опускать. Если e — вектор, то через $X'_e(t)$ будем обозначать производную поля $X(t)$ по направлению e . Векторы основного базиса обозначим через e_1, \dots, e_n . Обозначим $Y_{t,s}^{k,l} = (X(t), X(s), X'_{e_1}(t), \dots, X'_{e_l}(t), X'_{e_1}(s), \dots, X'_{e_k}(s))$.

Лемма 1.1. Если для изотропного поля $X(t)$ выполнены условия (1)–(3), то при $t \rightarrow s \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} D &= \det MY_{t,s}^{k,l} (Y_{t,s}^{k,l})^\top = \\ &= K_1 |t-s|^{(k \wedge l + 3) \cdot 2} (1 + o(1)), \quad t-s \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{k \wedge l})^*, \\ &= K_2 |t-s|^m (1 + o(1)), \quad t-s \notin \mathcal{L}(e_1, \dots, e_{k \wedge l}), \end{aligned}$$

для некоторых $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $m < 2(k \wedge l + 3)$. Здесь $k \wedge l = \min(k, l)$.

Схема доказательства. Без ограничения общности можно считать, что $s=0$ и $k \leq l$. Рассмотрим случай, когда $t \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$. С помощью невырожденного линейного преобразования над e_1, \dots, e_n можно добиться, что $t = (t_1, 0, \dots, 0)$, а с помощью невырожденного линейного преобразования над $Y_{t,s}^{k,l}$ — что вид вектора $Y_{t,s}^{k,l}$ не изменится. Имеем $D^{-1/2} = (2\pi)^{\frac{k+l+2}{2}} p(0, 0, \dots, 0)$, где p — плотность рассматриваемого вектора. Далее,

$$p(0, \dots, 0) = (2\pi)^{-k-l-2} \int_{R^{k+l+2}} M e^{i \sum \lambda_j Y_j} d\lambda_1 \dots d\lambda_{k+l+2}, \quad (1.2)$$

где Y_j — координаты вектора $Y_{t,s}^{k,l}$. По формуле Тейлора

$$Y_1 = X(t) = X(0) + X'_{e_1}(0) t_1 + \frac{1}{2} X''_{e_1 e_1}(0) t_1^2 + \frac{1}{6} (X'''_{e_1 e_1 e_1} + o(1)) t_1^3,$$

(здесь и далее все $o(1)$ понимаются в среднем квадратическом)

$$Y_3 = X'_{e_1}(t) = X'_{e_1}(0) + X''_{e_1 e_1}(0) t_1 + \frac{1}{2} (X'''_{e_1 e_1 e_1}(0) + o(1)) t_1^2,$$

$$Y_{2+j} = X'_{e_j}(t) = X'_{e_j}(0) + (X''_{e_1 e_j}(0) + o(1)) t_1, \quad j=2, \dots, l.$$

Вектор $(X(0), X'_{e_1}(0), \dots, X''_{e_1 e_1}(0) + o(1))$ имеет при достаточно малых t невырожденное распределение. Подставив полученные выражения для Y_j в (1.2), и группируя подобные члены, получаем преобразование переменных в интеграле в правой части (1.2), якобиан которого равен $\frac{1}{12} t_1^{k \wedge l + 3}$. Случаи, когда $t \notin \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$, но $t \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_l)$, и $t \notin \mathcal{L}(e_1, \dots, e_l)$ рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 1.2. Пусть $X(t)$ — случайный процесс, $n=1$, удовлетворяющий условиям (1)–(3). Тогда для любых $l, k > 0$ найдутся $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $C < \infty$ такие, что при $0 < t \leq \varepsilon$

$$M((X'(0)^-)^k (X'(t)^+)^l | X(0) = X(t) = u) \leq C e^{-\rho u^a},$$

где $a^+ = \frac{1}{2}(a + |a|)$, $a^- = \frac{1}{2}(|a| - a)$.

* Символ $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$ означает линейное подпространство, натянутое на векторы e_1, \dots, e_k .

Доказательство. Воспользуемся неравенством Шварца, и затем оценим $M((X'(0))^{-2k} | X(0) = X(t) = u)$. Это выражение равно

$$\begin{aligned} M((X'(0))^{-2k} | X(0) = u, X'(0) = -\frac{1}{2} t(1 + o(1)) X''(0)) = \\ = M\left(\left(-\frac{1}{2} t(1 + o(1)) X''(0)\right)^{-2k} | X(0) = u\right) = \\ = \frac{t^{2k}}{2^{2k}} (1 + o(1)) \int_{-\infty}^{o(1)} p(y) \cdot y^{2k} dy, \end{aligned}$$

где $p(y)$ — условная нормальная плотность $X''(0)$ при условии $X(0) = u$. Простой подсчет показывает, что последнее выражение не превосходит величины $C (ut)^{2k} \exp\left(-\frac{u^2}{M(X''(0))^2 - 1 - \alpha(t)}\right)$, $\alpha(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$, откуда следует требуемое неравенство.

Лемма 1.3. В условиях леммы 1.1 для любых натуральных $k, l, j \leq n, i$ найдутся $\varepsilon > 0$ и $C < \infty$ такие, что при $|t - s| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} M((X''_{e_j}(t))^{-l} | Y_{t,s}^{k,l} = (u, u, x_1, x_2, \dots)) \leq \\ \leq C (|u|^l + |x_1|^l + |x_2|^l + \dots). \end{aligned}$$

Доказательство. Необходимо оценить условные дисперсию и среднее величины X''_{e_j} и воспользоваться нормальностью условного распределения. Для этого заметим, что условная дисперсия не превосходит безусловной, а математическое ожидание равно $m_1 u + m_2 x_1 + m_3 x_2 + \dots$, где

$$\begin{aligned} m_1 &= M(X''_{e_j} | Y_{t,s}^{k,l} = (1, 1, 0, \dots, 0)), \\ m_2 &= M(X''_{e_j} | Y_{t,s}^{k,l} = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)), \\ m_3 &= M(X''_{e_j} | Y_{t,s}^{k,l} = (0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)), \dots \end{aligned}$$

Применение как и в леммах 1.1, 1.2 формулы Тейлора дает ограниченность величин $m_1, m_2, \dots, m_{k+l+2}$.

Лемма 1.4. Пусть поле $X(t)$ удовлетворяет условиям (1), (2), (3), e_1, \dots, e_k и f_1, \dots, f_l — две произвольные системы, линейно независимых векторов и $e_0 = \frac{t-s}{|t-s|}$. Тогда найдутся $\varepsilon > 0, K < \infty$ и $C < \infty$ такие, что

$$\begin{aligned} P(X(t \pm \Delta e_i) \leq u, i=1, \dots, k, X(s \pm \Delta f_j) \leq u, j=1, \dots, l, \\ X(t + \Delta e_0) \leq u, X(s - \Delta e_0) \leq u | X(t) = X(s) = u) \leq \\ \leq \begin{cases} C \Delta^k \Delta^l |t-s|^{-k \wedge l - 2} e^{-\rho u^2} & \text{для } K \Delta < |t-s| \leq \varepsilon, \\ C \Delta^k \Delta^l & \text{для } |t-s| > \varepsilon, \end{cases} \end{aligned}$$

где число $\rho > 0$ зависит только от корреляционной функции поля $X(t)$.

Доказательство. С учетом условия $X(t) = X(s) = u$, воспользовавшись формулой Тейлора, имеем

$$(X(t \pm \Delta e_i) \leq u) = \left(\frac{\Delta}{2} (X''_{e_i e_i}(t) + o(1)) \leq X'_{e_i}(t) \leq \right. \\ \left. \leq -\frac{\Delta}{2} (X''_{e_i e_i}(t) + o(1)) \right),$$

где $o(\cdot)$ понимается в среднем квадратическом. Рассмотрим сначала случай, когда e_0 не зависит ни от системы $\{e_i\}$, ни от системы $\{f_i\}$. Обозначим через $p(x_0, y_0, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_l)$ условную плотность (при условии $X(t) = X(s) = u$) вектора

$$(X'_{e_0}(t), X'_{-e_0}(s), X'_{e_1}(t), \dots, X'_{e_k}(t), X'_{f_1}(s), \dots, X'_{f_l}(s), \\ X''_{e_1 e_1}(t), \dots, X''_{e_k e_k}(t), X''_{f_1 f_1}(s), \dots, X''_{f_l f_l}(s)).$$

Оцениваемая вероятность равна

$$\int_{-\infty}^{o(1)} dx_0 \int_{-\infty}^{o(1)} dy_0 \int_{-\infty}^{o(\Delta)} dz_1 \dots \int_{-\infty}^{o(\Delta)} dv_l \int_{\frac{\Delta}{2}(z_1+o(1))}^{-\frac{\Delta}{2}(z_1+o(1))} dx_1 \dots \int_{\frac{\Delta}{2}(v_l+o(1))}^{-\frac{\Delta}{2}(v_l+o(1))} dy_l p.$$

Произведем замену переменных $x_i' = \Delta x_i$, $i = 1, \dots, k$, $y_j' = \Delta y_j$, $j = 1, \dots, l$. Тогда вышеприведенное выражение имеет вид (пишем только изменившиеся интегралы):

$$\Delta^k \Delta^l \int_{-\infty}^{o(1)} dx_0 \dots \int_{z_1/2+o(1)}^{-z_1/2+o(1)} dx_1' \dots \int_{z_l/2+o(1)}^{-v_l/2+o(1)} dy_l' p. \quad (1.3)$$

Запишем p в виде

$$p(x_0, y_0) p(\Delta x_1', \dots, \Delta x_k', \Delta y_1', \dots, \Delta y_l' | x_0, y_0) \times \\ \times p(z_1, \dots, v_l | x_0, y_0, \Delta x_1', \dots, \Delta y_l') \leq \\ \leq p(x_0, y_0) \frac{(\det \text{cov}(X(t), X(s), X'_{e_0}(t), X'_{-e_0}(s)))^{1/2}}{(\det \text{cov}(X(t), X(s), X'_{e_0}(t), X'_{-e_0}(s), X'_{f_1}(t), \dots, X'_{f_l}(s)))^{1/2}} \times \\ \times p(z_1, \dots, v_l | x_0, y_0, \Delta x_1', \dots, \Delta y_l'). \quad (1.4)$$

Тогда интеграл в (1.3) не превосходит величины

$$D_1 \int_{-\infty}^{o(1)} dx_0 \int_{-\infty}^{o(1)} dy_0 p(x_0, y_0) \int_{-\infty}^{o(1)} \dots \int_{-\infty}^{o(1)} |z_1 \dots v_l| p(z_1, \dots, v_l | x_0, \\ y_0, \Delta x_1', \dots, \Delta y_l') dz_1' \dots dv_l',$$

D_1 — дробь в (1.4). Пользуясь неравенством

$$|z_1 \dots v_l| \leq \frac{|z_1|^{k+l} + \dots + |v_l|^{k+l}}{k+l}$$

и тем, что математическое ожидание величины $X_{e_i e_j}$ (или $X_{i,j}^n$) по плотности $p(z|x_0, y_0, 0, \dots, 0)$ в интеграле равно $\sum_i m_i \Delta x_i' + \sum_l m_{k+l} \Delta y_l'$, где числа m_i ограничены при $|t-s| \rightarrow 0$, получаем, учитывая условия $|x_i'| \leq |z_i/2|$, $|y_l'| \leq |v_l/2|$, что последний интеграл не превосходит некоторой суммы вида

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |z_1|^{d_1} \dots |v_l|^{d_{l+k}} p(z_1, \dots, v_l | x_0, y_0, 0, \dots, 0) \leq \\ & \leq \sum_{i,j} \int (|z_i|^{d_i} p(z_i | x_0, y_0, 0, \dots, 0) dz_i + \\ & \quad + |v_j|^{d_j} p(v_j | x_0, y_0, 0, \dots, 0) dv_j), \end{aligned}$$

где, как нетрудно подсчитать $d_i, d_j \leq n^2$. Далее пользуемся леммами 1.3, 1.2 и леммой 1.1 для оценки D_1 . В случае, когда вектор e_0 зависит от одной или обеих систем $(e_i), (f_j)$, оценки аналогичны.

Определение. Будем говорить, что замкнутое множество $T \subset R_n$ принадлежит классу W , если его граница ∂T состоит из $k_1 < \infty$ $n-1$ -мерных многообразий $S_{n-1}^j, j=1, \dots, k_1$, класса C_3 , $k_2 < \infty$ $n-2$ -мерных многообразий $S_{n-2}^j, j=1, \dots, k_2$, класса C_3 , и так далее, наконец, $k_n < \infty$ 0 -мерных многообразий (вершин) $S_0^j, j=1, \dots, k_n$.

Теорема 1.6. 1. Пусть для гауссовских однородных полей $X_0(t), X_1(t), t \in R_n$, выполнены условия (1)–(3). Тогда для любого выпуклого замкнутого множества $T \subset R_n$ из класса W найдутся числа $\rho > 0$ и $C < \infty$ такие, что

$$\begin{aligned} \Delta_P^T &= |P(\max_T X_0(t) \leq u) - P(\max_T X_1(t) \leq u)| \leq \\ & \leq C \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 (1 + \rho)\right). \end{aligned}$$

2. Если, кроме того $r_1(s_1, s_2), r_0(s_1, s_2) \rightarrow 0, s_1 - s_2 \rightarrow \infty$, то можно выбрать число $\rho_1 > 0$ так, что для любого T , удовлетворяющего вышеприведенным условиям, и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $C_1, C_2 < \infty$, что

$$\begin{aligned} \Delta_P^T &\leq C_1 V(T) \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 (1 + \rho_1)\right) + \\ & + C_2 \sum_{i,j,k,l} \int_{S_k^i \times S_l^j} |r_0(t, s) - r_1(t, s)| dt ds \exp(-(1-\varepsilon) u^2), \end{aligned}$$

где $V(T)$ — сумма всех функционалов Минковского множества T и константы C_1, C_2 зависят лишь от чисел $k_i, i=1, \dots, n$.

