И. С. Борисов, Е. А. Бакланов, Моментные неравенства для обобщенных L-статистик,
Сиб. матем. журн., 1998, том 39, номер 3, 483–489

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 1998. Том 39, № 3

УДК 519.21

МОМЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ L-СТАТИСТИК*)

И. С. Борисов, Е. А. Бакланов

1. Введение и формулировка основных результатов. Обозначим через $X_1, \dots, X_n$ независимые одинаково распределенные случайные величины. Рассмотрим статистику

$$\Phi_n := \sum_{i=1}^{n} h_{ni}(X_{n:i}), \tag{1}$$

где $X_{n:1} \leqslant \dots \leqslant X_{n:n}$ — порядковые статистики, построенные по выборке $\{X_i;\, i \leqslant n\}$, $h_{ni} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$, — некоторые измеримые функции. В частности, если $h_{ni}(y) = c_{ni}h(y)$ и функция $h(y)$ монотонна, то Φ_n представляет собой классическую L-статистику.

Без ограничения общности можно считать, что X_1 имеет показательное распределение с параметром 1, поскольку мы можем определить произвольную выборку $\{Y_i; i \leqslant n\}$ по формуле $Y_i = G^{-1}(F(X_i))$, где F — функция распределения X_1, $G^{-1}(z) = \inf\{t : G(t) \geqslant z\}$ — квантильное преобразование функции распределения Y_1. Так как суперпозиция функций G^{-1} и F монотонна, то $G^{-1}(F(X_{n:1})) \leqslant \dots \leqslant G^{-1}(F(X_{n:n}))$ — порядковые статистики, построенные по выборке $\{Y_i;\, i \leqslant n\}$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ni}(Y_{n:i}) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_{ni}(X_{n:i}),$$

где $\tilde{h}_{ni}(x) := h_{ni}(G^{-1}(F(x)))$. Выбор показательного распределения обусловлен удобной для анализа структурой соответствующих порядковых статистик (см. п. 2). В частности, это обстоятельство позволило в [1] доказать асимптотическую нормальность классических L-статистик.

Функционалы вида (1) в рассматриваемой общности, которые естественно называть *обобщенными L-статистиками*, впервые были введены в [2, 3]. Анализ Фурье распределений Φ_n содержится также в [4]. Отметим, что интегральные статистики (интегральные функционалы от эмпирических функций распределения, например, статистики Крамера — Андерсона — Дарлинга) представимы в виде (1) [2, 4]. Целью настоящей работы является получение оценок для абсолютных моментов Φ_n.

Далее нам будет удобнее рассматривать несколько иную запись обобщенных L-статистик в виде аддитивных функционалов от центрированных порядковых статистик:

$$\overline{\Phi}_n := \sum_{i=1}^{n} h_{ni}(X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}). \tag{2}$$

*) Работа первого из авторов поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-01939, 96-15-96295) и INTAS (код проекта 95-0099).

Теорема 1. *Пусть функции $h_{ni}(x), i = 1, \dots, n$, удовлетворяют следующему условию:*

$$|h_{ni}(x)| \leqslant a_{n,i} + b_{n,i}|x|^m \text{ для некоторого } m \geqslant 1, \tag{3}$$

где $a_{n,i}$ и $b_{n,i}$ — положительные постоянные, зависящие только от i и n. Тогда для всех $r \geqslant 2$

$$\mathbf{E}\left|\overline{\Phi}_n\right|^r \leqslant 2^{r-1}A_n^r + 2^{r(1+m)-2}\beta_m^{rm} + C(r,m)\left\{\Gamma(rm+1)\sum_{i=1}^n \frac{(B_{n,i})^r}{(n+1-i)^{rm}} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{(B_{n,i})^{2/m}}{(n+1-i)^2}\right)^{rm/2}\right\}, \tag{4}$$

где $\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ — гамма-функция Эйлера,

$$A_n := \sum_{i=1}^n a_{n,i},\ B_{n,i} := \sum_{j=i}^n b_{n,j},\ \overline{B}_{n,i} := \sum_{j=i}^n b_{n,j}^{2/m},\ \beta_m := \left(\sum_{i=1}^n \frac{\overline{B}_{n,i}}{(n+1-i)^2}\right)^{1/2},$$

если $m \geqslant 2$, и

$$\beta_m := \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_{n,i}}{(n+1-i)^2}\right)^{1/2},$$

если $1 \leqslant m < 2$; $C(r,m) := 2^{r(1+m)-2}(Krm)^{rm}$, K — положительная абсолютная постоянная.