Доказательство. Введем в каждом из многообразий S_n^j естественную метрику. Гауссовские поля $X_1(t)$ и $X_0(t)$, суженные на каждое из этих многообразий, удовлетворяют всем условиям (1)–(3). Введем решетку Ξ_Δ , состоящую из вершин n -мерной Δ -решетки, лежащих внутри T , вершин всех k -мерных решеток с шагом Δ , лежащих внутри многообразий S_n^j , $k=1, \dots, n-1$, и всех вершин S_0^j , $j=1, \dots, k_n$. Точки полученной решетки, расстояния (в соответствующей метрике) между которыми менее $0, 1\Delta$ выбросим. Далее не будет необходимости делать различия между метриками, всегда будет иметься в виду расстояния в многообразии наименьшей размерности, которой принадлежат обе рассматриваемые точки. Очевидно,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} P(\max_{t \in \Xi_\Delta} X_\nu(t) \leq u) = P(\max_{t \in T} X_\nu(t) \leq u), \quad \nu=0, 1.$$

По теореме 1.5

$$\Delta P^{\Xi_\Delta} \leq \sum_{t, s \in \Xi_\Delta, t \neq s} |r_1(t, s) - r_0(t, s)| \int_0^1 \varphi(u, u, r_h(t, s)) \times \\ \times P(\max_{\Xi_\Delta} X_h(t) \leq u | X_h(t) = X_h(s) = u) dh. \quad (1.5)$$

Сумму в правой части (1.5) разобьем на конечное число сумм по следующим множествам:

$$t, s \in T \setminus \partial T = S_n; \quad t \in S_n, s \in S_{n-1}^1; \dots; t \in S_n, s \in S_0^{k_n}; \\ t \in S_{n-1}^1, s \in S_{n-1}^1; \dots; t \in (=) S_0^{k_{n-1}}, s \in (=) S_0^{k_n}.$$

В случае, когда $|t-s| > K\Delta$, K — некоторое настолько большое число (но фиксированное), чтобы можно было применить лемму 1.4, используя эту лемму, получаем, что сумма в правой части (1.5) по $|t-s| > K\Delta$, $t \in S_n^a$, $s \in S_l^b$, $k \leq l$, не превосходит величины

$$C \left(e^{-\frac{u^2}{2}(1+\rho)} \int_{S_k^a} dt \int_{S_l^b} ds \frac{|t-s|^4}{|t-s|^{k+l}} + \right. \\ \left. + \int_{T \times T \cap \{|t-s| > \varepsilon\}} |r_1(t, s) - r_0(t, s)| \varphi(u, u, \hat{r}(t, s)) dt ds \right),$$

где $\hat{r}(t, s) = \max(|r_0(t, s)|, |r_1(t, s)|)$. Первый интеграл в правой части сходится для любых k и l , $k \leq l$. Для $|t-s| < K\Delta$ сумма в правой части (1.5) не превосходит величины

$$CK |K\Delta|^4 \int_0^1 \sum_{t, s \in \Xi_\Delta} P(\max_{\Xi_\Delta} X_h(t) \leq u | X_h(t) = X_h(s) = u) dh.$$

Для оценки вероятности в этом выражении воспользуемся выкладками доказательства леммы 1.4, проводя преобразования только лишь над точками, соседними с t , что даст оценку интеграла от суммы в виде интеграла по S_R^a от ограниченной функции, умноженной на $2nK^n$ (мажоранта числа точек из E_Δ , удовлетворяющих условию $|t-s| \leq K\Delta$). Таким образом, сумма по $|t-s| < K\Delta$ стремится к нулю при $\Delta \rightarrow 0$. Оценив плотность

$\varphi(u, u, \hat{r}(t, s))$ через $e^{-\frac{u^2}{1 + \max_{|t-s| \geq \varepsilon} \hat{r}(t, s)}}$, получаем утверждение 1 теоремы. Взяв оценку вида

$$I_{|t-s| < T_0} \exp\left(-\frac{u^2}{1 + \max_{|t-s| \geq \varepsilon} \hat{r}(t, s)}\right) + I_{|t-s| \geq T_0} e^{-u^2(1-\varepsilon)},$$

где T_0 такое, что $|\hat{r}(t, s)| < \varepsilon/4$ при $|t-s| > T_0$, получаем утверждение 2 теоремы.

Замечание. Из доказательства лемм и теоремы 1.6 видно, что условие (3) можно заменить на условие существования плотностей у всех конечномерных распределений достаточно высокого порядка. Таким условиям удовлетворяют

тригонометрические полиномы вида $\left(\sum_1^M \zeta_k \cos(l_k, t) + \eta_k \sin(l_k, t)\right)$, $l_k \in \mathbb{Z}_n$, (l_k, t) — скалярные произведения. Для таких полей можно оценить вероятность $P(\max_T X(t) > u)$

с точностью до $\exp\left(-\frac{u^2}{2}(1+\delta)\right)$, $\delta > 0$. Для этого нужно перейти к полю на R_M вида $\zeta_M(t)$, $t \in R_M$, и взять $\bar{T} \in R_M$ соответствующим образом.

В случае $n=1$ в [53] при несколько более слабых ограничениях приводится тождество сравнения для вероятностей выхода за уровень, и затем оценивается правая часть тождества. Аналогичное тождество можно выписать и для произвольного n , однако оно будет для произвольного T слишком громоздким. Но для некоторых T оно выглядит достаточно просто. Например, если T — дважды непрерывно дифференцируемое замкнутое многообразие размерности n (например, тор, или сфера в R_{n+1}), то для независимых полей X_0 и X_1 на T , удовлетворяющих условиям (1) — (3) и условию: в некоторой окрестности диагонали $t=s$ $r_1(t, s) \geq r_0(t, s)$, выполнено:

$$\begin{aligned} P(\max_T X_0(t) \leq u) - P(\max_T X_1(t) \leq u) = \\ = 2^{-1} \int_0^1 dh \int_{T \times T} dt ds (r_0(t, s) - r_1(t, s)) \times \end{aligned}$$

$$\times \int_{\substack{y=(y_1, \dots, y_n) \\ y_i < 0, i=1, \dots, n}} dy \int_{\substack{z=(z_1, \dots, z_n) \\ z_i < 0, i=1, \dots, n}} dz \times \\ \times P_{X_n(t), X_h(s), \nabla X_h(t), \nabla X_h(s), \square X_h(t), \square X_h(s)}(u, u, 0, 0, y, z) \times \\ \times P(\max_T X_h(t) \leq u | X_h(t) = X_h(s) = u, \nabla X_h(t) = \nabla X_h(s) = 0, \\ \square X_h(t) = y, \square X_h(s) = z),$$

где $\square X = (\partial^2 X / \partial t_i^2, i=1, \dots, n)$, и нулю равны ∇X_h в точках t и s .

Некоторые общие вопросы теории неравенств типа теоремы 1.1 рассмотрены в [51].

В дальнейшем мы увидим, что теоремы 1.1—1.6 являются основой для доказательства значительного числа различных результатов для гауссовских процессов.

§ 2. СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНОСТИ ТРАЕКТОРИИ

На протяжении более чем двадцати лет многие исследователи занимались решением следующей задачи, поставленной А. Н. Колмогоровым: найти необходимые и достаточные условия п. н. непрерывности траекторий гауссовского процесса в терминах его корреляционной функции. Функция $d(t, s)$ вносит в параметрическое множество T псевдометрику (она удовлетворяет неравенству треугольника). Эту псевдометрику часто называют естественной метрикой пространства T . Относительно нее можно определить сепарабельность, непрерывность процесса $X(t)$, и т. п. Естественная метрика d оказалась наиболее удобным параметром гауссовского процесса при исследовании свойств его регулярности. Обозначим через $N(C, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $C \subseteq T$ наименьшее целое n (возможно, $n = \infty$) такое, что существуют множества A_1, \dots, A_n , $C \subseteq \bigcup_{j=1}^n A_j$, причем для любого j и всех $x, y \in A_j$, $d(x, y) \leq 2\varepsilon$. ($N(C, \varepsilon)$ — мощность минимальной ε -сети в метрике d). В этом параграфе будем считать, что $MX(t) \equiv 0$. Положим $H(C, \varepsilon) = \log N(C, \varepsilon)$. Следующий результат принадлежит Дельпорту [96], Фернику [73], Дадли [99] и В. Н. Судакову [69].

Теорема 2.1. Если для какого-нибудь $\delta > 0$ $\psi(\delta) = \int_0^\delta H(T, x)^{1/2} dx < \infty$, то траектории процесса $X(t)$ п. н. непрерывны.

Интеграл в формулировке теоремы называется интегралом Дадли. Основываясь на теореме сравнения 1.3, оценках В. Н. Судакова [69] и результатах Ю. К. Беляева [1], Фер-

нику [73] удалось доказать следующее обращение этой теоремы.

Теорема 2.2. Пусть $X(t)$, $t \in R_n$, — однородное гауссовское поле с п. н. непрерывными траекториями, и T — компакт в R_n . Тогда для любого $\delta > 0$ интеграл Дадли сходится.

Схема доказательства этого факта следующая. Предположим, что интеграл Дадли расходится. Строим процесс $X_0(t)$ такой, что $d_{X_0}(t, s) \leq d_X(t, s)$, относительно которого известно, что $M \sup X_0(t) = \infty$. Тогда по теореме сравнения 1.3 и $M \sup X(t) = \infty$. А поскольку поле $X(t)$ однородное, то в силу альтернативы Ю. К. Беляева [1] траектории поля $X(t)$ разрывны на любом интервале. Нужное поле $X_0(t)$, для которого в явном виде считается $M \sup X_0(t)$ дает следующая теорема, обобщающая один результат Судакова:

Теорема 2.3 [73]. Пусть A — конечное множество, $T = \mathcal{P}(A)$ — множество его подмножеств, μ — положительная конечная мера на A и $(\lambda_a, a \in A)$ — набор гауссовских независимых стандартных величин (т. е., с нулевыми средними и единичными дисперсиями). Тогда для гауссовского процесса X на T такого, что

$$r_X(t, s) = \sum_{a \in S \cap t} \mu(a),$$

имеет место равенство

$$M \sup_T X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{a \in A} \sqrt{\mu(a)}.$$

Обозначим, следуя Фернику [73], через $M(S, \delta)$, $S \subseteq T$, максимальное число непересекающихся в T d -шаров радиуса δ (т. е. множество $B(s, \delta) = \{t : d_X(t, s) \leq \delta\}$), и через $K(t, \delta, n, q)$, $t \in T$, $\delta > 0$, $q \geq 2$, n — целое, обозначим максимальное число непересекающихся в T d -шаров радиуса δq^{-n} с центрами, лежащими в шаре $B(t, \delta q^{-(n-1)})$. Положим $K(S, \delta, n, q) = \sup_{t \in S} K(t, \delta, n, q)$. Судаков показал, что если траектории процесса $X(t)$ п. н. ограничены, то все эти числа конечны. Однако имеет место и более точный результат (Ферник [73]), следующий из теоремы 2.3.

Теорема 2.4. Пусть процесс $X(t)$, $t \in T$, п. н. ограничен, тогда для любого $S \subseteq T$, любых $\delta > 0$ и $q \geq 2$

$$\frac{\delta}{8\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{[\log_2 M(S, \delta)]} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{-n} \sqrt{[\log_2 K(S, \delta, n, q)]} \right) \leq M \sup_T X(t).$$

В случае, когда $T \subseteq R_n$ величины H , $\log_2 M(S, \delta)$ и $\log_2 K(S, \delta, n, q)$ эквивалентны. Поэтому, в силу изложенной выше схемы, утверждение теоремы 2.2 следует из теоремы 2.4.

Теоремы 2.1 и 2.2 являются, несомненно, одним из наиболее выдающихся достижений последних лет в теории гауссовских процессов. Они являются результатом весьма развитой теории, основной вклад в которую внесли Ю. К. Беляев, В. Н. Судаков, Дадли, Дельпорт и Ферник.

Структура пространства (T, d_x) в общем случае может быть весьма сложной, поэтому получение необходимых и достаточных условий п. н. непрерывности или ограниченности траекторий в нестационарном случае — задача гораздо труднее. В [100] делается попытка решить эту задачу так называемым методом мажорирующих мер. Этот метод основан на методе сравнения. Приведем один из результатов Ферника [100].

Пусть T — польское пространство, μ — вероятностная мера на T , $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство и $\mathfrak{M}(\mu)$ — семейство случайных вероятностных мер, $m = m(\omega, dt)$, такое, что $\int m(\omega, dt) dP(\omega) = \mu(dt)$. Обозначим $\varphi(X, \mu) = \sup_{m \in \mathfrak{M}(\mu)} M \int X(t) \times m(\omega, dt)$. Если $T \subseteq R$ и для любых $s \leq s' \leq t' \leq t$, $s, s', t', t \in T$, выполнено $d_x(s', t') \leq d_x(s, t)$, то $\varphi(X, \mu) < \infty$ тогда и только тогда, когда для некоторого $\delta > 0$

$$\int_T d\mu(t) \int_0^\delta \sqrt{\log \frac{1}{\mu(B(t, u))}} du < \infty.$$

Для $\varphi(X, \mu)$ выписаны также оценки снизу и сверху.

Большое число работ посвящено исследованию модулей непрерывности гауссовских процессов и полей. Один из методов исследования также основан на теореме сравнения. В 1970 году Маркус и Шепп [122] показали, что если $d_x(s, t) \leq d_x(s, t)$, то аналогичное неравенство имеет место в некотором смысле и для модулей непрерывности гауссовских процессов X и Y . В работе [110] дано обобщение этого результата на равномерный модуль непрерывности. В. Ф. Синявский [66] дал описание модулей непрерывности однородного гауссовского поля:

Пусть $X(t)$ — непрерывное однородное гауссовское случайное поле, $\psi(h)$ — монотонно неубывающая функция, $\psi(0) = 0$, причем для некоторого $C_0 > 0$ $C_0 \psi^2(|h|) \leq d_x(t, t+h) \leq \psi(|h|)$, $\psi^2(2^{-n}) - \psi^2(2^{-n-1})$ не возрастает при $n \rightarrow \infty$, и для некоторого $\alpha < 2$ и достаточно больших n $\psi^2(2^{-n}) \leq 2^\alpha \psi^2(2^{-n-1})$. Тогда функция

$$\varphi(u) = \max \left((\psi^2(u) \log \log 1/u)^{1/2}, \int_0^{1/2} \frac{\psi^2(uh)}{h (\log 1/h)^{1/2}} dh \right)$$

является модулем непрерывности поля X при условии, что стоящий под знаком максимума интеграл существует.

В работах Вебера [141, 142] для исследования модулей непрерывности с помощью так называемых верхних и нижних равномерных и неравномерных классов применяется энтропийный метод, завоевавший большую популярность после работ Дадли, В. Н. Судакова и Ферника.

Некоторые методы исследования локальных свойств гауссовских процессов оказались эффективными и для негауссовских. Здесь стоит отметить метод пространств Орлича, см. подробно [129], дальнейшее развитие и уточнение метода Колмогорова—Слущкого. Многие из этих результатов подробно изложены в недавно вышедшей монографии М. И. Ядренко [78]. Весьма общий подход изложен в монографии В. В. Буддыгина [8]. См. также [40, 102, 111].

Большой интерес представляют работы, связанные с локальными свойствами множеств вида $\{X^{-1}(u)\}$, u — некоторое число. Важными являются вопросы о существовании, свойствах локального времени гауссовского процесса, о размерности Хаусдорфа и других свойствах множества $\{X^{-1}(u)\}$. Напомним, что локальным временем процесса $X(t)$, $t \in [0, 1]$ называется

плотность меры («времени пребывания») $\mu(A) = \int_0^1 I_A(X(t)) dt$

относительно меры Лебега. Ранее было известно, что локальное время как правило существует либо для процессов с непрерывными, но сильно нерегулярными траекториями (напри-

мер, такими, что $\int_0^1 d_X^{-1}(s, t) ds < \infty$ для почти всех t), либо

для дифференцируемых в ср. кв. процессов (в этом случае локальное время существует тогда и только тогда, когда $X'_t \neq 0$ при почти всех t). Существовали и некоторые необходимые условия, но лишь для случая процессов с независимыми приращениями. М. А. Лифшицу [27, 30] удалось обобщить эти результаты на произвольные гауссовские процессы и показать, что существует целый класс гауссовских процессов, промежуточный между упомянутыми, для которых локальное время не существует.

Теорема 2.5 [30]. Если процесс $X(t)$, $t \in [0, 1]$, имеет локальное время, то при почти всех t

$$\liminf \frac{d_X^+(\cdot, t)}{s} > 0,$$

где $d_X^+(\cdot, t)$ — монотонная перестройка функции $d_X(\cdot, t)$.

Теорема 2.6 [30]. Пусть $X(t)$, $t \in [0, 1]$, — гауссовский стационарный случайный процесс со спектральной мерой F , и

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{|\gamma| < l} \gamma^2 F(d\gamma) = \infty,$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln l}{l^2} \int_0^l \gamma^2 \int_{|y|>l} F(d\gamma) dl = 0.$$

Тогда почти все траектории процесса $X(t)$ отображают меру Лебега на $[0, 1]$ в сингулярную меру, и локального времени у процесса $X(t)$ не существует.

Свойства регулярности локального времени изучались в [114]. В статье Бермана [84] рассматривается применение локального времени к исследованию сходимости интегральных функционалов.

При изучении локального времени большое значение имеет размерность параметрического множества. Некоторые результаты однако удается перенести и на случай полей. Так, в работе [131] результаты Бермана обобщаются на векторнозначные случайные поля. Единый подход для исследования локального времени скалярных случайных полей содержится в работах Ю. А. Давыдова (см., например, [16] и другие предшествующие ей работы Ю. А. Давыдова).

Размерность Хаусдорфа множества $X^{-1}(u)$ для векторнозначных случайных полей изучается в работах [90, 91].

§ 3. ОЦЕНКИ И АСИМПТОТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУПРЕМУМА

Изучение вероятности $P(\sup_{t \in T} X(t) > u)$, а также распределения других функционалов, связанных с высоким уровнем, занимает заметное место в теории гауссовских процессов. Задачи, в которых необходимо оценить такую вероятность встречаются в статистике, теории надежности, в теории приближения случайных процессов. Особенно большое число работ, посвященных этой теме, появилось после работы Пикандса [130], во многом прояснившей структуру события $(\max_{t \in T} X(t) > u)$ для процессов, у которых $d(t, s) = C|t-s|^\alpha(1+o(1))$, $t \rightarrow s$, $\alpha > 0$. С другой стороны, широкие исследования локальных свойств траекторий (см. § 2) требовали возможно более точных оценок для распределения супремума гауссовского процесса на произвольном параметрическом множестве. В этом направлении одним из последних и наиболее точных результатов является следующий.

Теорема 3.1 (В. А. Дмитровский [18, 19]). Если для гауссовского процесса $X(t)$, $MX(t) = 0$, на произвольном параметрическом множестве T выполнены условия

$$\psi(1) = \int_0^1 H(T, x)^{1/2} dx < \infty,$$

$\sup_{t \in T} MX^2(t) = 1$, и $\sup_{t, s \in T \times T} d^2(t, s) = \sigma^2$, то для всех $u \geq \max(u_0, 1 + 9\psi(\sigma^{-1}))$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2} + \theta(u)\right) \leq P(\sup_{t \in T} X(t) \geq u) \leq \\ \leq \frac{6}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u - 9\psi(u^{-1/2})} \exp\left(-\frac{u^2}{2} + \chi(u)\right),$$

где

$$\chi(u) = \inf_{\delta < 1/2} (2u^2\delta^2 + H(T, \delta\sigma^{-1}) + 4\sqrt{2}u\psi(\delta\sigma^{-1}) + \sqrt{2}u\delta),$$

$\theta(u)$ — корень уравнения $\theta = 8H(T, \sqrt{\theta}/u\sigma)$, $u_0 = \sup\{x: \psi(x^{-1/2}) \geq \sqrt{2}\sigma\}$.

Отсюда следует, что $P(\sup_{t \in T} X(t) \geq u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2} + u\theta(1)\right)$,

$u \rightarrow \infty$, т. е. для весьма широкого класса гауссовских процессов на любом параметрическом множестве, если вероятность превышения уровня u не равна 1, то ее главный логарифмический член равен $-\frac{u^2}{2 \sup_{t \in T} MX^2(t)} + u\theta(1)$. В частности, в силу теоремы 2.2 эта альтернатива имеет место для произвольного гауссовского однородного поля на R_n .

Следует отметить, что имеется большое число работ, в которых так или иначе оценивается величина $\log P(\max_T X(t) > u)$ («грубые асимптотики»). Обзор результатов этих работ содержится в основном в монографии А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина [10]. См. также работы [71, 109]. В работе [105, 106] изучается функция распределения и плотность нормы последовательности $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ гауссовских независимых стандартных величин. Норма рассматривается двух видов:

$$q(x) = \sup_n (|x_n|/a_n) \quad \text{и} \quad q(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^2 x_n^2\right)^{1/2}.$$

Получены верхние и нижние оценки для меры сдвинутого шара $F(t, a) = P(q(\eta - a) \leq t)$, а также оценки для приращений типа $F(t_0, 0) - F(t_1, 0)$. Эта работа продолжает направление, начатое работами Б. С. Цирельсона [77] и Маркуса и Шеппа [122].

В случае однородного поля на R_n точная асимптотика при $u \rightarrow \infty$ рассматриваемой вероятности найдена сразу несколькими авторами на основе идеи, содержащейся в упомянутой уже работе Пикандса. Систематический подход к изучению различных вероятностей, зависящих от высокого уровня, для гауссовских процессов на прямой $T = R_1$ предложил Берман [5, 84, 86]. В его работах основным объектом изучения являет

ся функционал времени пребывания $L = \int_0^1 G(u(X(t) - u)) dt$,

$T = [0, 1]$, где $\int G(y) \exp(-cy) dy < \infty$ для всех $c > 0$, $G(y) \geq 0$.

Такое название определено тем, что в случае $G = I_{(0, \infty)}$ L представляет собой время, проведенное процессом $X(t)$ с непрерывными траекториями за уровнем u . (Здесь, как и ранее, I — индикаторная функция множества). Заметим, что в этом случае $P(L > 0) = P(\max_{[0,1]} X(t) > u)$. Положим $F_u(A) =$

$$= \int_A^\infty P(vL > x) dx / M(vL), \quad v = v(u) \text{ — возрастающая функция.}$$

Теорема 3.2 [5]. Если функция

$$\mathcal{B}(A; t, y) = \lim_{u \rightarrow \infty} P(vL > A | u(X(t) - u) = y)$$

существует для почти всех $A > 0$, $0 \leq t \leq 1$ и $-\infty < y < +\infty$, то для всех $A > 0$ существует предел $F(A) = \lim_{u \rightarrow \infty} F_u(A)$, и

$$F(A) = \frac{\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}(A; t, y) G(y) e^{-y} dy dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} G(y) e^{-y} dy}.$$

Функция F абсолютно непрерывна и ее производная F' по мере Лебега удовлетворяет во всех точках непрерывности $x > 0$ равенству $\lim_{u \rightarrow \infty} P(vL > x) / M(vL) = -F'(x)$.

В основе доказательства теоремы 3.2 лежит идея о слабой компактности семейства гауссовских условных мер

$$P(u(X(t+s/v) - u) \in (\cdot) | u(X(t) - u)).$$

Эта теорема позволяет вычислить асимптотики различных вероятностей, связанных с временем пребывания. Для этого необходимо вычислить функцию $\mathcal{B}(A; t, y)$. В [5] приводятся некоторые случаи, когда эту функцию можно вычислить, в частности $\mathcal{B}(A; t, y)$ вычислена для локально стационарных процессов. Локально стационарным называется процесс X такой, что $MX(t) = \text{const}$, $MX(t)^2 = \text{const}$, и для некоторой непрерывной функции $K(t)$, $K(0) = 0$, и непрерывной монотонной функции $H(s) > 0$, $s > 0$, имеет место соотношение

$$\lim_{s \rightarrow 0} d^2(t+s, t) / 2K(|s|) = H(t)$$

равномерно по t . Предполагается, что функция $K(s)$ правильно меняется в нуле с показателем $\alpha > 0$, т. е. $\lim_{s \downarrow 0} K(st) / K(s) = t^\alpha$, $t \geq 0$. Функция $\mathcal{B}(A; t, y)$ вычислена также и в случае, когда $MX(t) = f(t)$, $f(0) = 0$, f правильно меняется в нуле и мо-

нотонно растет. В. П. Присяжнюк обобщил большинство результатов из [5] на случай $T = [0, 1]^n \subseteq R_n$. См. также статью Эдлера [79]. Видимо функцию $\mathcal{B}(A; t, y)$ можно вычислить и в случае непостоянной дисперсии процесса $X(t)$. Асимптотика вероятности $P(\max X(t) > u)$ вычислена в [57] непосредственно, на основе методов работы [3]. В [57] содержится несколько неточностей в доказательстве основного результата, влияющих на его формулировку. Эти неточности перенесены и в обзор [52] (теорема 2.2). Приведем формулировку этой теоремы в исправленном варианте.

Теорема 3.3. Пусть для гауссовского сепарабельного процесса $X(t)$, $t \in [0, 1]$, $MX(t) \equiv 0$, $MX(t)X(s) = r(t, s)$, $r(t, t) = \sigma^2(t)$, $\rho(t, s) = \frac{r(t, s)}{\sigma(t)\sigma(s)}$ выполнены следующие условия:

(1) $\sigma(t)$ достигает абсолютного максимума $\sigma(t_M) > 0$ в единственной точке $t_M \in [0, 1]$, и

$$\sigma(t) = \sigma(t_M) - A|t - t_M|^\beta + o(|t - t_M|^\beta), \quad t \rightarrow t_M,$$

для некоторых $\beta > 0$, $A > 0$;

(2) $\rho(t, s) = 1 - D(t, s)|t - s|^\alpha + o(|t - t_M|^\alpha)$, $t \rightarrow t_M$, $s \rightarrow t_M$, $\alpha > 0$, $D(t_M, t_M) = D > 0$, $D(t, s)$ непрерывна в точке (t_M, t_M) ;

(3) существуют $\alpha_1 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что для всех t, s $|t - s| \leq t_0$ выполнено $d(t, s) \leq C|t - s|^{\alpha_1}$, $C < \infty$. Тогда, если $\beta > \alpha$, то

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{u}{\sigma(t_M)} \right)^{\frac{2}{\beta} - \frac{2}{\alpha}} \left(\Psi \left(\frac{u}{\sigma(t_M)} \right) \right)^{-1} P(\max_{[0,1]} X(t) > u) = \\ = \begin{cases} \frac{2}{\beta} \Gamma \left(\frac{1}{\beta} \right) D^{1/\alpha} A^{-1/\beta} \sigma(t_M)^{1/\beta} H_\alpha, & t_M \in (0, 1), \\ \frac{1}{\beta} \Gamma \left(\frac{1}{\beta} \right) D^{1/\alpha} A^{-1/\beta} \sigma(t_M)^{1/\beta} H_\alpha, & t_M = 0 \text{ или } 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $\beta = \alpha$, то

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\Psi \left(\frac{u}{\sigma(t_M)} \right) \right)^{-1} P(\max_{[0,1]} X(t) > u) = \\ = \begin{cases} H_\alpha^{K,1}, & t_M \in (0, 1), \\ H_\alpha^{K,2}, & t_M = 0 \text{ или } 1, \end{cases} \\ K = A/(\sigma(t_M)D). \end{aligned}$$

Если $\beta < \alpha$, то

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\Psi \left(\frac{u}{\sigma(t_M)} \right) \right)^{-1} P(\max_{[0,1]} X(t) > u) = 1.$$

Здесь

$$\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad 0 < H_\alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} H_\alpha^0(0, T) < \infty,$$

$$H_{\alpha}^{K,1} = \lim_{T \rightarrow \infty} H_{\alpha}^K(-T, T) < \infty, \quad H_{\alpha}^{K,2} = \lim_{T \rightarrow \infty} H_{\alpha}^K(0, T) < \infty,$$

$$K > 0, \quad H_{\alpha}^b(A, B) = (1+b)^{-1} M \exp((1+b)^{-1} \max_{[(1+b)^2/\alpha_A, (1+b)^2/\alpha_B]} \chi(s)),$$

$\chi(t)$ — гауссовский процесс, $t \in (-\infty, +\infty)$,

$$M\chi(t) = -|t|^{\alpha}, \quad \text{cov}(\chi(t), \chi(s)) = -|t-s|^{\alpha} + |t|^{\alpha} + |s|^{\alpha}.$$

Используемые в [57] методы можно обобщить на многомерный случай. Необходимость такого обобщения диктуется реальной задачей математической статистики: нахождение асимптотики распределения (хотя бы предельного) статистики Колмогорова в случае, когда предварительно оцениваются некоторые параметры. В одномерном случае эта задача решена Г. А. Несененко и Ю. Н. Тюриным [49] методами дифференциальных уравнений, исходя из марковости предела эмпирического процесса. Такой путь решения в многомерном случае пока невозможен. Неясно, как использовать марковское свойство предела эмпирического поля для оценивания распределения его максимума. В частности, не решена следующая на наш взгляд важная задача: найти функцию распределения максимума многопараметрического броуновского движения (т. е., поля $W(t_1, \dots, t_n)$ с нулевым средним и структурной функцией вида

$$d_W(t, s) = \sum_{k=1}^n |t_k - s_k|.$$

В связи с этим представляется важной также задача вычисления констант H_{α} и $H_{\alpha}^{h,\nu}$ и их аналогов в многомерном случае. Заметим, что из нижеприведенной теоремы 3.4 следует, что $H_{2,2, \dots, 2} = \pi^{-n/2}$.

Вышеприведенные точные асимптотики и методы их получения интенсивно применяются Ю. К. Беляевым и его учениками в задаче приближения траекторий гауссовских процессов с непрерывным временем функциями из заданных конечномерных пространств. В обзоре [52] упомянуты работы Ю. К. Беляева и А. Х. Симоняна, в которых исследован случай приближения ломаными. См. также [63, 4]. О. В. Селезнев [61, 62] исследовал равномерное приближение траекторий гауссовского процесса сплайнами и тригонометрическими рядами. В задачах приближения теоремы типа 3.2 и 3.3 требуются в схеме серий, когда не только повышается уровень, но меняется и сам процесс. Например, утверждение теоремы 3.3 повидимому имеет место, если $\alpha = \alpha(u) \rightarrow \alpha_0$, $\beta = \beta(u) \rightarrow \beta_0$, $D = D(u) \rightarrow D_0$ при $u \rightarrow \infty$, возможно, при каких-то дополнительных ограничениях. Теоремы такого типа найдут довольно широкие применения.

Заметим, что в доказательстве теоремы 3.3 широко используется теорема сравнения Слепяна 1.2. Это обычный прием при переходе от нестационарного к стационарному процессу.

Рассмотрим теперь вопрос о поправочных членах в асимптотиках вероятности $P(\max_T X(t) > u)$, $u \rightarrow \infty$. Возможность

получения поправочных членов, по крайней мере для достаточно гладких в ср. кв. процессов, открывает теорема сравнения 1.6. Поскольку распределение максимума косинус-процесса $\xi_0(t) = \xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t$, $t \in [0, T]$, $0 \leq T \leq \pi$, ξ_k — независимые стандартные величины, хорошо известно, [83], нетрудно вычислить и распределение максимума поля $\xi_m(t)$, по параллелепипеду $[0, T_1] \times \dots \times [0, T_m]$, $T_k \geq 0$, $k=1, 2, \dots, m$, (см. § 1). Последующее применение замечания к теореме 1.6 дают следующие утверждения:

Теорема 3.4. Пусть для поля $X(t)$ выполнены условия теоремы 1.6 и $\Lambda_2 = I$ (I — единичная матрица). Тогда для любых $T_1 \geq 0, \dots, T_n \geq 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что

$$P\left(\max_{0 \leq t_i \leq T_i, i=1, \dots, n} X(t) < u\right) = \int_{-\infty}^u \varphi(x) dx - \\ - \varphi(u) \left(\frac{\prod_{k=1}^n T_k}{(2\pi n)^{n/2}} H_{n-1}(u) + \frac{\sum_{k=1}^n T_k^{-1} \prod_{l=1}^n T_l}{(2\pi n)^{(n-1)/2}} H_{n-2}(u) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{\sum_{k=1}^n T_k}{(2\pi n)^{1/2}} \right) + O\left(e^{-\frac{u^2}{2}(1+\delta)}\right),$$

$H_k(x)$ — полиномы Эрмита (с весовой функцией $e^{-x^2/2}$), φ — стандартная нормальная плотность.