Рассмотрим частный случай $h_{ni}(x) := x$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $a_{n,i} = 0$, $b_{n,i} = 1$, $m = 1$. Отсюда $A_n = 0$, $B_{n,i} = n + 1 - i$, $\beta_1 = \big(\sum\limits_{k\leqslant n} 1/k\big)^{1/2}$ и статистика $\overline{\Phi}_n$ имеет вид

$$\overline{\Phi}_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}X_i),$$

где $X_1, \dots, X_n$ — независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметром 1. В силу центральной предельной теоремы при $n \to \infty$ имеем

$$\mathbf{E}|\overline{\Phi}_n|^r = n^{r/2}\mathbf{E}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}X_i)\right|^r \sim n^{r/2}\mathbf{E}|\eta|^r = \frac{2^{r/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)n^{r/2},$$

где случайная величина η имеет стандартное нормальное распределение. С другой стороны, из (4) получаем

$$\mathbf{E}|\overline{\Phi}_n|^r \leqslant 2^{2r-2}\beta_1 + 2^{2r-2}K^r r^r \Gamma(r+1)n + 2^{2r-2}K^r r^r n^{r/2}.$$

Принимая во внимание факториальный рост гамма-функции, приходим к выводу, что неравенство (4) достаточно точное.

Введем в рассмотрение центрированную обобщенную L-статистику

$$\widetilde{\Phi}_n := \sum_{i=1}^n h_{ni}(X_{n:i}) - \sum_{i=1}^n h_{ni}(\mathbf{E}X_{n:i}). \tag{5}$$

В качестве почти непосредственного следствия теоремы 1 можно получить следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции* h_{ni}, $i = 1, \dots, n$, *дифференцируемы и*

$$|h'_{ni}(x)| \leqslant \alpha_{n,i} + \beta_{n,i}|x|^s \text{ для некоторого } s \geqslant 1, \tag{6}$$

где $\alpha_{n,i}$ *и* $\beta_{n,i}$ *— положительные постоянные, зависящие только от* i *и* n. *Тогда для всех* $r \geqslant 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\widetilde{\Phi}_n|^r \leqslant 8^{r-1} &\left(\sum_{i=1}^n \frac{B_{ni}}{(n+1-i)^2}\right)^{r/2} \\ &+ p_1 \left\{\Gamma(r+1)\sum_{i=1}^n \frac{B_{ni}^r}{(n+1-i)^r} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_{ni}^2}{(n+1-i)^2}\right)^{r/2}\right\} \\ &+ p_2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\overline{C}_{ni}}{(n+1-i)^2}\right)^{r(s+1)/2} + p_3 \sum_{i=1}^n \frac{C_{ni}^r}{(n+1-i)^{r(s+1)}}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$B_{ni} := \sum_{j=i}^n (\alpha_{n,j} + 2^{s-1}\beta_{n,j}\Lambda_j^s), \quad \Lambda_j := \mathbf{E}X_{n:j} = \sum_{k=1}^j \frac{1}{n+1-k},$$

$$C_{ni} := \sum_{j=i}^n \beta_{n,j}, \quad \overline{C}_{ni} := \sum_{j=i}^n \beta_{n,j}^{2/(s+1)},$$

$$p_1 := 2^{3(r-1)}(K_1 r)^r, \quad p_2 := 2^{r(2s+1)-3}(1 + (K_2 r(s+1))^{r(s+1)}),$$

$$p_3 := 2^{3(r-1)}(K_2 r(s+1))^{r(s+1)}\Gamma(r(s+1)+1),$$

K_1 *и* K_2 *— положительные абсолютные постоянные.*

2. Доказательство теоремы 1. Определим случайные величины $\{\tau_{ni}; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ по формуле $\tau_{ni} := X_{n:i} - X_{n:i-1}$, $X_{n:0} = 0$. Известно [5], что $\tau_{n1}, \dots, \tau_{nn}$ независимы и имеют показательные распределения с соответствующими параметрами:

$$P(\tau_{ni} > t) = e^{-(n+1-i)t}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, порядковые статистики $X_{n:k}$ представимы в виде частичных сумм указанных случайных величин:

$$X_{n:k} = \sum_{i=1}^k \tau_{ni}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим случайный процесс $S_n(t) := \sum\limits_{i \leqslant nt+1} \tau_{ni}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Положим $\widetilde{S}_n(t) := S_n(t) - \mathbf{E}S_n(t)$. Тогда

$$\widetilde{S}_n(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t), \tag{8}$$