Теорема 3.5. Если $n=2$, то для любых X и T , удовлетворяющих условиям теоремы 1.6 найдется $\delta > 0$ такое, что

$$P\left(\max_T X(t) < u\right) = \int_{-\infty}^u \varphi(x) dx - \frac{|T|}{4\pi} u \varphi(u) - \\ - \frac{|\partial T|}{2\sqrt{2\pi}} \varphi(u) + O\left(\exp\left(-\frac{u^2}{2}(1+\delta)\right)\right),$$

где $|T|$ и $|\partial T|$ — соответственно площадь и длина границы множества T .

Теорема 3.4 для случая $n=1$ приведена в [53], однако условия на процесс там слабее, требуется существование второй производной в ср. кв. В этой же работе приводится тождество сравнения для вероятности превышения уровня u стационарным процессом, а также следующий, экспоненциальный поправочный член.

Существуют и другие способы получения поправочных членов к асимптотике вероятности выхода. Один из них основан на следующей простой лемме. Пусть $N_u(T)$ — число выходов процесса $X(t)$, $t \in R_1$, за уровень u на отрезке $[0, T]$ (т. е. таких случайных точек τ , для которых существует $\delta = \delta(\tau) > 0$, что $X(\tau) = u$, $X(s) < u$ для $s \in (\tau - \delta, \tau)$ и $X(s) > u$ для $s \in (\tau, \tau + \delta)$), $L_u(T)$ — число входов процесса $X(t)$ под уровень u (вход процесса $X(t)$ — это выход процесса $X(-t)$). Обозначим $\alpha_2(u, T) = MN_u(T) (N_u(T) - 1)$, $\beta_2(u, T) = ML_u(T) (L_u(T) - 1)$.

Лемма. Если процесс $X(t)$ (не обязательно гауссовский) такой, что $MN_u(T) < \infty$ и $P(X(0) = u) = 0$, то

$$0 \leq MN_u(T) + P(X(0) > u) - P\left(\max_{[0, T]} X(t) > u\right) \leq \\ \leq \frac{1}{2} (\alpha_2(u, T) + \beta_2(u, T)) + P(X(0) > u, X(T) > u).$$

Оценивание правой части этого неравенства дает следующее обобщение теоремы 3.4 в случае $n = 1$:

Теорема 3.6. Если стационарный гауссовский процесс $X(t)$ такой, что $MX(0)^2 = MX'(0)^2 = 1$ и $d_{X'}(t, s) \leq C|t - s|^{\alpha/2}$ для некоторых $C, \alpha > 0$, то найдутся C_1 и $\rho > 0$ такие, что

$$0 \leq \int_u^\infty \varphi(x) dx + \frac{T}{2\pi} e^{-u^2/2} - P\left(\max_{[0, T]} X(t) > u\right) \leq \\ \leq C_1 \left(u^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}} e^{-u^2/2} + \exp\left(-\frac{u^2}{2}(1+\rho)\right) \right),$$

где в случае $\alpha = 2$ полагаем $u^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}} = 0$.

Таким образом, нерешенной осталась задача о получении поправочных членов к асимптотике вероятности выхода в случае недифференцируемых процессов. В случае, когда корреляционная функция гауссовского стационарного процесса имеет вид $r(t) = 1 - C|t| + o(|t|)$, $C > 0$, $t \rightarrow 0$, метод, с помощью которого можно получить хотя бы скорость приближения к асимптотике, принадлежит В. Д. Конакову и содержится в [23]. Этот метод частично основан на теореме сравнения 1.4.

В случае ненулевого и непостоянного математического ожидания точные асимптотики для процессов содержатся в работах [5, 57]. Если математическое ожидание ведет себя не слишком нерегулярно (например, правильно-меняется в точке минимума), то получение поправочных членов также возможно.

Заметим, что в случае $MX(t) \equiv 0$ в силу симметрии гауссовских распределений имеет место равенство

$$P\left(\max_T |X(t)| > u\right) = 2P\left(\max_T X(t) > u\right) - P\left(\max_T X(t) > u, \max_T (-X(t)) > u\right).$$

Последний член в правой части не превосходит $P(\max_{T \times T} (X(t) - X(s)) \geq 2u)$. Максимум дисперсии поля $X(t) - X(s)$ равен $\max_{t,s} (r(t, t) + r(s, s) - 2r(t, s))$, и в естественных условиях невырожденности эта величина меньше, чем $2 \max r(t, t)$. Поэтому, в силу теоремы 3.1, если для процессов $X(t)$ и $X(t) - X(s)$ интегралы Дадли сходятся и для $X(t)$ $\theta(u) = o(u^2)$, $u \rightarrow \infty$, то найдется $\delta > 0$ такое, что

$$P\left(\max_r X(t) > u, \max_r (-X(t)) > u\right) = O\left(e^{-\delta u^2} P\left(\max_r X(t) > u\right)\right),$$

т. е. асимптотики (и даже со степенными поправочными членами) для $P(\max |X(t)| > u)$ такие же, как и для $P(\max X(t) > u) \cdot 2$.

Продолжаются начатые Ю. К. Беляевым, В. П. Носко и Линдгреном исследования по изучению поведения траекторий случайного процесса вблизи высокого выброса. Пусть $X(t)$ — стационарный процесс $t \in R_1$, $MX(t) = 0$, $r(t) = MX(0)X(t)$, $r(0) = 1$, $r(t) = 1 + o(t^\alpha)$, $t \downarrow 0$, $\alpha > 0$, $r(s-t) - r(s+t) = o((1 - r(2t))^{1/2})$ равномерно по s . Положим $X_u(t) = ur(t) + \xi(t)$, где $\xi(t)$ — гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией $r(s-t) - r(t)r(s)$. Тогда процесс $X(t)$, рассматриваемый при условии $(X(-\varepsilon) < u < X(\varepsilon))$ или $(X(-\varepsilon) > u > X(\varepsilon))$ слабо сближается при $\varepsilon \rightarrow 0$ с некоторой версией процесса $X_u(t)$, [95]. Интересно было бы получить подобные результаты в более общем случае, а также их уточнения, аналогичные полученным Линдгреном в гладком случае [68].

Упомянем еще три работы, в которых содержатся весьма интересные и перспективные постановки задач.

В работе А. Пликунаса [58] с помощью техники семипараметров даются оценки для вероятностей больших отклонений кратных интегралов Ито от гауссовских процессов.

Дибол в работе [96] изучает распределение максимума гауссовского поля на торе. Заметим, что теорема сравнения 1.6 в случае, когда T — тор, доказывается гораздо проще, легко выписать в этом случае также и тождество сравнения, оно выглядит компактнее, чем, скажем, тождество для отрезка, (см. § 1).

В работе А. А. Русакова [60] изучаются вероятности больших отклонений интеграла $X_\varepsilon(t) = \int_0^t f(s) \eta(s) \xi_\varepsilon(s) ds$, где $\eta(s)$ и $\xi_\varepsilon(s)$ — гауссовские независимые случайные процессы, ε — малый параметр. Полученные результаты применяются к оценке вероятности отклонения решений слабо возмущенных линейных дифференциальных уравнений.

§ 4. ПУАССОНОВСКАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ БОЛЬШИХ ВЫБРОСОВ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

Первый результат в этом направлении получен В. А. Волконским и Ю. А. Розановым [11]. Одним из требований в пуассоновской предельной теореме из [11] было требование о сильном перемешивании исходного процесса. Естественно было предположить, что для гауссовских процессов вместо этого требования достаточно ограничений на скорость убывания корреляции стационарного процесса к нулю на бесконечности. Первый результат Крамера и Лидбеттера [26] требовал степенного убывания, Ю. К. Беляев [2] показал, что достаточно скорости $o(1/\ln t)$. При доказательстве пуассоновской теоремы Крамер и Лидбеттер пользовались методом сравнения. С помощью теоремы 1.4 распределение числа выходов сравнивалось с распределением числа выходов процесса с независимыми значениями (естественно, вначале процесс с непрерывным временем приближения процессом с дискретным временем). Ю. К. Беляев использовал метод моментов, приближая поток пересечений уровня потоком, у которого существуют все моментные меры (см. [2]). Оба эти метода получили в дальнейшем большое развитие. Метод сравнения оказался настолько точным, что в некоторых случаях удалось получить необходимые и достаточные условия для выполнения пуассоновской предельной теоремы (см. ниже). Метод моментов оказался хорош для исследования редких событий весьма общего вида, не обязательно связанных с одним или несколькими уровнями.

Постепенно ослабление условий для выполнения пуассоновской предельной теоремы для пересечений высокого уровня привело к следующему результату:

Если

$$r(t) = 1 - C|t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha, C > 0,$$

и

$$r(t) \ln t \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

то в случае $\alpha=2$ поток пересечений уровня u слабо сходится при $u \rightarrow \infty$ в соответствующей нормировке времени к пуассоновскому. В случае $\alpha < 2$ то же верно для потока ε -пересечений (см. [52]).

Почти аналогичный результат получен и для стационарных случайных полей в R_n . Подробно об этом написано в обзоре [52]. После того, как формулировка пуассоновской предельной теоремы приобрела такой достаточно законченный вид, естественно возникли следующие задачи:

1. Описать предельные законы, которые можно получить в случае, когда $r(t)$ убывает медленнее, чем $o(1/\ln t)$.

2. Доказать пуассоновскую предельную теорему для возможно более общего вида «редких» событий.

3. По аналогии с классической предельной теоремой Пуассона, найти к ней поправочные члены.

4. Найти необходимые и достаточные условия для выполнения пуассоновской предельной теоремы.

Все эти задачи были решены в той или иной мере в последние годы. Рассмотрим их по порядку.

В [127] Митталом и Илвисакером получен следующий результат.

Теорема 4.1. Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}_1$, (целочисленная решетка на прямой) — стационарная гауссовская последовательность, $MX(t) = 0$, ковариационная функция которой удовлетворяет для некоторого $\gamma \geq 0$ условиям: для любого $\varepsilon > 0$

$$\text{card}\{t: |r(t) \ln t - \gamma| > \varepsilon, 0 \leq t \leq T\} = o(T), \quad T \rightarrow \infty,$$

$$r(t) \ln t = O(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Тогда для любого x

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(a_T (\max_{[0, T]} X(t) - b_T) \leq x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-e^{-(x+\gamma-(2\gamma)^{1/2}v)}) \varphi(v) dv.$$

Здесь $a_T = (2 \ln T)^{1/2}$, $b_T = (2 \ln T)^{1/2} - \frac{\ln(4\pi \ln T)}{2\sqrt{2 \ln T}}$, $\text{card}(\cdot)$ — мощность множества.

Другими словами, вероятность отсутствия пересечений на отрезке $[0, T]$ уровня $u_T = b_T + x/a_T$ процессом $X(t)$ стремится к соответствующей вероятности для процесса Кокса (в данном случае — нормальной смеси пуассоновских). Заметим, что в случае $\gamma = 0$ имеется сходимость к пуассоновской вероятности отсутствия пересечений (к двойной экспоненте). В той же работе этот результат приводится и для непрерывного времени $T = R_1$.

Чтобы получить из теоремы 4.1 предельную теорему о слабой сходимости точечного процесса пересечений можно аналогичным способом доказать теорему 4.1 для набора нескольких отрезков $[0, T_1] \cup [T_1, T_2] \cup \dots$, и воспользоваться теоремой Калленберга [113]. Однако можно этого и не делать, поскольку вместо теоремы сравнения 1.4 можно воспользоваться теоремой 1.5, и сразу получить, что в тех же условиях имеет место слабая сходимость процесса выходов $(X(t) > u_T)$ (или $(X(t-1) \leq u_T, X(t) > u_T)$, см. об этом ниже) к процессу Кокса. В [52] приводится без доказательства аналог этого результата в непрерывном времени. Доказательство аналогично доказательству Миттала и Илвисакера, но с использованием теоремы 1.5 вместо 1.4. Поскольку в работе [75] Целе получил в

этом случае более общий результат, публикация доказательства утратила смысл. Заметим еще, что условия теоремы 4.1 в случае $\gamma=0$ чуть-чуть более слабые, чем сформулированные в начале параграфа, однако как будет видно из дальнейшего, необходимые и достаточные условия формулируются в несколько других терминах.

Миттал и Илвисакер [128] рассмотрели и случай еще более медленного убывания корреляции:

Теорема 4.2. Если функция $r(t)$ вогнута, для достаточно больших $t \in \mathbb{Z}_1$ $(r(t) \log t)^{-1}$ монотонна, $r(t) \rightarrow 0$, $(r(t) \log t)^{-1} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, то для всех x

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(r(T)^{-1/2} (\max_{[0, T]} X(t) - (1 - r(T))^{1/2} b_T) \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds.$$

Если же потребовать дополнительно, чтобы $(\log \log t)^2 \times \times (r(t) \log t)^{-1} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то можно подобрать последовательность гауссовских величин ζ_T так, чтобы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} r(T)^{-1/2} (\max_{[0, T]} X(t) - (1 - r(T))^{1/2} - \zeta_T) = 0$$

с вероятностью 1.

Основная идея доказательства теорем 4.1 и 4.2 следующая. Для данного T рассматривается гауссовский вектор $Y = (\sqrt{1 - \gamma_T} Y(k) + \sqrt{\gamma_T} Z)$, где $Y(k)$, $k=1, \dots, T$ и Z — стандартные независимые величины. Посчитать распределение максимума координат вектора Y не представляет труда. Далее с помощью теорем 1.4 (для теоремы 4.1) и 1.3 (для теоремы 4.2) производится сравнение распределений максимумов координат векторов Y (со специально подобранными γ_T) и $(X(1), \dots, X(T))$. В случае теоремы 4.1 доказывается при этом, что правая часть в неравенстве из теоремы 1.4 стремится к нулю. Поскольку эта правая часть мажорирует (с точностью до константы) и правую часть тождества из теоремы 1.5, то утверждения теорем 4.1 и 4.2 можно переформулировать и для любых событий (например, число пересечений, момент первого выхода и т. д.), связанных с соответствующим уровнем, и даже с несколькими уровнями. Аналогичные методы используются в [125] для исследования совместного распределения максимума гауссовской последовательности и ее подпоследовательности.

Берман [86] исследовал предельное поведение функционалов времени пребывания

$$L_t(u) = \int_0^t I_{(X(s) > u)} ds, \quad M_t(u) = \int_0^t I_{(|X(s)| > u)} ds$$

для стационарных процессов с корреляционной функцией $r(t)$ такой, что для некоторых $a > 0$, $0 < \delta < 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\delta} \int_0^t r(s)^a ds = \infty, \quad r(t) \geq 0$$

для достаточно больших t и $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$. Используемый им метод разложений функционалов по полиномам Эрмита в последнее время довольно популярен. Если $a = 2$ и $u = u(t)$ такая, что $u(t) \rightarrow \infty$, $u^2(t) = o(\log t)$, $u^2(t) = o(1/r(t^\beta))$, $t \rightarrow \infty$, $0 < \beta < \delta$, то величины

$$\frac{M_t(u) - 2t(1 - \Phi(u))}{2u\varphi(u) \left(\int_0^t (t-s) r^2(s) ds \right)^{1/2}}$$

и

$$\frac{\int_0^t (X^2(s) - 1) ds}{2 \left(\int_0^t (t-s) r^2(s) ds \right)^{1/2}} \quad (4.1)$$

$$\left(\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \varphi(s) ds \right)$$

имеют одно и то же предельное распределение при $t \rightarrow \infty$, т. е. если один из пределов существует, то существует и другой (равный первому [86]). В этой же статье этот предел вычислен при более жестких ограничениях на $r(t)$. Методы вычисления предельных распределений для функционалов типа (4.1) от сильно коррелированных процессов рассмотрены в нескольких работах [15, 98, 138, 139 и 140].

В статьях [75 и 76] Целе дал общее определение «редкого события, порожденного гауссовским векторным полем», и доказал предельную теорему Пуассона для них.

Пусть $X(t)$, $t \in T$ — однородное векторное поле со значениями в R_d , $d \geq 1$, с нулевым средним, причем T равняется либо Z_s , либо R_s , $s \geq 1$. Обозначим через $\tilde{r}(t)$ модуль максимального по модулю элемента матрицы взаимных ковариаций $X(t)$ и $X(0)$. Пусть $(A_n, n = 1, 2, \dots)$ — последовательность борелевских подмножеств R_d , m_n — измеримые функции из A_n в измеримое пространство (G, \mathcal{G}) (пространство меток). Введем маркированный точечный процесс Ψ_n на T с метками из G , порожденный тройкой (X, A_n, m_n) :

$$\Psi_n = \sum_{t: X(t) \in A_n} \delta_{(t, m_n(X(t)))}$$

Если Ψ_n имеет конечную интенсивность λ_n и $\lambda_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то этот процесс естественно назвать точечным процессом редких событий. Целе дал условия на слабую зависимость далеких событий из Ψ_n в терминах последовательности $a_n^2(\beta) = M(|X(0)|^2 \exp(\beta|X(0)|^2) | X(0) \in A_n)$, на многочисленных примерах показал, что эти условия слабее имеющихся ранее условий выполнения предельной теоремы Пуассона, и доказал слабую сходимость полученного из Ψ_n естественным нормированием точечного процесса к маркированному пуассоновскому. Метод доказательства в этих двух работах — метод моментов.

Однако метод моментов не приспособлен для получения поправочных членов в предельной теореме Пуассона. С другой стороны, естественный путь для получения поправочных членов дает теорема сравнения 1.5. В работах [53 и 55] проводится сравнение произвольной гауссовской стационарной последовательности $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}_1$, с последовательностью независимых гауссовских величин и оценивание правой части тождества теоремы 1.5 в случае, когда событие A имеет вид {число $n_X(T, u)$ событий вида « $X(t) > u$ » равно k , $t = 1, 2, \dots, T$ }.

Теорема 4.3. [53, 55]. Пусть для стационарного гауссовского процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}_1$ с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариацией $r(t)$ выполнены условия:

1. $r(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$;
2. $\exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \text{ card}(t: t = 1, 2, \dots, T, |r(t) \log t| > \varepsilon) = O(T^{1-\delta})$, $T \rightarrow \infty$.

Тогда

$$1. \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log T}{T} \sum_{t=1}^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) r(t) = 0;$$

$$2. \forall \nu > 0, \forall k \geq 0, k - \text{целое},$$

$$P(n_X(T, u_T) = k) = \frac{\mu_T^k e^{-\mu_T}}{k!} + \\ + 2\mu^2 (\pi_k - 2\pi_{k-1} + \pi_{k-2}) \sum_{t=1}^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) r(t) (1 + o(1)) + O(T^{-\nu}).$$

Здесь π_k — пуассоновская вероятность с параметром μ ,

$$u_T = b_T - (\ln \mu) / a_T, \quad \mu_T = T \int_{u_T}^{\infty} \varphi(s) ds,$$

$$\mu_T - \mu = O\left(\frac{(\ln \ln T)^2}{\ln T}\right), \quad T \rightarrow \infty.$$

В [55] приведены асимптотические разложения по степеням $\frac{(\ln \ln T)^k}{(\ln T)^l}$ для $\mu_T^k e^{-\mu_T} / k!$ Метод доказательства этого результата не зависит ни от размерности решетки ($T = \mathbb{Z}_\nu$), ни от того,

один или несколько уровней рассматривается, ни от наличия стационарности процесса $X(t)$. Существенным является лишь дискретность времени, т. е. что

$$\inf_{t, s: dX(t, s) > 0} dX(t, s) > 0.$$

В случае непрерывного времени также возможно получение теорем сравнения типа 1.6 для событий вида $\{N_x(T) = k\}$. Возможная схема доказательства в одномерном случае следующая. Пусть $T \rightarrow \infty$ и $u \rightarrow \infty$ таким образом, что $MN_x(T) = \mu$. Покажем сначала, что $P(N_x(T^{1-\alpha}) \geq 2) = O(T^{-\delta})$ для $\alpha > 0$ и некоторого $\delta = \delta(\alpha) > 0$. Это можно сделать как методом моментов, так и методом сравнения. Затем разобьем интервал $[0, T]$ на n интервалов длины $T^{1-\alpha}$, и приблизим вероятность события $\{N_x(T) = k\}$ суммой вероятностей событий вида $B_1 \bar{B}_2 B_3 \dots B_n$, для каждого из которых нетрудно применить теорему 1.6. (Здесь B_l — событие, что на l -м интервале нет пересечений, \bar{B}_l — ему противоположное, черточек — k штук). Сравнивать надо, как и в [54] с процессом с финитной корреляционной функцией. На таком пути можно получить следующее обобщение результатов из [25, 54]:

Теорема 4.4. Пусть $X(t)$ — гауссовский дважды дифференцируемый в ср. кв. стационарный процесс с нулевым сред-

ним, причем для некоторого $a > 0$ $\int_0^\infty |r(t)|^a dt < \infty$. Без огра-

ничения общности мы можем считать, что $MX(0)^2 = MX'(0)^2 = 1$. Тогда для любого $A > 0$ найдутся числа $C, \delta > 0$, зависящие от $r(\cdot)$ и a такие, что равномерно по $|x| \leq A$ и для любого подмножества B натуральных чисел (включая 0)

$$\left| P(N_x(T) \in B) - \sum_{k \in B} \pi_k(x) \right| \leq CT^{-\delta},$$

где $u = u_T(x) = \sqrt{2 \ln(T/2\pi)} + x/\sqrt{2 \ln(T/2\pi)}$,

$$\pi_k(x) = \frac{1}{k!} \exp\left(-kx - \frac{kx^2}{4 \ln(T/2\pi)}\right) \exp\left(-\exp\left(-x - \frac{x^2}{4 \ln(T/2\pi)}\right)\right).$$

Константы C и δ в принципе можно оценить. Утверждение имеет место и для $N_{|x|}(T)$ с заменой $\pi_k(x)$ на

$$\pi_k^1(x) = \frac{2^k}{k!} \exp\left(-kx - \frac{kx^2}{4 \ln(T/2\pi)}\right) \times \\ \times \exp\left(-2 \exp\left(-x - \frac{x^2}{4 \ln(T/2\pi)}\right)\right).$$

В. Д. Конаковым [24] получен результат, сходный с теоремой 4.3. В другой работе В. Д. Конаков [23] оценил скорость сходимости в предельной теореме для максимума гауссовского процесса с непрерывным временем, корреляционная

функция которого имеет вид $r(t) = 1 - C|t| + o(|t|)$, $t \rightarrow 0$. В [25] дан пример применения этих результатов для построения доверительных интервалов для неизвестной плотности при оценивании методом Парзена—Розенблатта. Предлагаемый в [25] метод построения доверительных полос по выборке объема n дает точность ширины полосы порядка $n^{-\delta}$, $\delta > 0$, в то время, как в применявшихся ранее способах эта точность имеет порядок $1/\ln n$ (это также показано в [25]), т. е. абсолютная точность примерно одинакова по порядку с самой шириной доверительной полосы. Эти же методы годятся для построения доверительных областей для многомерных плотностей и регрессионных поверхностей. Для этого можно использовать следующий, полученный на основании теорем 1.6 и 3.4, результат:

Теорема 4.5. Пусть для $X(t)$, $t \in R_n$, выполнены условия теоремы 1.6 и найдется $a > 0$ такое, что $\int_{R_n} |r(t)|^a dt < \infty$.

Пусть $T \uparrow R_n$ таким образом, что для всех $T \in R_n$ выполнены условия теоремы 1.6 и $|\partial T|/|T| = O(|T|^{-q})$ для некоторого $q > 0$, $|T|$ и $|\partial T|$ — n -мерный и $n-1$ -мерный объемы T и ∂T соответственно. Тогда найдется число $\delta > 0$ такое, что равномерно по x в любом компакте K

$$P(\max_T l_T(X(t) - l_T) \leq x) = \\ = \exp\left(-e^{-x - x^2/2l_T^2} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} h_m l_T^{-2m} \left(1 + \frac{x}{l_T}\right)^{n-2m-1}\right) + O(|T|^{-\delta}), \\ h_m = (-1)^m \frac{(n-1)!}{m! 2^m (n-2m-1)!},$$

l_T — корень уравнения

$$c_n |T| e^{-l_T^2/2} l_T^{n-1} = 1, \quad c_n = (2\pi)^{-1/2} (2\pi n)^{-n/2}, \\ l_T = \sqrt{2 \ln(c_n |T|)} \left(1 - \frac{(n-1) \ln \sqrt{2 \ln(c_n |T|)}}{2 \ln(c_n |T|)} + O\left(\frac{\ln \ln |T|}{(\ln |T|)^2}\right)\right).$$

Приводимые ниже утверждения 4.6 и 4.7 дают решение задачи о необходимых и достаточных условиях для пуассоновости высоких выбросов гауссовского процесса на произвольном параметрическом множестве T в случае дискретного времени (T — счетно).

Пусть задана последовательность $(X_n(t), t \in T)$, $n=1, 2, \dots$, гауссовских процессов на счетном множестве T и последовательность неотрицательных числовых функций $(u_n(t), t \in T)$, $n=1, 2, \dots$. Обозначим $r_n(t, s) = MX_n(t)X_n(s)$, $r_n(t, t) = \sigma_n^2(t)$. Считаем для удобства, что $MX_n(t) = 0$. Предположим, что для всех $t \in T$ $u_n(t)/\sigma_n(t) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, тогда события $A_{n,t} = \{|X_n(t)| > u_n(t)\}$ и $B_{n,t} = \{X_n(t) > u_n(t)\}$ являются редкими. Пусть $\mathcal{E} =$

локально компактное хаусдорфово пространство со второй аксиомой счетности, \mathfrak{B} — σ -кольцо ограниченных борелевских множеств на нем, \mathfrak{X} — кольцо конечных подмножеств множества T . Введем класс \mathfrak{F} измеримых в обе стороны относительно \mathfrak{B} и \mathfrak{X} отображений множества T в \mathfrak{X} . Рассмотрим случайные точечные процессы на \mathfrak{X} :

$$\xi_n(B) = \sum_{t \in f_n^{-1}(B)} I_{A_n, t}, \quad B \in \mathfrak{B}, \quad f_n \in \mathfrak{F},$$

$n = 1, 2, \dots$. Обозначим $m_n(B) = M\xi_n(B)$, $d_n(B) = D\xi_n(B)$. Обе эти величины конечны для любых $B \in \mathfrak{B}$ и m_n является мерой на \mathfrak{X} . Без ограничения общности можно считать, что $\sigma_n(t) > 0$ для всех n и t . Действительно, если выбросить все $X_n(t)$, для которых $\sigma_n(t) = 0$, то полученный процесс $\xi_n(B)$ будет являться версией исходного. Обозначим $u_n'(t) = u_n(t)/\sigma_n(t)$, $X_n'(t) = X_n(t)/\sigma_n(t)$. Для последовательности $v_n = v_n(t, s)$, $|v_n| \leq 1$, $t, s \in T$, введем функционалы

$$\Phi(v_n, B) = \sum_{t, s \in f_n^{-1}(B)} v_n(t, s) \int_0^1 \varphi(u_n'(t), u_n'(s), hv_n(t, s)) dh,$$

$$\Phi_\varepsilon(v_n, B) = \sum_{\substack{t, s \in f_n^{-1}(B), \\ u_n(t)u_n(s)v_n(t, s) \geq \varepsilon}} v_n(t, s) \int_\varepsilon^1 \varphi(u_n'(t), u_n'(s), hv_n(t, s)) dh.$$

Теорема 4.6. Пусть π — пуассоновский случайный точечный процесс на \mathfrak{X} с мерой интенсивности m на \mathfrak{B} и $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$ — ДС-кольцо (см. [112]) такое, что $\forall L \in \mathfrak{L} \pi(\partial L) = 0$ п. н. Тогда для любой последовательности $f_n \in \mathfrak{F}$ следующие утверждения эквивалентны (r' — ковариация процесса X'):

1. $\xi_n \xrightarrow{w} \pi$ (\rightarrow слабая сходимость);
2. $\forall L \in \mathfrak{L} \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(L) = m(L)$;
3. $\forall L \in \mathfrak{L} \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(L) = m(L)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(|r_n'(t, s)|, L) = 0$;
4. $\forall L \in \mathfrak{L} \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(L) = m(L)$ и $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_\varepsilon(|r_n'(t, s)|, L) = 0$.

Доказательство. 1. « $\exists \Rightarrow 1$ ». Покажем, что распределение величины $\xi_n(L)$ стремится к пуассоновскому с параметром $m(L)$. Отсюда по теореме Калленберга будет следовать утверждение. Из теоремы 1.5 следует, что для любого целого $k \geq 0$

$$|P(\xi_n(L) = k) - P(\zeta_n(L) = k)| \leq 4\Phi(|r_n'(t, s)|, L), \quad (4.2)$$

где $\zeta_n(L) = \sum_{t \in f_n^{-1}(L)} I_{(|Z(t)| > u_n(t))}$, $Z(t)$, $t \in T$, — набор стандартных гауссовских величин. К процессу $\zeta_n(L)$ применима классическая

предельная теорема Пуассона (см. Боровков А. А., Теория вероятностей. М., Наука, 1976). Для ее выполнимости достаточно, чтобы

$$\sum_{t \in \mathcal{I}_n^{-1}(L)} (MI_{(|z(t)| > u'_n(t))})^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(Поскольку $\sum MI_{(|z(t)| > u'_n(t))} = m_n(L) \rightarrow m(L)$). Так как по условию $u'_n(t) \rightarrow \infty$, то это утверждение следует из теоремы Лебега о мажорантной сходимости.

2. «3 \Rightarrow 4» — очевидно.

3. «4 \Rightarrow 3». Имеем, обозначая $u = u'_n(t)$, $v = u'_n(s)$, $r = |r'_n(t, s)|$,

$$\begin{aligned} & \sum_{uvr < \varepsilon} r \int_0^1 \frac{1}{2\pi \sqrt{1-h^2r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{u^2 + v^2 - 2uvrh}{1-h^2r^2}\right) dh \leq \\ & \leq \sum_{uvr < \varepsilon} \frac{1}{2\pi uv} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} uvr \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{h^2r^2(u^2+v^2) - 2uvrh}{1-h^2r^2}\right) dh \leq \\ & \leq \sum_{uvr < \varepsilon} \frac{1}{2\pi uv} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \cdot \varepsilon \cdot K. \end{aligned}$$

Интеграл под суммой равномерно ограничен, поскольку $r^2(u^2+v^2) \geq 0$, а $uvrh < \varepsilon$. Последнее выражение не превосходит величины $2m_n(L)^2 \varepsilon K$ (для достаточно больших n). Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{uvr \geq \varepsilon} r \int_0^1 \varphi dh &= \sum_{uvr \geq \varepsilon} r \left(\int_0^{\varepsilon/uvr} \varphi dh + \int_{\varepsilon/uvr}^1 \varphi dh \right) = \\ &= \sum_{uvr \geq \varepsilon, r \neq 0} r \int_0^{\varepsilon/uvr} \varphi dh + \sum_{uvr \geq \varepsilon} \int_{\varepsilon/uvr}^1 \varphi dh. \end{aligned}$$

Вторая сумма есть Φ_ε и стремится к нулю по условию. Для первой имеем при $r \neq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2\pi} \int_0^{\varepsilon/uvr} \frac{1}{\sqrt{1-h^2r^2}} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2 - 2uvhr}{1-h^2r^2}\right) dh = \\ &= \frac{1}{2\pi uv} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} uvr \int_0^{\varepsilon/uvr} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{h^2r^2(u^2+v^2) - 2uvhr}{1-h^2r^2}\right) dh = \\ &= \frac{1}{2\pi uv} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \int_0^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{u^2 + v^2}{u^2v^2} s^2 - 2s\right) ds. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция равномерно ограничена, то суммирование дает оценку $2m_n(L)^2 \varepsilon K_1$, что и требовалось доказать, поскольку ε произвольно.