где $\xi_i(t) := (\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni})I\{(i-1)/n \leqslant t\}$. Определим функцию

$$\varphi_n(t, z) := n h_{ni}(z) \text{ для всех } t \in [(i-1)/n, i/n), \quad i = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Имеет место следующее равенство:

$$\overline{\Phi}_n = \int_0^1 \varphi_n(t, \widetilde{S}_n(t))\, dt. \tag{10}$$

Из (3) следует, что для всех $t \in [(i-1)/n, i/n)$, $i = 1, \dots, n$,

$$|\varphi_n(t,z)| = n|h_{ni}(z)| \leqslant na_{n,i} + nb_{n,i}|z|^m. \tag{11}$$

Поэтому из (10) и (11) получаем

$$|\overline{\Phi}_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(i-1)/n}^{i/n} (na_{n,i} + nb_{n,i}|\widetilde{S}_n(t)|^m)\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(i-1)/n}^{i/n} nb_{n,i}|\widetilde{S}_n(t)|^m\, dt = A_n + \int\limits_0^1 |\widetilde{S}_n(t)|^m \lambda(dt) = A_n + \|\widetilde{S}_n\|^m, \tag{12}$$

где $\lambda(dt) := q(t)\,dt$, $q(t) := nb_{n,i}$, если $(i-1)/n \leqslant t < i/n$, $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $\mathscr{L}_m := \mathscr{L}_m([0,1], \lambda)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|\overline{\Phi}_n|^r &\leqslant 2^{r-1}A_n^r + 2^{r-1}\mathbf{E}\|\widetilde{S}_n\|^{rm} \\ &\leqslant 2^{r-1}A_n^r + 2^{r(1+m)-2}\mathbf{E}|\,\|\widetilde{S}_n\| - \mathbf{E}\|\widetilde{S}_n\|\,|^{rm} + 2^{r(1+m)-2}(\mathbf{E}\|\widetilde{S}_n\|)^{rm}.\end{aligned} \tag{13}$$

В работе [6] показано, что для независимых центрированных случайных величин $Y_1, \dots, Y_n$ со значениями в сепарабельном банаховом пространстве

$$\mathbf{E}|\,\|S_n\| - \mathbf{E}\|S_n\|\,|^t \leqslant (Kt)^t \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\|Y_i\|^t + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\|Y_i\|^2\right)^{t/2}\right), \quad t \geqslant 2, \tag{14}$$

где K — положительная абсолютная постоянная, $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

Заметим, что $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ — независимые разнораспределенные случайные величины с нулевыми средними, принимающие значение в сепарабельном банаховом пространстве $\mathscr{L}_m$. Поэтому, положив в (14) $t = rm$, получим

$$\mathbf{E}|\,\|\widetilde{S}_n\| - \mathbf{E}\|\widetilde{S}_n\|\,|^{rm} \leqslant (Krm)^{rm} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\|\xi_i\|^{rm} + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\|\xi_i\|^2\right)^{rm/2}\right). \tag{15}$$

По определению нормы в пространстве $\mathscr{L}_m$ имеем

$$\|\xi_i\|^k = \left(\int\limits_0^1 |\xi_i(t)|^m \lambda(dt)\right)^{k/m} = |\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}|^k \left(\int\limits_{(i-1)/n}^1 q(t)\,dt\right)^{k/m}$$

$$= |\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}|^k \left(\sum_{k=i}^{n} b_{n,k}\right)^{k/m} = |\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}|^k (B_{n,i})^{k/m}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда следует соотношение

$$\mathbf{E}\|\xi_i\|^k = (B_{n,i})^{k/m}\mathbf{E}|\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}|^k, \quad i = 1, \dots, n. \tag{16}$$

Подставляя в (16) $k = 2$, получаем

$$\mathbf{E}\|\xi_i\|^2 = (B_{n,i})^{2/m}\mathbf{E}(\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni})^2 = \frac{(B_{n,i})^{2/m}}{(n+1-i)^2}. \tag{17}$$