4. «2 \Rightarrow 4». Имеем

$$\begin{aligned} D \sum_{t \in I_n^{-1}(L)} I_{A_n, t} &= \sum_t D I_{A_n, t} + \sum_{t \neq s} \text{cov}(I_{A_n, t}, I_{A_n, s}) = \\ &= \sum_t P(A_{n, t}) - \sum_t P(A_{n, t})^2 + \sum_{t \neq s} \text{cov}(I_{A_n, t}, I_{A_n, s}). \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_t P(A_{n, t}) \rightarrow m(L)$, $\sum_t P(A_{n, t})^2 \rightarrow 0$, то следовательно,

$\sum_{t \neq s} \text{cov}(I_{A_n, t}, I_{A_n, s}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем, далее,

$$\begin{aligned} \text{cov}(I_{A_n, t}, I_{A_n, s}) &= P(A_{n, t} A_{n, s}) - P(A_{n, t}) P(A_{n, s}) = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dh} P(|X_{n, h}(t)| > u_n'(t), |X_{n, h}(s)| > u_n'(s)) dh, \end{aligned}$$

где $X_{n, h}(t) = \sqrt{h} X_n'(t) + \sqrt{1-h} Z(t)$ (предполагается, что $Z(t)$ не зависит от $(X_n'(t), t \in T)$). Последний интеграл равен в силу симметрии

$$\begin{aligned} &2 \int_0^1 \frac{d}{dh} (P(X_{n, h}(t) > u_n'(t), X_{n, h}(s) > u_n'(s)) + \\ &+ P(X_{n, h}(t) > u_n'(t), -X_{n, h}(s) > u_n'(s))) dh. \end{aligned}$$

Вышеприведенное выражение не зависит от знака $r = r_n(t, s)$, будем для определенности считать $r \geq 0$. Имеем тогда, что

$$\begin{aligned} \text{cov}(I_{A_n, t}, I_{A_n, s}) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-h^2 r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{u^2 + v^2 - 2uvhr}{1-h^2 r^2}\right) \times \\ &\times \left(1 - \exp\left(-\frac{2uvhr}{1-h^2 r^2}\right)\right) dh \geq \\ &\geq \frac{2}{2\pi} \int_{\varepsilon/uvr}^1 \frac{r}{\sqrt{1-h^2 r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{u^2 + v^2 - 2uvhr}{1-h^2 r^2}\right) \times \\ &\times \left(1 - \exp\left(-\frac{2uvhr}{1-h^2 r^2}\right)\right) dh \geq 2(1 - e^{-2\varepsilon}) \int_{\varepsilon/uvr}^1 \varphi(u, v, hr) dh. \end{aligned}$$

Суммируя по $uvr \geq \varepsilon$, получаем, что $\Phi_\varepsilon \rightarrow 0$.

5. «1 \Rightarrow 2». Очевидно, поскольку для всех $L \in \mathfrak{S}$ $d_n(L) < \infty$ и $m_n(L) < \infty$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случайные точечные процессы на \mathcal{X}

$$\xi_n^1(B) = \sum_{t \in f_n^{-1}(B)} I_{B_n, t}, \quad B \in \mathcal{B}, f_n \in \mathcal{F}.$$

Соответствующие параметры обозначим m_n^1 и d_n^1 .

Теорема 4.7. Пусть

$$\limsup_n \sup_{t \neq s} \frac{u_n'(t)^2 + u_n'(s)^2}{2u_n'(t)u_n'(s)} r_n'(t, s) < 1.$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 4.3 с заменой ξ_n , m_n , d_n , $|r_n'(t, s)|$ на ξ_n^1 , m_n^1 , d_n^1 , $r_n'(t, s)^+$ соответственно ($a^+ = \max(a, 0)$).

Доказательство. Достаточно доказать лишь утверждение $\ll 2 \Rightarrow 4 \gg$. Имеем, полагая $r = r_n'(t, s)$, $u = u_n'(t)$, $v = u_n'(s)$,

$$\begin{aligned} & \sum_{t \neq s} \text{cov}(I_{B_n, t}, I_{B_n, s}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_r r \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-h^2r^2}} \exp\left(-\frac{u^2+v^2-2uvrh}{2(1-h^2r^2)}\right) dh = \\ &= \sum_{r>0} r \int_0^1 \varphi dh - \frac{1}{2\pi} \sum_{r<0} |r| \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-h^2r^2}} \exp\left(-\frac{u^2+v^2-2uvrh}{2(1-h^2r^2)}\right) dh \geq \\ &\geq \sum_{r>0} r \int_0^1 \varphi dh + \frac{1}{2\pi} \sum_{r<0} r \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-h^2r^2}} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} dh. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно

$$\sum_{\substack{r<0, \\ t, s \in f_n^{-1}(L), t \neq s}} \text{cov}(I_{(X_n'(t)>0)}, I_{(X_n'(s)>0)}) e^{-\frac{u_n'(t)^2}{2}} e^{-\frac{u_n'(s)^2}{2}}.$$

В силу неотрицательной определенности это слагаемое не превосходит суммы

$$-\sum_{r>0} \text{cov}(I_{(X_n'(t)>0)}, I_{(X_n'(s)>0)}) e^{-\frac{1}{2}(u_n'(t)^2 + u_n'(s)^2)},$$

а эта сумма в свою очередь равна

$$\begin{aligned} & - \sum_{r>0, t \neq s} \frac{r}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-h^2r^2}} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} dh - \\ & - \sum_{t \in f_n^{-1}(L)} (DI_{(X_n'(t)>0)}) e^{-u^2}. \end{aligned}$$

Дисперсии в вычитаемом не зависят от n и t , следовательно, оно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (Учитываем, что $m_n(L) \rightarrow m(L)$), обозначим его (вычитаемое) через $-\alpha_n$. Итак, цепочку (4.3) можно продолжить следующим образом

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{r \geq 0} r \int_0^1 \varphi dh - \sum_{r \geq 0} r \int_0^1 \frac{1}{2\pi \sqrt{1-h^2 r^2}} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} dh + \\ &+ \alpha_n = \sum_{r \geq 0} r \int_0^1 \varphi \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}(u^2+v^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{u^2+v^2-2uvrh}{1-h^2 r^2} \right) \right) \right) dh + \\ &+ \alpha_n \geq \sum_{r \geq 0} r \int_0^1 \varphi \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{2ruvh}{1-h^2 r^2} (1-q)\right) \right) dh + \alpha_n, \end{aligned}$$

где через q обозначен верхний предел в формулировке теоремы. Последнее выражение мажорирует для любого ε величину

$$\begin{aligned} \alpha_n + \sum_{r \geq \varepsilon/uvr} \int_0^1 \varphi \cdot (1 - e^{-\varepsilon(1-q)}) dh &\geq \alpha_n + \\ &+ (1 - e^{-\varepsilon(1-q)}) \sum_{ruv \geq \varepsilon} r \int_0^1 \varphi dh. \end{aligned}$$

Последняя сумма есть в точности $\Phi_\varepsilon(r_n'(t, s)^+, L)$. Теорема доказана.

Заметим, что в случае $u_n(t) \equiv u_n$ условие теоремы 5.1.2 означает, что $\limsup_n \sup_{t \neq s} r_n'(t, s) < 1$. В случае симметричного события $A_{n,t}$ это условие не требуется. Теоремы 5.1.1 и 5.1.2 говорят о том, что видимо и для более широкого класса редких событий от гауссовского процесса (возможно, и с непрерывным временем) имеет место утверждение: слабая сходимость к пуассоновскому пределу имеет место тогда и только тогда, когда m_n и d_n сходятся к одной и той же мере (т. е., дисперсия и среднее стремятся к одному и тому же числу).

Класс рассматриваемых в теоремах 5.1.1 и 5.1.2 событий можно немедленно расширить на события вида $C_{n,t} \cap A_{n,t}$ и $D_{n,t} \cap B_{n,t}$ потребовав лишь, чтобы $P(C_{n,t} | A_{n,t})$ и $P(D_{n,t} | B_{n,t})$ стремились к единице равномерно по t . (В стационарном случае это могут быть, например, события вида $(X_n(t-t_k) < u, k=1, \dots, l, X_n(t) > u)$, l фиксировано).

В случае гауссовской стационарной последовательности с единичной дисперсией естественным нормировочным отображением является функция $f(t) = t((2\pi)^{-1/2} u^{-1} \exp(-u^2/2))$, $t=0, \pm 1, \dots, u_n = u \rightarrow \infty$. Тогда $m_n(L) = m_u(L) \rightarrow 2V(L)$, $m_n^{-1}(L) = m_u^{-1}(L) \rightarrow V(L)$, $u \rightarrow \infty$, V — мера Лебега, и для того, чтобы

$\xi_u^w \rightarrow \pi_2$ или $\xi_u^w \rightarrow \pi_1$ (π_a — пуассоновский точечный процесс на прямой с интенсивностью a) необходимо и достаточно, чтобы $D\xi_u^w([0, 1]) \rightarrow 2$ или $D\xi_u^w([0, 1]) \rightarrow 1$ соответственно. В терминах корреляционной функции $r(t)$ эти условия выглядят следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sum_{t=1}^n \frac{n-t}{\sqrt{1+\rho_k}} \left(\left(\frac{N}{\ln N} \right)^{\frac{2\rho_k}{1+\rho_k}} - 1 \right) = 0, \quad (4.4)$$

где $\rho_k = |r(k)|$ в первом случае (для сходимости $\xi_u^w \rightarrow \pi_2$) и $\rho_k = r(k)^+$ — во втором ($\xi_u^w \rightarrow \pi_1$). Заметим, что в работе [56] имеется неточность в определении функционалов Φ и Φ_* , поэтому в формулировках теоремы 3 и следствия 2 из [56] следует добавить слова: «и с заменой $|r|$ на r^+ в определении функционалов Φ и Φ_* ». Кроме того, в утверждении 4 следствия 1 из [56] имеется опечатка: из экспоненты необходимо вычесть единицу (подобно соотношению (4.4)).

В последнее время появились несколько работ, обобщающих пуассоновскую предельную теорему для больших выбросов и предельную теорему для максимума на нестационарный случай. К ним относятся работы И. К. Мацака [41] (пуассоновская предельная теорема), Т. Л. Малевич и Н. Тошова [36, 37] (предельная теорема для максимума). У последних авторов имеются также обобщения на поля, строгие предельные теоремы для максимумов [35, 36].

В работах [107, 108] доказана предельная теорема для момента первого выхода гауссовской стационарной последовательности $X(t)$, $t=1, 2, \dots$, за наклонную прямую $-\beta t$, $\beta > 0$, $\beta \rightarrow 0$. В работах [89, 90] результаты Миттала и Илвисакера обобщаются на максимум относительно выборочного среднего $\left(\max_{1 \leq t \leq T} X(t) - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \right)$. Метод доказательства — метод сравнения.

Красивыми являются сообщения на векторные процессы. Они позволяют получать, например, пуассоновскую предельную теорему для больших выбросов χ^2 -процесса ([118, 120, 136]). В работе [120] приводится большое число примеров применения таких теорем. Заметим, что все они укладываются в общую схему работ Целе [75, 76].

В работе Бермана [87] продолжается изучение функционала времени пребывания $\varphi \int_0^t I_{(X(s) > u)} ds$, $t \rightarrow \infty$, для которого доказана предельная теорема (φ — нормирующий множитель). Для предельного закона вычислено преобразование Лапласа —

Стилтьеса (в условиях $r(t) \log t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $r(t)$ правильно меняется в нуле с показателем $\alpha > 0$).

В работах Ю. К. Беляева, А. Х. Симоняна, О. В. Селезнева ([4, 61, 62]) по приближению траекторий гауссовского процесса процессами, зависящими от конечного числа случайных величин, появилась новая постановка задачи о пуассоновости больших выбросов: имеется серия гауссовских процессов $X_n(t)$, $t \in R_1$, корреляции которых могут и не стремиться к нулю, рассмотрим условный процесс $\tilde{X}(t)$, полученный из исходного при условии $X(1) = X(2) = \dots = 0$ (условия могут быть и другими). Тогда при очень широких условиях распределение числа событий $\max_{k=1, \dots, n} X(t) > h$, $k=1, \dots, n$, стремится при

[$k, k+1$]
согласованном изменении h и n к пуассоновскому.

Как и в случае винеровского процесса, практически любой результат по локальному закону повторного логарифма может быть переформулирован как закон повторного логарифма на бесконечности. Здесь интересными являются работы, посвященные стационарным процессам, где такое перенесение не тривиально (см. [134, 143, 144]).

§ 5. МОМЕНТЫ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ, ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Различные приложения теории случайных процессов довольно часто основаны на вычислении моментов числа пересечений процессом некоторого уровня. Например, встречающаяся в приложениях вероятность невыхода за некоторый уровень может быть аппроксимирована так называемым рядом Райса, членами которого являются факториальные моменты числа пересечений. Формулы для факториальных моментов известны давно (см. монографию [26] и дополнение Ю. К. Беляева к ней), однако число работ, в которых рассматриваются задачи существования моментов или сходимости рядов Райса, или другие, связанные с этими, задачи, продолжает расти. Вопрос о существовании моментов числа пересечений сводится к возможно более точному оцениванию сверху и снизу порядка вырождения определителя ковариационной матрицы вектора $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ (или вектора $(X(t_1), \dots, X(t_n), X'(t_n))$, когда $t_i - t_j \rightarrow 0$ для некоторых i и j).

Исследование этого определителя привело к понятию локальной регулярности гауссовского процесса [43], к исследованию этого нового класса. Р. Н. Мирошиным и его учениками проведено подробное исследование класса локально регулярных процессов, а также классов марковских и возвратных гауссовских стационарных процессов и локально марковских гауссовских процессов [44, 45, 46, 12, 13, 74]. Последние два класса появились в связи с исследованием условий сходимости рядов Райса. В случае локальной регулярности процесса $X(t)$,

условия (даже необходимые и достаточные) конечности моментов формулируются в терминах корреляционной функции $h(t)$ процесса $X^{(n)}(t)$ (если $n+1$ -я производная не существует). В работах [32 и 91] независимо появился другой способ оценивания определителя $R(t_1, \dots, t_n)$ вектора $(X(t_i), i=1, \dots, n)$, основанный на следующем соображении: отношение $R(t_1, \dots, t_n)/R(t_1, \dots, t_{n-1})$ есть ошибка линейного прогноза в точке t_n по значениям в точках t_1, \dots, t_{n-1} . Полученные неравенства для R формулируются поэтому в терминах спектра процесса $X(t)$. Один из полученных результатов следующий:

Теорема 5.1. Пусть спектральная функция процесса $X(t)$ абсолютно непрерывна, а ее плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

$$\inf_{|\lambda| \leq \Lambda} f(\lambda) > 0 \text{ для любого } \Lambda < \infty,$$

$$f(\lambda) \sim |\lambda|^{-3} (\ln |\lambda|)^{-2-\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда для конечности m -го момента числа нулей гауссовского процесса, $m \geq 3$ достаточно [32, 91] выполнение неравенства $\gamma \geq \frac{3}{2}(m-2)$ и необходимо [32] выполнение неравенства $\gamma > \max(0, \frac{1}{2}(m-2) - 1)$.

Получению неравенств для моментов типа $M(N_X(T) - MN_X(T))^{2m} \leq CT^m$ посвящены работы [33, 34]. Такие неравенства позволяют оценить скорость сходимости в центральной предельной теореме для числа пересечений.

В работах [6, 7, 103, 121] выводятся формулы для совместных моментов пересечений нескольких уровней, или несколькими процессами, обобщения на нестационарные процессы.

Интересная задача ставится в работе [135]. Как зависит дисперсия числа пересечений от высоты уровня? (см. также теорему 3.6). К сожалению, в работе [135] имеются ошибочные допущения (см. реферат В. П. Носко этой работы).

Вопросам статистики гауссовских процессов, основанным на теории пересечений уровня, посвящены работы [92, 116, 117, 119]. Эта тематика несомненно будет развиваться и далее, поскольку имеет большое прикладное значение. Например, в прикладной литературе нередко используется статистика $T^{-1}N_X(T)$ для оценивания частоты $\gamma = MX'(0)^2/MX(0)^2$ гауссовского стационарного процесса. Поэтому важной является задача исследования статистических свойств этой оценки и устойчивости этих свойств относительно изменения уровня, нарушения гауссовости, стационарности, и т. п. Обозначим через $\tau_X(u, T)$ время пребывания процесса $X(t)$ выше уровня u на отрезке $[0, T]$. В работе [92] доказана асимптотическая нормальность вектора $(T^{-1/2}N_X(T), T^{-1/2}\tau_X(u, T))$ для гауссовского стационарного процесса $X(t)$ для которого $r(t)$,

$$r''(t) \in L_2(-\infty, +\infty),$$

$$\int_0^1 t^{-1} M(X'(t) - X'(0))^2 dt < \infty$$

и $\liminf_{T \rightarrow \infty} DN_X(T)/T > 0$. Там же исследуются свойства оценки

$$\hat{v} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varphi(\Phi^{-1}(T^{-1}\tau_X(u, T)))} \cdot \frac{N_X(T)}{T}.$$

Доказана состоятельность этой оценки, вычислено смещение (при $T \rightarrow \infty$). Поскольку величина $\Phi^{-1}(T^{-1}\tau_X(u, T))$ является состоятельной оценкой для $u^2/MX(0)^2$, то эта оценка может применяться при неизвестном уровне u . Однако более подробных исследований в [92] не приводится. Важной является также задача статистики квантованных процессов, т. е. оценивания различных характеристик процесса, прогноза и фильтрации по наблюдаемым пересечениям нескольких уровней, а также аналогичные задачи для случайных полей.

§ 6. ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДА ЗА ФИКСИРОВАННЫЙ УРОВЕНЬ. ЗАДАЧА О ПРОТЕКАНИИ

С. А. Молчановым и А. К. Степановым [47] решена задача о протекании для линий достаточно высокого уровня гауссовского однородного поля. Пусть $X(t)$, $t \in R_n$, — гауссовское однородное поле с нулевым средним. Будем говорить, что на уровне u имеется протекание, если существует бесконечная последовательность областей Γ_i^\pm , $i=1, 2, \dots$, с гладкими границами $\partial\Gamma_i^\pm$, гомеоморфными сфере в R_n , таких, что

- 1) $0 \in \Gamma_i^\pm$, $i=1, 2, \dots$;
- 2) $\Gamma_1^- \subset \Gamma_1^+ \subset \Gamma_2^- \subset \Gamma_2^+ \subset \dots$, $\Gamma_i^- \uparrow R_n$;
- 3) $\min_{t \in \partial\Gamma_i^-, s \in \partial\Gamma_i^+} |t-s| \geq c_1 > 0$, $i=1, 2, \dots$;

4) $X_t < u$ для всех t из $S_i = \Gamma_i^+ \setminus \Gamma_i^-$, $i=1, 2, \dots$. Очевидным образом аналогично определяется протекание и для полей на решетке Z_n .

Теорема 6.1 [47]. Если X_t , $t \in Z_n$, — гауссовское однородное поле и $\sum_{\tau \in Z_n} |r(\tau)| < \infty$, то для любого $c_1 > 0$ с вероятностью 1 существует уровень протекания $u_0 > 0$. Если X_t , $t \in R_n$, — гауссовское однородное поле с ограниченными траекториями и существует функция $h(x)$, $x \in R^+$ такая, что $|r(\tau)| \leq h(|\tau|)$, $h(x) \downarrow 0$, $x \downarrow 0$, и $\int_0^\infty x^{n-1} h(x) dx < \infty$, то для любого c_1 п. н. существует уровень протекания $u_1 > 0$.

В [47] приводятся еще несколько утверждений относительно структуры множества $(X_t \geq u)$.

Одним из основных пунктов доказательства теоремы 6.1 являются оценки вида

$$P(X_t \geq u, t \in A) \leq C(1 - \Phi(u))^{|A|}, \quad \beta > 0,$$

где $|A|$ — число точек в A , или объем A в зависимости от того $t \in \mathbb{Z}_n$ или $t \in \mathbb{R}_n$. Методам получения таких оценок, основанных на фундаментальных оценках В. А. Малышева [38] посвящена работа [48]. Видимо, для достаточно широкого класса гауссовских полей возможно получение точной асимптотики при $|A| \rightarrow \infty$ приведенной выше вероятности. См. также работы [31, 50]. Отметим, что задача об определении точной нижней грани для уровней протекания $u_1 > 0$ не решена даже для случая независимых значений поля. Имеются лишь числовые эксперименты по определению этого числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллева Ю. К.*, О неограниченности выборочных функций гауссовских процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 3, 351—354 (РЖМат, 1959, 10207)
2. —, О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом. II. Теория вероятностей и ее применения, 1967, 12, № 3, 444—457 (РЖМат, 1968, 4В77)
3. —, *Питербарг В. И.*, Асимптотика среднего числа A -точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень. Докл. АН СССР, 1972, 203, № 1, 9—12 (РЖМат, 1972, 7В120)
4. —, *Симолян А. Х.*, Асимптотические свойства уклонений реализации гауссовского процесса от аппроксимирующей ломаной при уменьшении шага квантований. Случ. процессы и поля, М., 1979, 9—21 (РЖМат, 1981, 2В87)
5. *Берман С.*, Времена пребывания и экстремумы гауссовских процессов. Случайн. процессы. М., 1978, 164—203 (РЖМат, 1978, 10В74)
6. *Бильик М. Г.*, Статистические свойства превышений уровня периодически нестационарного процесса и периодически неоднородного поля. Отбор и передача информ. Респ. межвед. сб., 1977, № 52, 3—8 (РЖМат, 1978, 9В123)
7. —, Некоторые свойства экстремумов нестационарного гауссовского процесса. Отбор и передача информ. (Киев), 1979, № 56, 13—17 (РЖМат, 1979, 6В121)
8. *Булдыгин В. В.*, Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. Киев, Наук. думка, 1980, 239 с. (РЖМат, 1981, 1В16К)
9. *Вахания Н. Н.*, О соответствии между понятиями гауссовской меры и гауссовского процесса. Мат. заметки, 1979, 26, № 2, 293—297 (РЖМат, 1980, 1В164)
10. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.*, Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М., Наука, 1979, 424 с. (РЖМат, 1979, 12В109К)
11. *Волконский В. А., Розанов Ю. А.*, Некоторые предельные теоремы для случайных функций. I. Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 2, 186—207 (РЖМат, 1960, 9230)
12. *Геодаков Н. А.*, Локально марковское свойство гауссовских стационарных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 4, 854—858 (РЖМат, 1980, 3В132)

13. —, Локально марковское свойство процессов класса $(2k+1)$. Упр., надежность и навигация (Саранск), 1979, № 5, 165—168 (РЖМат, 1980, 3В133)
14. Го Х.-С., Гауссовские меры в банаховых пространствах. М., Мир, 1979, 176 с. (РЖМат, 1979, 9В92К)
15. Городецкий В. В., Принцип инвариантности для функций от стационарно связанных гауссовских величин. Проблемы теории вероятностных распределений. VI, Л., 1980, 32—44
16. Давыдов Ю. А., Локальные времена для многопараметрических случайных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1978, 23, № 3, 594—605 (РЖМат, 1979, 2В164)
17. Дадли Р. М., Выборочные функции гауссовского процесса. Случайн. процессы, М., 1978, 7—62 (РЖМат, 1978, 10В71)
18. Дмитриевский В. А., Оценка распределения максимума гауссовского поля. Случ. процессы и поля. М., 1979, 22—31 (РЖМат, 1981, 2В100)
19. —, Условие ограниченности и оценки распределения максимума случайных полей на произвольных множествах. Докл. АН СССР, 1980, 253, № 2, 271—274 (РЖМат, 1980, 11В120)
20. Зинченко Н. М., О p -вариации гауссовских случайных полей. Теория вероятностей и мат. стат. Респ. межвед. науч. сб., 1978, № 19, 72—76 (РЖМат, 1978, 9В125)
21. Ибрагимов Н. А., О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса. Зап. науч. семинаров, Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, 85, 75—93 (РЖМат, 1979, 9В94)
22. —, Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы. М., Наука, 1970, 384 с. (РЖМат, 1970, 11В89К)
23. Конаков В. Д., Оценка скорости сходимости распределения максимума модуля дифференцируемого гауссовского процесса. Многомерн. стат. анализ. Мат. обеспеч. М., 1979, 101—115 (РЖМат, 1980, 9В35)
24. —, Асимптотические разложения для вероятностей больших выбросов гауссовских стационарных последовательностей. Многомерн. стат. анализ. Мат. обеспеч. М., 1979, 116—121 (РЖМат, 1980, 9В36)
25. —, Питербарг В. И., Большие выбросы гауссовских процессов и эмпирических плотностей. Теория вероятностей и ее применения, 1979, 3, 658—659
26. Крамер Г., Лидбеттер М. Р., Стационарные случайные процессы. М., Мир, 1969, 398 с. (РЖМат, 1970, 1В106)
27. Лифшиц М. А., Локальные времена для гауссовских процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1978, 23, № 4, 867—868
28. —, Перенос меры траекториями гауссовского стационарного процесса. Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 2, 432
29. —, О представлении полей Левн индикаторами. Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 3, 624—628 (РЖМат, 1980, 1В174)
30. —, Локальные времена для функций и гауссовских процессов. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, 85, 104—112 (РЖМат, 1979, 11В115)
31. Малевич Т. Л., О вероятности нахождения гауссовского стационарного процесса выше нулевого уровня. Вероятности. процессы и мат. стат. Ташкент, 1978, 79—87 (РЖМат, 1979, 1В151)
32. —, Об условиях конечности моментов числа нулей гауссовских стационарных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 4, 741—753 (РЖМат, 1980, 3В130)
33. —, Володина Л. Н., Неравенства для моментов числа нулей гауссовского стационарного процесса. I. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат., 1978, № 5, 30—36 (РЖМат, 1979, 6В120)
34. —, —, Неравенства для моментов числа нулей гауссовского стационарного процесса. II. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1979, № 2, 29—33 (РЖМат, 1979, 9В98)

35. —, *Тошов Н.*, О границах максимума однородного гауссовского поля. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1979, № 20, 76—90 (РЖМат, 1979, 7В127)
36. —, —, Об асимптотическом поведении максимума гауссовских процессов и полей. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1977, № 6, 8—10 (РЖМат, 1978, 1В141)
37. —, —, О максимуме гауссовского нестационарного процесса. Вероятности, процессы и мат. стат. Ташкент, 1978, 88—95 (РЖМат, 1979, 1В152)
38. *Мальшев В. А.*, Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля. Успехи мат. наук, 1980, 35, № 2, 3—53 (РЖМат, 1980, 7В257)
39. *Маргынoв Г. В.*, Вычисление функции нормального распределения. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет., 1979, 17, 57—84 (РЖМат, 1980, 4В6)
40. *Мацак И. К.*, Регулярность выборочных функций случайного процесса. Укр. мат. ж., 1978, 30, № 2, 241—247 (РЖМат, 1978, 12В169)
41. —, Асимптотические свойства гауссовских процессов. Укр. мат. ж., 1980, 32, № 3, 332—339 (РЖМат, 1980, 11В109)
42. *Мирошин Р. Н.*, Условия конечности моментов числа нулей для гауссовских стационарных процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1977, 22, № 3, 631—641 (РЖМат, 1978, 2В137)
43. —, Условия локальной регулярности для дифференцируемых гауссовских процессов. Теория вероятностей и ее применения, 1977, 22, № 4, 851—856 (РЖМат, 1978, 5В110)
44. —, Достаточное условие локальной регулярности первого порядка для гауссовских стационарных процессов. Вестн. ЛГУ, 1978, № 7, 98—106 (РЖМат, 1978, 12В168)
45. —, Марковские и возвратные стационарные гауссовские процессы второго порядка. Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 4, 847—853 (РЖМат, 1980, 3В129)
46. —, Об условиях локальной регулярности и конечности моментов числа нулей для дифференцируемого гауссовского стационарного процесса. Вестн. ЛГУ, 1980, № 7, 83—92 (РЖМат, 1980, 10В92)
47. *Молчанов С. А.*, *Степанов А. К.*, Всплески гауссовского поля над высоким уровнем. Докл. АН СССР, 1979, 249, № 2, 294—297 (РЖМат, 1980, 2В290)
48. —, —, Оценка В. А. Мальшева для моментов полиномов Вика и некоторые ее приложения. Случ. процессы и поля, М., 1979, 39—48
49. *Несененко Г. А.*, *Тюрин Ю. Н.*, Асимптотика статистики Колмогорова для непараметрического семейства. Докл. АН СССР, 1978, 239, № 6, 1292—1294 (РЖМат, 1978, 9В194)
50. *Носко В. П.*, Об определении числа выбросов случайного поля за фиксированный уровень. Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 3, 592—596 (РЖМат, 1980, 1В179)
51. *Островский Е. И.*, Монотонность гауссовских операторов. Случ. процессы и поля, М., 1979, 54—61 (РЖМат, 1981, 2В88)
52. *Питербарг В. И.*, Некоторые направления в исследовании свойств траекторий гауссовских случайных функций. Дополнение — обзор. Случайн. процессы, М., 1978, 258—280 (РЖМат, 1978, 12В163)
53. —, Асимптотические разложения для вероятностей больших выбросов гауссовских процессов. Докл. АН СССР, 1978, 242, № 6, 1248—1251 (РЖМат, 1979, 3В92)
54. —, Уточнение предельной теоремы для максимума гауссовского стационарного процесса. Случ. процессы и поля, М., 1979, 62—70 (РЖМат, 1981, 2В85)
55. —, Асимптотические разложения в предельной теореме Пуассона для больших выбросов гауссовской стационарной последовательности. Мат. заметки, 1980, 29, № 1, 131—144 (РЖМат, 1981, 4В41)
56. —, Предельная теорема Пуассона для больших выбросов гауссовской