Оценим теперь $\mathbf{E}\|\xi_i\|^k$ для $k > 2$:

$$\mathbf{E}\|\xi_i\|^k = (B_{n,i})^{k/m} \int\limits_0^\infty \left|x - \frac{1}{n+1-i}\right|^k (n+1-i)e^{-(n+1-i)x}\, dx$$

$$= \frac{(B_{n,i})^{k/m}}{e(n+1-i)^k} \int\limits_{-1}^\infty |y|^k e^{-y}\, dy = \frac{(B_{n,i})^{k/m}}{e(n+1-i)^k} \left(\int\limits_0^\infty y^k e^{-y}\, dy + \int\limits_{-1}^0 |y|^k e^{-y} dy \right)$$

$$= \frac{(B_{n,i})^{k/m}}{e(n+1-i)^k} \left(\Gamma(k+1) + \int\limits_0^1 z^k e^z\, dz \right) \leqslant \frac{(B_{n,i})^{k/m}}{e(n+1-i)^k} (\Gamma(k+1) + e)$$

$$\leqslant \Gamma(k+1) \frac{(B_{n,i})^{k/m}}{(n+1-i)^k}. \qquad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в (15), приходим к оценке

$$\mathbf{E}|\,\|\widetilde{S}_n\| - \mathbf{E}\|\widetilde{S}_n\|\,|^{rm}$$
$$\leqslant (Krm)^{rm} \left(\Gamma(rm+1) \sum_{i=1}^n \frac{(B_{n,i})^r}{(n+1-i)^{rm}} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{(B_{n,i})^{2/m}}{(n+1-i)^2} \right)^{rm/2} \right). \qquad (19)$$

Пусть $m \geqslant 2$. Тогда

$$\|\widetilde{S}_n\|^2 = \left(\int\limits_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \right|^m \lambda(dt) \right)^{2/m} = \left(\sum_{k=1}^n \int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \right|^m \lambda(dt) \right)^{2/m}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} \left| \sum_{i=1}^k (\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}) \right|^m n b_{n,k}\, dt \right)^{2/m} = \left(\sum_{k=1}^n b_{n,k} \left| \sum_{i=1}^k (\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}) \right|^m \right)^{2/m}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n b_{n,k}^{2/m} \left(\sum_{i=1}^k (\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}) \right)^2.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\|\widetilde{S}_n\| \leqslant (\mathbf{E}\|\widetilde{S}_n\|^2)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n b_{n,k}^{2/m} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^k (\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}) \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n b_{n,k}^{2/m} \mathbf{E} \left\{ \sum_{i=1}^k (\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni})^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni})(\tau_{nj} - \mathbf{E}\tau_{nj}) \right\} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n b_{n,k}^{2/m} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n+1-i)^2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \frac{b_{n,k}^{2/m}}{(n+1-i)^2} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\widetilde{B}_{n,i}}{(n+1-i)^2} \right)^{1/2} = \beta_m. \qquad (20)$$

Пусть теперь $1 \leqslant m < 2$. Тогда, дважды применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\mathbf{E}\|\widetilde{S}_n\| = \mathbf{E}\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n \xi_i(t)\right|^m \lambda(dt)\right)^{1/m} \leqslant \mathbf{E}\left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i(t)\right)^2 \lambda(dt)\right)^{1/2}$$

$$= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 \xi_i^2(t)\lambda(dt) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \int_0^1 \xi_i(t)\xi_j(t)\lambda(dt)\right)^{1/2}$$

$$= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n B_{n,i}\left(\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}\right)^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} B_{n,j}\left(\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}\right)\left(\tau_{nj} - \mathbf{E}\tau_{nj}\right)\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n B_{n,i}\left(\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}\right)^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} B_{n,j}\left(\tau_{ni} - \mathbf{E}\tau_{ni}\right)\left(\tau_{nj} - \mathbf{E}\tau_{nj}\right)\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_{n,i}}{(n+1-i)^2}\right)^{1/2} = \beta_m. \qquad (21)$$

Подставляя (19)–(21) в (13), окончательно получаем

$$\mathbf{E}\left|\widetilde{\Phi}_n\right|^r \leqslant 2^{r-1}A_n^r + 2^{r(1+m)-2}\beta_m^{rm}$$

$$+ 2^{r(1+m)-2}(Krm)^{rm}\left\{\Gamma(rm+1)\sum_{i=1}^n \frac{(B_{n,i})^r}{(n+1-i)^{rm}} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{(B_{n,i})^{2/m}}{(n+1-i)^2}\right)^{rm/2}\right\}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме вытекает, что

$$\widetilde{\Phi}_n = \sum_{i=1}^n (X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i})\int_0^1 h'_{ni}(\mathbf{E}X_{n:i} + \theta(X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}))\,d\theta. \qquad (22)$$