- последовательности. Докл. АН СССР, 1981, 257, № 1, 48—50
57. —, *Присяжнюк В. П.*, Асимптотика вероятности большого выброса для гауссовского нестационарного процесса. Теория вероятностей и мат. стат. Респ. межвед. науч. сб., 1978, № 18, 121—134
 58. *Пликунас А.*, Оценки семинвариантов и большие уклонения для некоторых нелинейных преобразований стационарного гауссовского процесса. Лит. мат. сб., 1980, 20, № 2, 119—128 (РЖМат, 1980, 11В108)
 59. *Розанов Ю. А.*, Марковские случайные поля. М., Наука, 1981, 256 с.
 60. *Русakov А. А.*, Асимптотические оценки вероятности уклонения интегралов от слабо коррелированных гауссовских процессов. Случ. процессы и поля. М., 1979, 78—83 (РЖМат, 1981, 2В89)
 61. *Селезнев О. В.*, Приближение периодических гауссовских процессов тригонометрическими полиномами. Докл. АН СССР, 1980, 250, № 1, 35—38 (РЖМат, 1980, 6В100)
 62. —, О приближении непрерывных периодических гауссовских процессов случайными тригонометрическими полиномами. Случ. процессы и поля. М., 1979, 84—94 (РЖМат, 1981, 2В90)
 63. *Симолян А. X.*, О вероятности уклонения гауссовского случайного процесса от аппроксимирующей случайной кривой. Докл. АН АрмССР, 1978, 66, № 2, 84—90 (РЖМат, 1979, 2В157)
 64. *Синявский В. Ф.*, Нижняя граница для модуля непрерывности гауссовских однородных случайных полей. Вероятностные распределения в бесконечномерн. пространствах. Киев, 1978, 135—143 (РЖМат, 1979, 11В127)
 65. —, Верхняя граница модуля непрерывности выборочных функций гауссовских однородных случайных полей. Теория вероятностей и мат. стат., 1979, № 21, 148—152 (РЖМат, 1980, 2В138)
 66. —, О модуле непрерывности выборочных функций однородных гауссовских случайных полей. Докл. АН УССР, 1980, А, № 2, 22—24 (РЖМат, 1980, 7В97)
 67. —, Условия разрывности выборочных функций однородных гауссовских случайных полей. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1980, № 22, 131—135 (РЖМат, 1980, 7В98)
 68. Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. Сб. статей. Ред. Беляев Ю. К. М., Мир, 1978. 280 с. (РЖМат, 1978, 10В70К)
 69. *Судаков В. Н.*, Гауссовские случайные процессы и меры телесных углов и гильбертово пространство. Докл. АН СССР, 1971, 197, № 1, 43—45 (РЖМат, 1971, 6В106)
 70. —, Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1976, 141, 191 с. (РЖМат, 1977, 2В47)
 71. *Сытая Г. Н.*, О малых сферах гауссовских мер. В сб. «Вероятностные распределения в бесконечномерных пространствах», Киев, 1978, 154—171 (РЖМат, 1979, 11В113)
 72. *Тошов Н.*, Об асимптотической нормальности Z_n -характеристик превышения стационарного гауссовского процесса. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1978, № 2, 27—31 (РЖМат, 1979, 2В156)
 73. *Ферник К.*, Регулярность траекторий гауссовских случайных функций. Случайн. процессы. М., 1978, 63—122 (РЖМат, 1978, 10В75)
 74. *Халидов И. А.*, Гауссовские возвратные случайные процессы. Редкол. ж. «Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астрон.», Л., 1979. 16 стр. (Рукопись деп. в ВИНТИ 28 авг. 1979 г., № 3149—79 ДЕП.) (РЖМат, 1980, 1В165ДЕП)
 75. *Целе У.*, Асимптотическое поведение потока редких событий гауссовского поля. Докл. АН СССР, 1979, 249, № 3, 562—565 (РЖМат, 1980, 3В128)
 76. —, Предельная теорема Пуассона для редких событий гауссовской последовательности. Теория вероятностей и ее применения, 1980, 25, № 1, 92—104 (РЖМат, 1980, 7В32)
 77. *Цирельсон Б. С.*, Плотность распределения максимума гауссовского про-

- цесса. Теория вероятностей и ее применения, 1975, 20, № 4, 865—873 (ПЖМат, 1976, 6B116)
78. Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей. Киев, «Вища школа», 1980. 207 с. (ПЖМат, 1981, 2B98K)
 79. Adler R. J., Distributions results for the occupation measures of continuous Gaussian fields. Stochast. Process. and Appl., 1978, 7, № 3, 299—310 (ПЖМат, 1979, 2B166)
 80. —, On the envelope of a Gaussian random field. J. Appl. Probab., 1978, 15, № 3, 502—513 (ПЖМат, 1979, 6B135)
 81. Berman S. M., A law of large numbers for the maximum in a stationary Gaussian sequence. Ann. Math. Stat., 1962, 33, № 1, 93—97 (ПЖМат, 1963, 4B127)
 82. —, Limit theorems for the maximum term in stationary sequences. Ann. Math. Stat., 1964, 35, № 2, 502—516 (ПЖМат, 1965, 9B96)
 83. —, Asymptotic independence of the numbers of high and low level crossings of stationary Gaussian processes. Ann. Math. Stat., 1971, 42, № 3, 927—945 (ПЖМат, 1972, 2B97)
 84. —, A new kind of tightness of probability measures, and its applications to integral functionals of stochastic processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1978, 42, № 2, 155—165 (ПЖМат, 1978, 8B41)
 85. —, Gaussian processes with biconvex covariances. J. Multivar. Anal., 1978, 8, № 1, 30—44 (ПЖМат, 1978, 12B164)
 86. —, High level sojourns for strongly dependent Gaussian processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1979, 50, № 2, 223—236 (ПЖМат, 1980, 3B131)
 87. —, A compound Poisson limit for stationary sums, and sojourns of Gaussian processes. Ann. Probab., 1980, 8, № 3, 511—538 (ПЖМат, 1981, 2B81)
 88. —, Isotropic Gaussian processes on the Hilbert sphere. Ann. Probab., 1980, 8, № 6, 1093—1106
 89. Cuzick J., A lower bound for the prediction error of stationary Gaussian processes. Indiana Univ. Math. J., 1977, 26, № 3, 577—584 (ПЖМат, 1978, 3B89)
 90. —, Some local properties of Gaussian vector fields. Ann. Probab., 1978, 6, № 6, 984—994 (ПЖМат, 1979, 8B107)
 91. —, The Hausdorff dimension of the level sets of a Gaussian vector field. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1980, 51, № 3, 287—290 (ПЖМат, 1980, 10B97)
 92. —, Lindgren G., Frequency estimation from crossings of an unknown level. Biometrika, 1980, 67, № 1, 65—72 (ПЖМат, 1980, 8B131)
 93. Davies L. P., The exact Hausdorff measure of the zero set of certain stationary Gaussian processes. Ann. Probab., 1977, 5, № 5, 740—755 (ПЖМат, 1978, 7B130)
 94. Delporte J., Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé. Ann. Inst. H. Poincaré, 1964, 1, № 2, 8—215 (ПЖМат, 1967, 10B24)
 95. De Maré J., The behaviour of a non-differentiable stationary Gaussian process after a level crossings. Stochast. Process. and Appl., 1977, 6, № 1, 77—86 (ПЖМат, 1978, 7B131)
 96. Diebolt J., Sur la loi du maximum de certains processus gaussiens sur le tore. C. r. Acad. sci., 1980, AB290, № 19, A913—A915 (ПЖМат, 1981, 2B84)
 97. Dobrushin R. L., Major P., Non-central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1979, 50, № 1, 27—52 (ПЖМат, 1980, 3B259)
 98. Dudley R. M., The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. J. Funct. Analysis, 1967, 1, № 3, 290—330 (ПЖМат, 1969, 6B788)
 99. —, Lower layers in R^2 and convex sets in R^3 are not GB classes. Lect.

- Notes. Math., 1979, 709, 97—102 (PJKMar, 1980, 1B159)
100. *Fernique X.*, Évaluations des processus gaussiens. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, 91—100 (PJKMar, 1978, 5B112)
 101. —, Characterisation de processus a trajectoires majorees ou continues. Lect. Notes Math., 1978, 649, 691—706 (PJKMar, 1979, 2B151)
 102. —, Random functions and Orlicz's method regularity of paths and limit properties. Lect. Notes Math., 1978, 656, 31—36 (PJKMar, 1979, 5B156)
 103. *Fiieger W.*, Die Anzahl der Kreuzungspunkte einer Funktion mit einem Gausschen Prozess. Trans. 7-th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decision Funct., Random Process. and 1974. Eur. Meet. Statist., Prague 1974. Vol. A. Prague, 1977, 135—146 (PJKMar, 1978, 5B111)
 104. *Hebbar H. V.*, Almost sure limit points of maxima of stationary Gaussian sequences. Ann. Probab., 1980, 8, № 2, 393—399 (PJKMar, 1980, 12B127)
 105. *Hoffmann-Jørgensen J., Shepp L. A., Dudley R. M.*, On the lower tail of Gaussian seminorms. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1976—1977 (1977), № 40, 40 pp. (PJKMar, 1978, 5B104)
 106. —, —, —, On the lower tail of Gaussian seminorms. Ann. Probab., 1979, 7, № 2, 319—342 (PJKMar, 1979, 12B147)
 107. *Hüsler J.*, On limit distributions of first crossing point of Gaussian sequences. Stochast. Process. and Appl., 1977, 6, № 1, 65—75 (PJKMar, 1978, 7B133)
 108. —, Almost sure limiting behaviour of first crossing points of Gaussian sequences. Stochast. Process. and Appl., 1979, 8, № 3, 315—321 (PJKMar, 1979, 12B150)
 109. *Hwang Chii-Ruey*, Gaussian measure of large balls in a Hilbert space. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, 78, № 1, 107—110 (PJKMar, 1980, 9B119)
 110. *Jaimez R., Kawada Takayuki*, A comparison theorem of Marcus-Shepp in the uniform continuity of Gaussian processes. Trab. estadist. y invest. oper., 1979, 30, № 1, 83—88 (PJKMar, 1980, 8B34)
 111. *Jain N. C., Marcus M. B.*, Continuity of subgaussian processes. Probab. Banach Spaces. New York—Basel, 1978, 81—196 (PJKMar, 1979, 6B119)
 112. *Kallenberg O.*, Characterization and convergence of random measures and point processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1973, 27, № 1, 9—21 (PJKMar, 1974, 2B134)
 113. *Kawada Takayuki*, Maximum in the Lévy-Baxter theorem for Gaussian random fields. Ann. Probab., 1979, 7, № 1, 173—178 (PJKMar, 1980, 1B176)
 114. *Kôno N.*, Holder conditions for the local times of certain gaussian processes with stationary increments. Proc. Jap. Acad. A, 1977, 53, № 3, 84—87 (PJKMar, 1978, 2B136)
 115. —, Double points of a Gaussian sample path. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1978, 45, № 2, 175—180 (PJKMar, 1979, 6B138)
 116. *Lindgren G.*, Functional limits of empirical distributions in crossing theory. Stochast. Process. and Appl., 1977, 5, № 2, 143—149 (PJKMar, 1978, 1B165)
 117. —, Prediction of level crossings for normal processes containing deterministic components. Adv. Appl. Probab., 1979, 11, № 1, 93—117 (PJKMar, 1979, 12B151)
 118. —, Point processes of exist by bivariate Gaussian processes and extremal theory for the χ^2 -process and its concomitants. J. Multivar. Anal., 1980, 10, № 2, 181—206 (PJKMar, 1980, 12B126)
 119. —, Model processes in nonlinear prediction with application to detection and alarm. Ann. Probab., 1980, 8, № 4, 775—792 (PJKMar, 1981, 2B340)
 120. —, Extreme values and crossing for the χ^2 -process and other functions of multidimensional Gaussian processes, with reliability applications. Adv. Appl. Probab., 1980, 12, № 3, 746—774 (PJKMar, 1981, 3B349)
 121. *Marcus M. B.*, Level crossings of a stochastic process with absolutely

- continuous sample paths. *Ann. Probab.*, 1977, 5, № 1, 52—71 (PЖMar., 1978, 1B162)
122. —, *Shepp L. A.*, Continuity of Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970, 151, № 2, 377—391 (PЖMar, 1971, 8B136)
 123. *McCormick W. P.*, Weak convergence for the maxima of stationary Gaussian processes using random normalization. *Ann. Probab.*, 1980, 8, № 3, 483—497 (PЖMar, 1981, 2B82)
 124. —, An extension to a strong law result of Mittal and Ylvisaker for the maxima of stationary Gaussian processes. *Ann. Probab.*, 1980, 8, № 3, 498—510 (PЖMar, 1981, 2B83)
 125. *Mittal Y.*, Maxima of partial samples in Gaussian sequences. *Ann. Probab.*, 1978, 6, № 3, 421—432 (PЖMar, 1979, 2B63)
 126. —, A new mixing condition for stationary Gaussian processes. *Ann. Probab.*, 1979, 7, № 4, 724—730 (PЖMar, 1980, 2B121)
 127. —, *Ylvisaker D.*, Limit distributions for the maxima of stationary Gaussian processes. *Stochast. Process. and Appl.*, 1975, 3, № 1, 1—18 (PЖMar, 1975, 7B87)
 128. —, —, Strong laws for the maxima of stationary Gaussian processes. *Ann. Probab.*, 1976, 4, № 3, 357—371 (PЖMar, 1977, 10B87)
 129. *Nanopoulos C., Nobellis P.*, Regularite et proprietes limites des fonctions aleatoires. *Lect. Notes Math.*, 1978, 649, 567—690 (PЖMar, 1979, 2B150)
 130. *Pickands J., III*, Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, 145, Nov., 51—73 (PЖMar, 1970, 12B95)
 131. *Pitt L. D.*, Local times for Gaussian vector fields. *Indiana Univ. Math. J.*, 1978, 27, № 2, 309—330 (PЖMar, 1978, 11B149)
 132. —, *Tran Lanh Tat*, Local sample path properties of Gaussian fields. *Ann. Probab.*, 1979, 7, № 3, 477—493 (PЖMar, 1980, 2B133)
 133. *Plackett R. L.*, A reduction formula for normal multivariate integrals. *Biometrika*, 1954, 41, № 3-4, 351—360 (PЖMar, 1956, 5364)
 134. *Qualls C.*, The law of the iterated logarithm on arbitrary sequences for stationary Gaussian processes and Brownian motion. *Ann. Probab.*, 1977, 5, № 5, 724—739 (PЖMar, 1978, 7B132)
 135. *Sato Hiroshi, Tanabe Masami*, Level dependence of the variance of the number of level-crossing points of a stationary Gaussian process. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1979, 25, № 1, 127—129 (PЖMar, 1979, 10B95)
 136. *Sharpe K.*, Some properties of the crossings process generated by a stationary χ^2 process. *Adv. Appl. Probab.*, 1978, 10, № 2, 373—391 (PЖMar, 1979, 2B158)
 137. *Stepian D.*, The one-sided barrier problem for Gaussian noise. *Bell System Techn. J.*, 1962, 41, № 2, 463—501 (PЖMar, 1963, 3B121)
 138. *Taqqu M. S.*, Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1975, 31, № 4, 287—302 (PЖMar, 1975, 12B153)
 139. —, Law of the iterated logarithm for sums of nonlinear functions of Gaussian variables that exhibit a long range dependence. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1977, 40, 203—238 (PЖMar, 1978, 4B42)
 140. —, A representation for self-similar processes. *Stochast. Process. and Appl.*, 1978, 7, № 1, 55—64 (PЖMar, 1978, 12B175)
 141. *Weber M.*, Classes uniformes de processus gaussiens stationnaires. *Lect. Notes Math.*, 1977, 581, 196—256 (PЖMar, 1978, 1B161)
 142. —, Classes superieurs de processus gaussiens. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1978, 42, № 2, 113—128 (PЖMar, 1978, 7B129)
 143. —, Tests integrais pour certaines classes de processus gaussiens stationnaires a trajectoires continues. *C. r. Acad. sci.*, 1978, AB287, № 14, A969—A971 (PЖMar, 1979, 10B94)
 144. —, Sur les D -modules asymptotiques des processus strictement stationnaires ergodiques. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1980, 536, № 2, 231—240 (PЖMar, 1980, 12B145)