Из условия (6) следует оценка

$$|\widetilde{\Phi}_n| \leqslant \sum_{i=1}^n |X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}|\int_0^1 (\alpha_{n,i} + \beta_{n,i}|\mathbf{E}X_{n:i} + \theta(X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i})|^s)\,d\theta$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n |X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}|\int_0^1 \left(\alpha_{n,i} + 2^{s-1}\beta_{n,i}\Lambda_i^s + 2^{s-1}\beta_{n,i}|X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}|^s\theta^s\right)d\theta$$

$$= \sum_{i=1}^n (\alpha_{n,i} + 2^{s-1}\beta_{n,i}\Lambda_i^s)|X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}| + \frac{2^{s-1}}{s+1}\sum_{i=1}^n \beta_{n,i}|X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}|^{s+1}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left(\alpha_{n,i} + 2^{s-1}\beta_{n,i}\Lambda_i^s\right)|X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}| + 2^{s-2}\sum_{i=1}^n \beta_{n,i}|X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}|^{s+1}.$$

Положим

$$R_1 := \sum_{i=1}^n (\alpha_{n,i} + 2^{s-1}\beta_{n,i}\Lambda_i^s)|X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}|, \quad R_2 := \sum_{i=1}^n \beta_{n,i}|X_{n:i} - \mathbf{E}X_{n:i}|^{s+1}.$$

Тогда
$$\mathbf{E}|\widetilde{\Phi}_n|^r \leqslant 2^{r-1}\mathbf{E}R_1^r + 2^{r(s-1)-1}\mathbf{E}R_2^r. \tag{23}$$
Применяя к R_1 и R_2 теорему 1, получим
$$\mathbf{E}R_1^r \leqslant 2^{2r-2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{B_{ni}}{(n+1-i)^2}\right)^{r/2}$$
$$+ 2^{2r-2}(K_1 r)^r \left\{\Gamma(r+1)\sum_{i=1}^n \frac{B_{ni}^r}{(n+1-i)^r} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_{ni}^2}{(n+1-i)^2}\right)^{r/2}\right\}, \tag{24}$$
$$\mathbf{E}R_2^r \leqslant 2^{r(s+2)-2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\overline{C}_{ni}}{(n+1-i)^2}\right)^{r(s+1)/2}$$
$$+ q\left\{\Gamma\Big(r(s+1)+1\Big)\sum_{i=1}^n \frac{C_{ni}^r}{(n+1-i)^{r(s+1)}} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{C_{ni}^{2/(s+1)}}{(n+1-i)^2}\right)^{r(s+1)/2}\right\}, \tag{25}$$
где $q := 2^{r(s+2)-2}(K_2 r(s+1))^{r(s+1)}$. Так как $2/(s+1) \leqslant 1$, то $C_{ni}^{2/(s+1)} \leqslant \overline{C}_{ni}$. Поэтому
$$\mathbf{E}R_2^r \leqslant (2^{r(s+2)-2} + q)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\overline{C}_{ni}}{(n+1-i)^2}\right)^{r(s+1)/2}$$
$$+ q\Gamma\Big(r(s+1)+1\Big)\sum_{i=1}^n \frac{C_{ni}^r}{(n+1-i)^{r(s+1)}}. \tag{26}$$

Соотношение (7) следует из (23), (24) и (26). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chernoff H., Gastwirth J. L., Johns M. V., Jr.* Asymptotic distribution of linear combinations of order statistics, with applications to estimation // Ann. Math. Statist. 1967. V. 38. P. 52–72.
2. *Зитикис Р.* О гладкости функции распределения $\mathcal{FL}$-статистики. I // Литов. мат. сб. 1990. Т. 30, № 2. С. 233–246.
3. *Зитикис Р.* О гладкости функции распределения $\mathcal{FL}$-статистики. II // Литов. мат. сб. 1990. Т. 30, № 3. С. 499–512.
4. *Borisov I. S.* Bounds for characteristic functions of additive functionals of order statistics // Siberian Adv. Math. 1995. V. 5, N 4. P. 1–15.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
6. *Пинелис И. Ф.* Оценки моментов бесконечномерных мартингалов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 6. С. 953–958.

г. Новосибирск *Статья поступила 28 ноября 1996 г.*